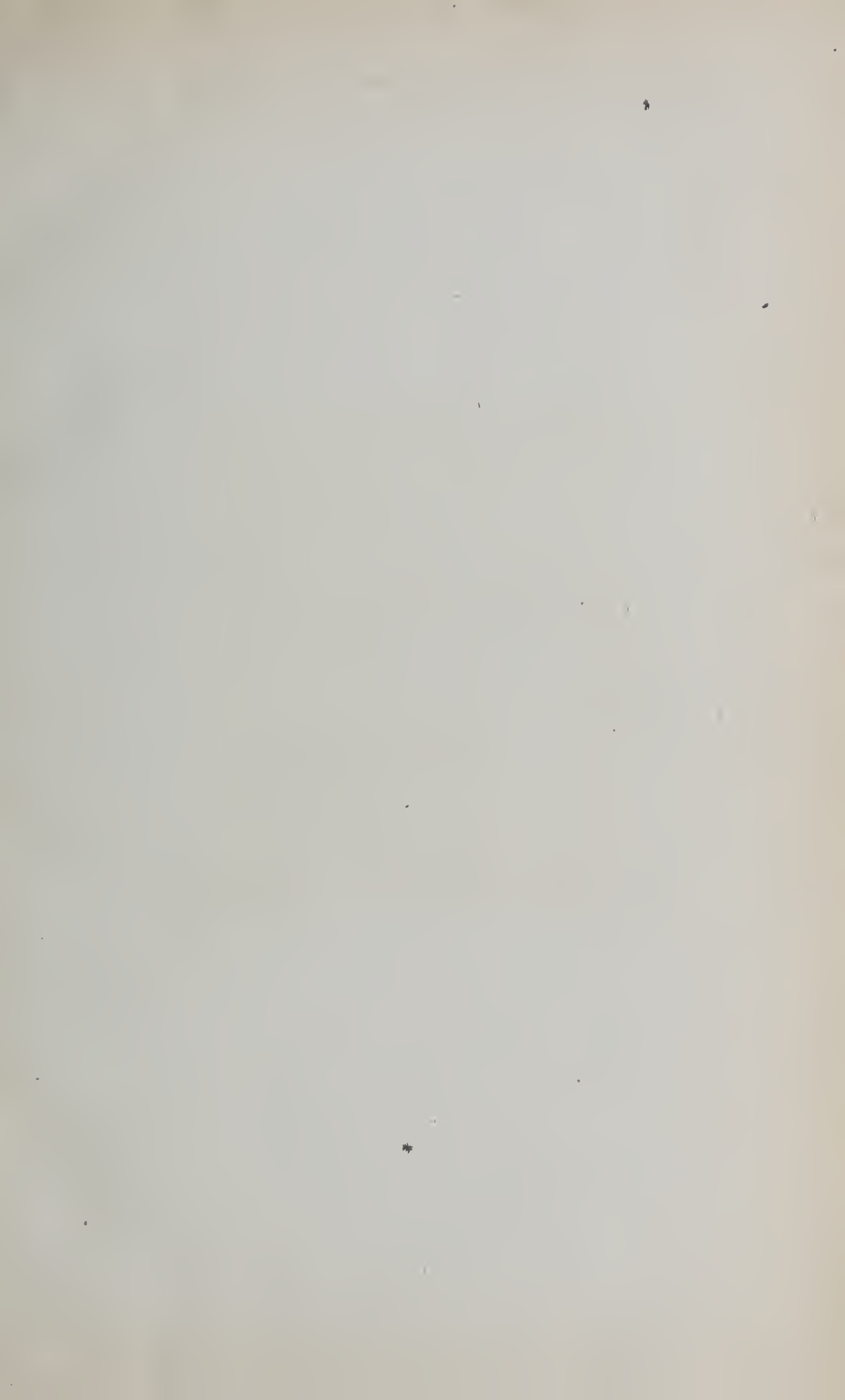










# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

**K. B. Akademie der Wissenschaften**

zu München.

Band XXXVII. Jahrgang 1907.

**München**
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1908.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

# Übersicht

## des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXXVII

## Jahrgang 1907.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

*Sitzung vom 8. Juni 1907.*



---

*Sitzung vom 6. Juli 1907.*



---

*Öffentliche Sitzung zur Feier des 148. Stiftungstages am 16. März 1907.*



---

*Sitzung vom 2. November 1907.*



*Sitzung vom 7. Dezember 1907.*

*Öffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des Prinzregenten am 14. November 1907.*



# Sitzungsberichte

der

# Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

---

## Mathematisch-physikalische Klasse.

Sitzung vom 12. Januar 1907.

1. Herr Ferdinand Lindemann legt eine Arbeit: „Über die Bewegung der Elektronen, I. Teil“ vor und bespricht die Resultate derselben. Die Arbeit ist für die Denkschriften bestimmt.

Die Beobachtungen an den Kathodenstrahlen haben bekanntlich dazu geführt, eine atomistische Theorie der Elektrizität zu entwickeln; jene Strahlen sind nichts anderes als ein Strom kleinster elektrischer Teilchen oder Elektronen. Da die Ausbreitung der elektrischen Kraft Zeit erfordert, so steht ein bewegtes Elektron in einer späteren Zeit noch unter dem Einflusse der Kräfte, die von ihm selbst zu einer früheren Zeit ausgegangen sind. Dieser Einfluß verleiht dem bewegten Elektron eine Eigenschaft, die der Trägheit der materiellen Massen entspricht, indem eine Änderung der Geschwindigkeit des Elektrons nur infolge der Wirkung einer äußeren Kraft eintreten kann, die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit also kräftefrei erfolgt, wenigstens bei Unterlichtgeschwindigkeit. Gestützt auf solche Erwägungen ist man neuerdings dazu übergegangen, die Trägheit der materiellen Massen auf diese scheinbare Trägheit der bewegten Elektronen zurückzuführen, um so die ganze Mechanik der Massen elektrodynamisch zu begründen und schließlich eine elektromagnetische Theorie des Weltgebäudes zu entwickeln. Bei der hohen Bedeutung derartiger kühner

Spekulationen für die Klärung der mechanischen Grundbegriffe erscheint es vor allem nötig, die Grundlagen der Betrachtung genau zu prüfen und die aus den Differentialgleichungen der Elektronentheorie zu ziehenden mathematischen Folgerungen möglichst in alle Einzelheiten zu verfolgen. Dabei ergibt sich das Resultat, daß die erwähnte Anschauung, nach welcher die Bewegung des Elektrons mit konstanter Geschwindigkeit sich von selbst, d. i. ohne Hinzufügung äußerer Kräfte, aufrecht erhält, nicht mit jenen Grundgleichungen verträglich ist. Sowohl bei konstanter Unter- als bei konstanter Überlicht-Geschwindigkeit erzeugt das bewegte Elektron verzögernde Kräfte auf sich selbst, die durch Hinzufügung einer äußeren Kraft aufgehoben werden müssen. Der Übergang von Unter- zu Überlicht-Geschwindigkeit und umgekehrt gestaltet sich einfacher, als nach den bisherigen Theorien, die zu dem Zwecke unendlich große Kräfte in Anspruch nehmen. Hiernach erscheint es zweifelhaft, ob die elektromagnetische Erklärung der materiellen Mechanik sich ohne Einführung neuer Hypothesen wird durchführen lassen. Auch die Analogie eines konstanten elektrischen Stromes mit einem Strome von Elektronen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, ist nicht so vollständig, wie man bisher voraussetzte, indem ersterer keine Selbstinduktion zeigt, der Konvektionsstrom bewegter Elektronen aber auch bei konstanter Geschwindigkeit auf sich selbst induzierend wirkt.

2. Herr Alfred Pringsheim legt eine Abhandlung des Herrn Professor Georg Landsberg in Kiel: „Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen" vor.

Der Verfasser untersucht nach dem Vorgange von Cayley den arithmetischen Charakter der unendlichen Produkte, durch welche die Modulfunktionen dargestellt werden, und legt eine Methode dar, nach der die Wertänderungen bestimmt werden können, welche die auftretenden Doppelsummen bei Vertauschung der Summationsfolgen erfahren.

# Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen.

Von **Georg Landsberg** in Kiel.

(*Eingelaufen 12. Januar.*)

Cayley hat sich in seinen letzten Lebensjahren mit dem arithmetischen Charakter der in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen auftretenden Produktentwicklungen beschäftigt und sich bemüht das Verhalten der durch sie dargestellten Funktionen bei linearer Transformation der unabhängigen Variabelen durch Umformung in Doppelprodukte zu gewinnen.[1]) Bei dieser Untersuchung ist er indes auf Schwierigkeiten gestossen, die er nicht überwunden hat und die, kurz gesagt, darin bestehen, daß die erhaltenen Doppelsummen, resp. Doppelprodukte bedingt konvergent sind und darum eine Vertauschung der Summationsordnung nicht gestatten. Diesen Schwierigkeiten ist Herr Weber[2]) durch Heranziehung der Kroneckerschen Grenzformel[3]) gerecht geworden, aus welcher sich die gewünschten Resultate, allerdings nur unter einschränkenden Annahmen für den Bereich der Variabelen, durch geeignete Grenzübergänge gewinnen lassen. Aber in dem Briefwechsel der beiden Gelehrten tritt mehrfach der Gedanke hervor, daß es einen direkten Weg geben müsse, um die Wertänderung der betrachteten

---

[1]) Sur la fonction modulaire $\chi(\omega)$. Comptes Rendus 12. Jun. 1893. Vier Briefe über elliptische Modulfunktionen. Math. Ann., Bd. 47, S. 1—5.

[2]) Bemerkungen zu den vorstehenden Briefen. Math. Ann., Bd. 47, S. 6—19.

[3]) Kronecker, Berliner Sitzungsberichte 1863, 83, 86, 89.
Weber, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen, § 113.

analytischen Gebilde als Folge der Summationsänderung erkennen zu lassen. Im folgenden glaube ich eine Methode angeben zu können, welche jener Forderung genügt. Es ergibt sich, daß die beiden verschiedenen Doppelsummen, die zu verschiedenen Anordnungen der Summenbildung gehören, direkt miteinander vergleichbar sind und daß ihre Differenz ein bestimmtes Integral ist, welches in jedem einzelnen Falle leicht ausgewertet werden kann. Der Kürze der Darstellung halber führe ich die Methode nur an dem Beispiele der Diskriminante $\eta(\omega)$ durch; sie bleibt aber auch für die übrigen in jenem Briefwechsel betrachteten Modulfunktionen anwendbar, und sie bedarf nur unwesentlicher Modifikationen, wenn andere als die hier untersuchten Änderungen der Summationsordnung in ihren Wirkungen diskutiert werden sollen.

## I.

In der Theorie der elliptischen Modulfunktionen werden aus den beiden unabhängigen Variabelen $\omega_1$, $\omega_2$ die Summen:

$$S_n = \sum \frac{1}{(m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2)^{2n}} \tag{1}$$

gebildet, welche über alle ganzzahlige Wertepaare $(m_1, m_2)$ mit Ausschluß des Paares $m_1 = m_2 = 0$ erstreckt sind; dieselben konvergieren aber nur dann absolut und unbedingt, wenn $n > 1$ ist. Für $n = 1$ hingegen ist der Wert der Summe von der Anordnung der Glieder abhängig; je nachdem man erst über $m_1$ und dann über $m_2$ oder in umgekehrter Reihenfolge summiert, erhält man die beiden Summen:

$$\frac{\eta_1}{\omega_1} = \sum_{m_2}\sum_{m_1} \frac{1}{(m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2)^2} \quad \text{und}$$
$$\frac{\eta_2}{\omega_2} = \sum_{m_1}\sum_{m_2} \frac{1}{(m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2)^2}, \tag{2}$$

wobei $\eta_1$ und $\eta_2$ die beiden Perioden des Integrales zweiter Gattung, aufgefaßt als Funktionen der entsprechenden Perioden $\omega_1$ und $\omega_2$ des Integrales der ersten Gattung, bedeuten. Die

beiden Summen auf der rechten Seite der obigen Gleichungen sind aber niemals einander gleich; denn es besteht die „Legendresche Relation":

$$\omega_1 \eta_2 - \omega_2 \eta_1 = \pm 2 \pi i, \tag{3}$$

in welcher das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem das Periodenverhältnis:

$$\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{4}$$

eine positive oder eine negative imaginäre Koordinate hat. Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, diese Relation direkt aus der obigen Definition der Größen $\eta_1$ und $\eta_2$ durch Vergleichung der beiden verschiedenen Anordnungen der Summe $S_1$ abzuleiten.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die beiden Größen $\frac{\eta_1}{\omega_1}$ und $\frac{\eta_2}{\omega_2}$ als Grenzwerte der beiden mit endlichem $\lambda$ gebildeten Summen:

$$\begin{aligned} T_\lambda &= \sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda} \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^2} \quad \text{und} \\ U_\lambda &= \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda} \sum_{m_2=-\infty}^{m_2=+\infty} \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^2}, \end{aligned} \tag{5}$$

von denen die erste über sämtliche Gitterpunkte des zu den Perioden $\omega_1$ und $\omega_2$ gehörigen parallelogrammatischen Netzes erstreckt ist, die im Inneren oder auf dem Rande des von den beiden Parallelen $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1$ begrenzten Streifens gelegen sind, während die zweite in derselben Beziehung zu dem Parallelstreifen $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2$ steht. Beide Summen vergleichen wir zunächst mit einer dritten, endlichen Summe:

$$(6) \qquad P_\lambda = \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda} \sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda} \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^2},$$

deren zugehörige Gitterpunkte im Inneren oder auf dem Rande des Parallelogrammes $A\,B\,C\,D$ gelegen ist, das den beiden Parallelstreifen gemein ist. Demzufolge finden wir für die Differenz:

$$(7) \qquad \begin{aligned} T_\lambda - P_\lambda = & \sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda} \sum_{m_1=\lambda+1}^{m_1=+\infty} \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^2} \\ & + \sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda} \sum_{m_1=-\lambda-1}^{m_1=-\infty} \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^2}, \end{aligned}$$

wobei sich von den beiden Teilsummen auf der rechten Seite der Gleichung die erste auf den Streifen $\mathfrak{D}_1\, D\, C\, \mathfrak{C}_1$, die zweite auf den Streifen $\mathfrak{A}_1\, A\, B\, \mathfrak{B}_1$ bezieht. In derselben Weise ergibt sich für die Differenz:

$$(8) \qquad \begin{aligned} U_\lambda - P_\lambda = & \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda} \sum_{m_2=\lambda+1}^{m_2=+\infty} \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^2} \\ & + \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda} \sum_{m_2=-\lambda-1}^{m_2=-\infty} \frac{1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)^2}, \end{aligned}$$

wobei die erste Teilsumme zu dem Streifen $\mathfrak{B}_2\, B\, C\, \mathfrak{C}_2$, die zweite zu dem Streifen $\mathfrak{A}_2\, A\, D\, \mathfrak{D}_2$ gehört.

Gehen wir nun zur Grenze für $\lambda = \infty$ über, so ist:

$$\lim T_\lambda = \frac{\eta_1}{\omega_1}, \quad \lim U_\lambda = \frac{\eta_2}{\omega_2}$$

und der Grenzwert von $P_\lambda$ ist im Bereiche der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe eine eindeutige Funktion von $\omega_1$, $\omega_2$, welche mit:

$$P(\omega_1, \omega_2) = \lim_{\lambda = \infty} P_\lambda$$

bezeichnet sein möge. Von den vier Summen der Gleichungen (7) und (8) ist aber die erste:

$$\sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda} \sum_{m_1=\lambda+1}^{m_1=+\infty} \frac{\frac{1}{\lambda^2}}{\left(\frac{m_1}{\lambda}\omega_1 + \frac{m_2}{\lambda}\omega_2\right)^2}$$

für $\lambda = \infty$ nichts anderes als das Integral:

$$\int_{x_2=-1}^{+1} \int_{x_1=1}^{\infty} \frac{dx_2\, dx_1}{(x_1\omega_1 + x_2\omega_2)^2} = \int_{-1}^{+1} \frac{dx_2}{\omega_1(\omega_1 + x_2\omega_2)} = \frac{1}{\omega_1\omega_2} \int_{\Delta\Gamma} \frac{dz}{z},$$

wobei das letzte Linienintegral in geradliniger Richtung von dem Punkte $\omega_1 - \omega_2$ oder $\Delta$ nach $\omega_1 + \omega_2$ oder $\Gamma$ zu führen ist. Ebenso ergibt sich für die übrigen drei Integrale:

$$\lim_{\lambda=\infty} \sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda} \sum_{m_1=-\lambda-1}^{m_1=-\infty} \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} = \int_{-1}^{+1} \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx_2\, dx_1}{(x_1\omega_1 + x_2\omega_2)^2}$$
$$= \frac{1}{\omega_1\omega_2} \int_{BA} \frac{dz}{z}$$

$$\lim_{\lambda=\infty} \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda} \sum_{m_2=\lambda+1}^{m_2=+\infty} \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} = \int_{-1}^{+1} \int_{1}^{\infty} \frac{dx_1\, dx_2}{(x_1\omega_1 + x_2\omega_2)^2}$$
$$= \frac{1}{\omega_1\omega_2} \int_{B\Gamma} \frac{dz}{z}$$

$$\lim_{\lambda=\infty} \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda} \sum_{m_2=-\lambda-1}^{m_2=-\infty} \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} = \int_{-1}^{+1} \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx_1\, dx_2}{(x_1\omega_1 + x_2\omega_2)^2}$$
$$= \frac{1}{\omega_1\omega_2} \int_{\Delta A} \frac{dz}{z}.$$

Man erhält hiernach durch den Grenzübergang die beiden Gleichungen:

$$\frac{\eta_1}{\omega_1} - P(\omega_1, \omega_2) = -\int_{A}^{B} \frac{dz}{\omega_1\omega_2 z} - \int_{\Gamma}^{\Delta} \frac{dz}{\omega_1\omega_2 z} = \frac{2}{\omega_1\omega_2} \log \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 - \omega_2}$$

$$\frac{\eta_2}{\omega_2} - P(\omega_1, \omega_2) = \int_{B}^{\Gamma} \frac{dz}{\omega_1\omega_2 z} + \int_{\Delta}^{A} \frac{dz}{\omega_1\omega_2 z} = \frac{2}{\omega_1\omega_2} \log \frac{\omega_1 + \omega_2}{-\omega_1 + \omega_2},$$

wobei die Logarithmen als Hauptwerte zu nehmen sind und somit eindeutige Funktionen des Periodenverhältnisses $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ werden. Subtrahiert man schließlich die erste der obigen Gleichungen von der zweiten, so vereinigen sich die vier Integrale zu dem um das Parallelogramm $A\,B\,\Gamma\,\Delta$ erstreckten Integral $\frac{1}{\omega_1\,\omega_2}\int\frac{dz}{z}$ und man erhält die zu beweisende Relation:

$$\frac{\eta_2}{\omega_2} - \frac{\eta_1}{\omega_1} = \pm\frac{2\pi i}{\omega_1\,\omega_2},$$

in welcher das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem die Umkreisung des Nullpunktes im positiven oder im negativen Sinne erfolgt, d. h. je nachdem das Periodenverhältnis $\omega$ eine positive oder negative imaginäre Koordinate besitzt.

Mit Hilfe der Legendreschen Relation folgt nunmehr leicht das Verhalten der Funktionen $\eta_1$ und $\eta_2$ bei beliebiger linearer Transformation der Perioden $\omega_1$ und $\omega_2$; da sich jede solche Transformation:

$$\omega_1' = \alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_2, \qquad \omega_2' = \gamma\,\omega_1 + \delta\,\omega_2 \quad (\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = 1)$$

aus elementaren zusammensetzen läßt, für die sich die Veränderung von $\eta_1$ und $\eta_2$ unmittelbar übersehen läßt, so ergibt sich:

$$(9) \quad \eta_1' = \eta_1(\omega_1', \omega_2') = \alpha\,\eta_1 + \beta\,\eta_2, \quad \eta_2' = \eta_2(\omega_1', \omega_2') = \gamma\,\eta_1 + \delta\,\eta_2.$$

## II.

Wir betrachten jetzt die von zwei Periodenverhältnissen $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ und $\frac{\Omega_1}{\Omega_2}$ abhängige Summe:

$$(10) \quad \varphi\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}, \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right) = \sum \frac{\omega_1\,\Omega_2 - \omega_2\,\Omega_1}{(m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2)\,(m_1\,\Omega_1 + m_2\,\Omega_2)},$$

welche ebenfalls über alle ganzzahligen Wertepaare $(m_1, m_2)$ mit Ausschluß von $m_1 = m_2 = 0$ erstreckt und deren Wert ebenfalls von der Anordnung der Glieder abhängig ist. Diese

Reihe konvergiert bei jeder Gliederanordnung, bei welcher die Reihe $S_1$ in (1) konvergiert und die Funktion des Quotienten $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, die sie bei einer bestimmten Reihenfolge der Summation darstellt, steht in innigem Zusammenhange mit den Funktionen $\eta_1$ und $\eta_2$. Denn differenziiert man gliedweise nach $\omega_1$ und $\omega_2$, so erhält man, falls man in (10) erst über $m_2$ und dann über $m_1$ summiert und $\omega$ auf die positive Halbebene beschränkt:

$$(11)\quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_1} &= \sum_{m_1}\sum_{m_2} \frac{\omega_2}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} = \eta_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_2} &= -\sum_{m_1}\sum_{m_2} \frac{\omega_1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2} = -\frac{\omega_1}{\omega_2}\eta_2 = -\eta_1 - \frac{2\pi i}{\omega_2} \end{aligned}$$

und hieraus folgt zunächst die Konvergenz der Reihe, weil die gliedweise Integration einer gleichmäßig konvergenten Reihe gestattet ist. Weiter aber ergibt sich aus den Gleichungen (11):

$$(12)\qquad d\varphi = \eta_2\, d\omega_1 - \eta_1\, d\omega_2 - 2\pi i\, d\log\omega_2.$$

Es bleibt also das Differential der Funktion:

$$\varphi + 2\pi i \log \omega_2$$

bei linearer Transformation der Perioden ungeändert, denn es ist infolge der Formeln (9):

$$\eta_2'\, d\omega_1' - \eta_1'\, d\omega_2' = \eta_2\, d\omega_1 - \eta_1\, d\omega_2.$$

Bilden wir daher die Funktion:

$$(13)\quad \varphi + 2\pi i \log\frac{\omega_2}{\Omega_2} = \sum_{m_1}\sum_{m_2} \frac{\omega_1\Omega_2 - \omega_2\Omega_1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)(m_1\Omega_1 + m_2\Omega_2)} + 2\pi i \log\frac{\omega_2}{\Omega_2},$$

so ändert sich diese bei jeder linearen Transformation entweder der Perioden $\omega_1, \omega_2$ oder der Perioden $\Omega_1, \Omega_2$ nur um eine additive Konstante, und wenn man beide Periodenpaare derselben linearen Transformation unterwirft, so ist die Konstante gleich Null, weil die Funktion verschwindet, falls die beiden

Periodenpaare koinzidieren. Die Funktion ist also in Beziehung auf beide eine Modulform erster Stufe bei kongruenter Veränderung der Argumente.

Man kann die Funktion in mannigfacher Weise als Differenz zweier anderer darstellen, welche nur von je einem der beiden Periodenpaare abhängen und im wesentlichen nichts anderes als die in der Theorie der Modulfunktionen auftretende Diskriminante $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ (in der Bezeichnung von Herrn Klein) oder $\eta(\omega)$ (in der Bezeichnung von Herrn Weber) sind.

Sind nämlich $n_1$ und $n_2$ zwei ganze oder gebrochene Zahlen, welche zu jedem Zahlenpaare $(m_1, m_2)$ so hinzubestimmt werden, daß:

$$n_1 m_2 - n_2 m_1 = 1$$

ist, so ist:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)(m_1 \Omega_1 - m_2 \Omega_2)} \\ &= \sum_{m_1} \sum_{m_2} \left( \frac{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2}{m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2} - \frac{n_1 \Omega_1 + n_2 \Omega_2}{m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2} \right), \end{aligned}$$

wobei in jedem Gliede der Summe der Minuend bloß von $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$, der Subtrahend bloß von $\Omega = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$ abhängt. Setzt man also:

$$q = e^{\pi i \omega}, \quad Q = e^{\pi i \Omega},$$

so ergibt die Ausführung der Summation über $m_2$:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\pi^2}{3}(\omega - \Omega) + 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\operatorname{ctg} \pi m \Omega - \operatorname{ctg} \pi m \omega) \\ (14) \qquad &= \frac{\pi^2}{3}(\omega - \Omega) + 4\pi i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left( \frac{1}{1 - q^{2m}} - \frac{1}{1 - Q^{2m}} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{3}(\omega - \Omega) - 4\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1 - q^{2n}}{1 - Q^{2n}}. \end{aligned}$$

Setzt man also mit Herrn Weber:

$$\eta(\omega) = q^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}),$$

so ist:

$$(15) \qquad \varphi = 4\pi i \log \frac{\eta(\Omega)}{\eta(\omega)}.$$

In der Bezeichnung von Herrn Klein wird:

$$\varDelta(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} \eta(\omega)^{24}$$

gesetzt: es ist alsdann:

$$(16) \qquad \varphi + 2\pi i \log \frac{\omega_2}{\Omega_2} = \frac{\pi i}{6} \log \frac{\varDelta(\Omega_1, \Omega_2)}{\varDelta(\omega_1, \omega_2)}.$$

Im Gegensatz zu diesen hergebrachten Darstellungen der Diskriminante $\varDelta(\omega_1 . \omega_2)$ läßt die Doppelsumme (10), von der wir hier ausgegangen sind, die Grenzstellen der Funktion in Evidenz treten und ergibt das Verhalten der Funktion bei linearer Transformation als Konsequenz einer Änderung der Summationsordnung. Die Einführung zweier Argumentenpaare $\omega_1, \omega_2$ und $\Omega_1, \Omega_2$ statt eines einzigen erweist sich hierbei als zweckmäßig zu übersichtlicher Behandlung der betrachteten analytischen Gebilde; man kann nachträglich natürlich zu Funktionen nur eines Argumentenpaares übergehen, indem man z. B. $\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = i\infty$, also $Q = 0$ setzt.

## III.

Das Verhalten der Funktionen $\eta(\omega)$, resp. $\varDelta(\omega_1, \omega_2)$ bei linearer Transformation wurde im vorigen Abschnitte aus dem Verhalten der Funktionen $\eta_1$ und $\eta_2$ durch Integration erschlossen. Man kann aber das gleiche Verfahren, welches im ersten Abschnitte auf die Untersuchung der Wertänderung der Summe $S_1$ bei Vertauschung der Summationsordnung angewendet wurde, auch in ganz analoger Weise auf die Summe $\varphi(\omega, \Omega)$ des vorigen Abschnittes übertragen und auf diesem zweiten Wege die letzten Resultate in direkter Weise erlangen.

Zu diesem Zwecke vergleichen wir die Summen:

$$(17) \quad \varphi\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}, \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right) = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)(m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2)}$$

und:

$$\varphi\left(-\frac{\omega_2}{\omega_1}, -\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) = \sum_{m_2} \sum_{m_1} \frac{\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1}{(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2)(m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2)}$$

miteinander, die durch Vertauschung der Summationsordnung auseinander hervorgehen. Bezeichnen wir das allgemeine Glied mit $\sigma_m$, so erscheinen die ursprüngliche und die transformierte Funktion als Grenzwerte der Summen:

$$T_\lambda = \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda} \sum_{m_2=-\infty}^{m_2=+\infty} \sigma_m$$

und:

$$\Theta_\lambda = \sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda} \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \sigma_m$$

für $\lambda = \infty$. Wir setzen alsdann beide miteinander in Beziehung, indem wir sie mit einer dritten Summe:

$$\Pi_\lambda = \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda} \sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda} \sigma_m$$

vergleichen. Ganz analog wie im ersten Abschnitte ergibt sich alsdann:

$$T_\lambda - \Pi_\lambda = \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda} \sum_{m_2=\lambda+1}^{m_2=\infty} \sigma_m + \sum_{m_1=-\lambda}^{m_1=+\lambda} \sum_{m_2=-\lambda-1}^{m_2=-\infty} \sigma_m$$

$$\Theta_\lambda - \Pi_\lambda = \sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda} \sum_{m_1=\lambda+1}^{m_1=\infty} \sigma_m + \sum_{m_2=-\lambda}^{m_2=+\lambda} \sum_{m_1=-\lambda-1}^{m_1=-\infty} \sigma_m.$$

Gehen wir nun zur Grenze für $\lambda = \infty$ über, so konvergiert die erste der vier zuletzt auftretenden Teilsummen gegen das Doppelintegral:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{1}^{\infty} \frac{(\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1)\, dx_1\, dx_2}{(x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2)(x_1 \Omega_1 + x_2 \Omega_2)},$$

welches sich durch Ausführung der Integration über $x_2$ als das einfache Integral:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx_1}{x_1} \left( \log \frac{x_1 \omega_1 + \omega_2}{\omega_2} - \log \frac{x_1 \Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_2} \right)$$

darstellen läßt: hierbei sind die Logarithmen in der auftretenden Klammergröße so zu wählen, daß ihre Differenz verschwindet, falls das Periodenverhältnis $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ mit $\Omega = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$

zusammenfällt. Führt man die gleiche Rechnung für die übrigen Doppelintegrale aus, so ergibt sich schließlich:

$$(18)\quad \sum_{m_1}\sum_{m_2}\frac{\omega_1\Omega_2-\omega_2\Omega_1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)(m_1\Omega_1+m_2\Omega_2)} - \sum_{m_2}\sum_{m_1}\frac{\omega_1\Omega_2-\omega_2\Omega_1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)(m_1\Omega_1+m_2\Omega_2)} = J(\omega)-J(\Omega),$$

worin $J(\omega)$ die Summe der vier Integrale:

$$J(\omega)=\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}\log(1+x\omega)-\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}\log(1-x\omega) -\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}\log\left(1-\frac{x}{\omega}\right)+\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}\log\left(1+\frac{x}{\omega}\right)$$

und $J(\Omega)$ dieselbe Funktion von $\Omega$ bedeutet; die Logarithmen können und sollen hierbei so bestimmt sein, daß sie für $x=0$ verschwinden.

Die noch übrigbleibende Aufgabe der Ermittelung der Funktion $J(\omega)$ erledigt sich am einfachsten durch Differentiation nach $\omega$. Man findet so:

$$J'(\omega)=\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{1+x\omega}+\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{1-x\omega}-\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\omega(\omega-x)}-\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\omega(\omega+x)}.$$

Das auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Aggregat ist aber nichts weiter als die Summe der vier auf geradlinigem Wege erstreckten Integrale:

$$\frac{1}{\omega}\int_{-\omega+1}^{\omega+1}\frac{dz}{z}+\frac{1}{\omega}\int_{\omega-1}^{-\omega-1}\frac{dz}{z}+\frac{1}{\omega}\int_{\omega+1}^{\omega-1}\frac{dz}{z}+\frac{1}{\omega}\int_{-\omega-1}^{-\omega+1}\frac{dz}{z},$$

also wie ein Blick auf die obige Figur zeigt, das um das Parallelogramm $AB\Gamma\Delta$ in positivem Sinne herumgeleitete Integral:

$$\frac{1}{\omega}\int\frac{dz}{z}=\frac{2\pi i}{\omega}.$$

Folglich ist:

$$J(\omega)=2\pi i\log\omega+\text{const},$$

wobei die Integrationskonstante zwar für unsere Zwecke belanglos, aber durch die Annahme $\omega = 1$ leicht bestimmbar, nämlich gleich $\pi^2$ ist.

Es ergibt sich also die Relation:

$$(19) \quad \varphi\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}, \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right) - \varphi\left(-\frac{\omega_2}{\omega_1}, -\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) = 2\pi i \log \frac{\omega_1 \Omega_2}{\omega_2 \Omega_1},$$

und diese Gleichung steht in genauer Übereinstimmung mit der Gleichung (13) des vorigen Abschnittes, welche aussagte, daß die Funktion:

$$\varphi\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}, \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right) + 2\pi i \log \frac{\omega_2}{\Omega_2}$$

bei kongruenter linearer Transformation der beiden Periodenpaare ungeändert bleibt.

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 9. Februar 1907.

1. Herr Karl v. Linde berichtet über Versuche, welche im Laboratorium für technische Physik (insbesondere von Herrn Perwanger) zur Feststellung des Wärmedurchganges von einem wärmeren zu einem kälteren Wasserstrome durch eine Metallwand ausgeführt worden sind.

Hiebei hat sich für konstante Wassergeschwindigkeit neben der bekannten proportionalen Zunahme der Wärmemenge mit der Temperaturdifferenz zwischen den beiden Strömen eine Abhängigkeit dieser Wärmemenge von der mittleren Temperatur ergeben, welche bei kleineren Temperaturdifferenzen als eine lineare sich darstellt, bei größeren Differenzen ein langsameres Anwachsen zeigt.

Die Abhängigkeit des Wärmedurchganges von der Geschwindigkeit des strömenden Wassers wird in hohem Maße bestimmt einerseits davon, ob die Geschwindigkeit kleiner oder größer ist, als die „kritische" und andererseits durch die Beschaffenheit der Wandflächen. Bei Geschwindigkeiten über der „kritischen" und bei rauhen Wandflächen erscheint die durchgehende Wärme für konstante Temperaturdifferenzen als eine quadratische Funktion der Geschwindigkeit, während bei glatten Wandflächen für Geschwindigkeiten über 1,5 m. p. s. diese Funktion eine fast genau lineare ist, nach unten hin aber Abweichungen zeigt, welche mit dem Übergange zur kritischen Geschwindigkeit zusammenhängen dürften.

2. Herr Ludwig Burmester hält einen Vortrag: „Über kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme.“

Bei einer gesetzmäßigen Bewegung eines ebenen Systems in einem als ruhend angenommenen anderen ebenen System beschreibt jeder Punkt des bewegten Systems eine Bahnkurve in dem ruhenden System, und ferner beschreibt jeder Punkt des ruhenden Systems eine Bahnkurve in dem bewegten System. Werden nun den Punkten einer Kurve in dem einen System die Punkte einer Kurve in dem anderen eindeutig zugeordnet, dann beschreiben je zwei zugeordnete Punkte entsprechende Bahnkurven in den beiden Systemen; und in jedem Bewegungsmoment sind die Punkte auf den entsprechenden Bahnkurven entsprechende Punkte der beiden Systeme. Die hierdurch definierte geometrische Beziehung dieser Systeme wird eine kinetographische Verwandtschaft derselben genannt.

3. Herr Erwin Voit spricht: „Über den zeitlichen Ablauf der Eiweißresorption.“

Derselbe berichtet über Versuche, welche Herr Kugler unter seiner Leitung über den zeitlichen Ablauf der Eiweißresorption bei Tieren angestellt hat.

Diese lehren, daß der Resorptionsverlauf von der zu Beginn des Versuches im Verdauungstraktus vorhandenen Eiweißmenge abhängt. Somit muß sich die Resorptionskurve für geringere Eiweißmengen aus der bei größerer Zufuhr gewonnenen Kurve ableiten lassen. Die Form der Kurve wird durch die Änderungen im Füllungszustande des Dünndarmes bestimmt.

# Kinetographische Verwandtschaft ebener Systeme, und räumlicher Systeme.

Von **Ludwig Burmester.**

(*Eingelaufen 19. Februar.*)

---

## Allgemeine Darlegungen.

Die Gesamtheit aller in einer Ebene befindlichen Punkte, deren gegenseitige Lage sich nicht ändert, wird ein starres ebenes System oder kurz ein ebenes System genannt; und analog wird die Gesamtheit aller in einem Raum befindlichen Punkte, deren gegenseitige Lage sich nicht ändert, ein starres räumliches System oder kurz ein räumliches System genannt.

Bei einer gesetzmäßigen Bewegung eines ebenen Systems $S$ in einem anderen ebenen System $\Sigma$, welches wir als ruhend annehmen, beschreibt ein angenommener Punkt $A_s$ des bewegten Systems $S$ eine Bahnkurve $\alpha$ in dem ruhenden System $\Sigma$, und ferner beschreibt ein angenommener Punkt $\mathsf{A}_\sigma$ des ruhenden Systems $\Sigma$ eine Bahnkurve $a$ in dem bewegten System $S$.

Wenn wir in dem System $S$ auf einer gegebenen Kurve $k_s$ die Punkte $A_s$, $B_s$, $C_s$ .. und in dem System $\Sigma$ auf einer gegebenen Kurve $\varkappa_\sigma$ zunächst der Einfachheit wegen eindeutig zugeordnete Punkte $\mathsf{A}_\sigma$, $\mathsf{B}_\sigma$, $\Gamma_\sigma$ .. annehmen, dann beschreiben die Punkte $A_s$, $B_s$, $C_s$ .. des bewegten Systems $S$ die Bahnkurven $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ .. in dem ruhenden System $\Sigma$ und die Punkte $\mathsf{A}_\sigma$, $\mathsf{B}_\sigma$, $\Gamma_\sigma$ .. des ruhenden System $\Sigma$ die Bahnkurven $a$, $b$, $c$ .. in dem bewegten System $S$. In jedem Bewegungsmoment bestimmen die

beschreibenden Punkte $A_s$, $B_s$, $C_s$ .. des Systems $S$ auf den zugehörigen Bahnkurven $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ .. Punkte A, B, Γ .. in dem System Σ, und ebenso bestimmen die beschreibenden Punkte $A_\sigma$, $B_\sigma$, $\Gamma_\sigma$ .. des Systems Σ auf den zugehörigen Bahnkurven $a$, $b$, $c$ .. Punkte $A$, $B$, $C$ .. in dem System $S$. Die so in jedem Bewegungsmoment bestimmten Punkte A, B, Γ .. und $A, B, C$ .. nennen wir entsprechende Punkte, die beschriebenen Bahnkurven $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ .. und $a$, $b$, $c$ .. entsprechende Kurven in den ebenen Systemen Σ, $S$.

Die hierdurch definierte Beziehung der Systeme Σ, $S$ nennen wir eine kinetographische Verwandtschaft zweier ebener Systeme. Dieselbe ist demnach bestimmt durch eine gegebene gesetzmäßige Bewegung des Systems $S$ in dem System Σ und durch die eindeutige Zuordnung der Punkte auf den in den Systemen $S$, Σ gegebenen Kurven $k_s$, $\varkappa_\sigma$.

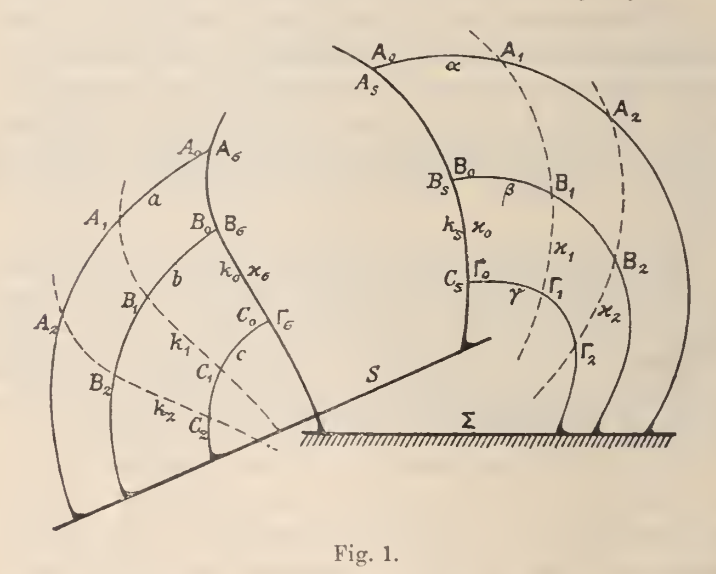



Fig. 1.

Um die Bewegungsvorgänge des einen der Systeme $S$, Σ in bezug auf das andere in Fig. 1 zu veranschaulichen, sind in dem bewegten System $S$ auf der Kurve $k_s$ die Punkte $A_s$, $B_s$, $C_s$ .. und in dem ruhenden System Σ auf der Kurve $\varkappa_\sigma$

die eindeutig zugeordneten Punkte $\mathsf{A}_\sigma$, $\mathsf{B}_\sigma$, $\Gamma_\sigma$ .. angenommen. Die Kurve $k_s$ sowie die Punkte $A_s$, $B_s$, $C_s$ .. des Systems $S$ befinden sich im Anfang der Bewegung in Deckung mit der Kurve $\varkappa_0$ und den Punkten $\mathsf{A}_0$, $\mathsf{B}_0$, $\Gamma_0$ .. des Systems $\Sigma$; und ferner befinden sich die Kurve $\varkappa_\sigma$ sowie die Punkte $\mathsf{A}_\sigma$, $\mathsf{B}_\sigma$, $\Gamma_\sigma$ .. des Systems $\Sigma$ in Deckung mit der Kurve $k_0$ und den Punkten $A_0$, $B_0$, $C_0$ .. des Systems $S$. Die Punkte $A_s$, $B_s$, $C_s$ .. beschreiben die Bahnkurven $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ .. in dem ruhenden System $\Sigma$ und die Punkte $\mathsf{A}_\sigma$, $\mathsf{B}_\sigma$, $\Gamma_\sigma$ .. beschreiben die entsprechenden Bahnkurven $a$, $b$, $c$ .. in dem bewegten System $S$. Durch die Bewegung des Systems $S$ gelangt die Kurve $k_s$ mit den Punkten $A_s$, $B_s$, $C_s$ .. aus der Anfangslage $\varkappa_0$ ($\mathsf{A}_0$, $\mathsf{B}_0$, $\Gamma_0$ ..) in verschiedene Lagen $\varkappa_1$ ($\mathsf{A}_1$, $\mathsf{B}_1$, $\Gamma_1$ ..), $\varkappa_2$ ($\mathsf{A}_2$, $\mathsf{B}_2$, $\Gamma_2$ ..) .., die man gleichsam als Abdrücke von $k_s$ ($A_s$, $B_s$, $C_s$ ..) auf das ruhenden System $\Sigma$ betrachten kann. Ferner gelangt die in dem ruhenden System $\Sigma$ liegende Kurve $\varkappa_\sigma$ mit den Punkten $\mathsf{A}_\sigma$, $\mathsf{B}_\sigma$, $\Gamma_\sigma$ .., von der anfänglichen Deckung mit $k_0$ ($A_0$, $B_0$, $C_0$ ..), ausgehend in denselben Momenten zur Deckung mit den Lagen $k_1$ ($A_1$, $B_1$, $C_1$ ..), $k_2$ ($A_2$, $B_2$, $C_2$ ..) .., die auch gleichsam die Abdrücke von $\varkappa_\sigma$ ($\mathsf{A}_\sigma$, $\mathsf{B}_\sigma$, $\Gamma_\sigma$ ..) auf das bewegte System $S$ sind wenn es sich in der zeichneten Anfangslage befindet. Während der Bewegung von $S$ beschreiben die Punkte $A_s$, $B_s$, $C_s$ .. die Bahnkurven $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ .. in $\Sigma$, und die ruhenden Punkte $\mathsf{A}_\sigma$, $\mathsf{B}_\sigma$, $\Gamma_\sigma$ .. beschreiben die Bahnkurven $a$, $b$, $c$ .. in $S$, die also über diese Punkte gleiten. Wenn ferner die Kurve $k_s$ des bewegten Systems $S$ in die Lagen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ .. gelangt, dann treten die in $S$ liegenden Kurven $k_1$, $k_2$ .. nach einander in Deckung mit der Kurve $\varkappa_\sigma$ des ruhenden Systems $\Sigma$. Demnach entspricht der Schar der unter sich kongruenten Kurven $k_0$, $k_1$, $k_2$ .. in $S$ die Schar der unter sich kongruenten Kurven $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ .. in $\Sigma$; und diese Kurven wollen wir die Lagenkurven nennen. Da auch die Schar der Bahnkurven $a$, $b$, $c$ .. in $S$ der Schar der Bahnkurven $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ .. in $\Sigma$ entspricht, so ergeben sich in den Systemen $S$, $\Sigma$ die entsprechenden Netze der Kurven $a$, $b$, $c$ .., $k_0$, $k_1$, $k_2$ .. und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ .., $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ .. mit den entsprechenden Netzpunkten

$$
\begin{array}{lll}
A_0\ A_1\ A_2\ .. & \qquad & \mathsf{A}_0\ \mathsf{A}_1\ \mathsf{A}_2\ .. \\
B_0\ B_1\ B_2\ .. & & \mathsf{B}_0\ \mathsf{B}_1\ \mathsf{B}_2\ .. \\
C_0\ C_1\ C_2\ .. & & \Gamma_0\ \Gamma_1\ \Gamma_2\ .. \\
.\ .\ . & & .\ .\ . \\
.\ .\ . & & .\ .\ .
\end{array}
$$

Die Kurven $a, b, c\, ..,\ k_0, k_1, k_2\, ..$ in $S$ sowie die Kurven $\alpha, \beta, \gamma\, ..,$ $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2\, ..$ in $\Sigma$ können als Parameterlinien oder als krummlinige Koordinaten betrachtet werden. Einer Kurve in $S$, die z. B. durch die Punkte $A_0$, $B_1$, $C_2$ geht, entspricht in dem System $\Sigma$ eine durch die Punkte $\mathsf{A}_0$, $\mathsf{B}_1$, $\Gamma_2$ gehende Kurve.

Die Bahnkurven $a, b, c\, ..$ und $\alpha, \beta, \gamma\, ..$ sind durch die gesetzmäßige Bewegung des System $S$ bestimmt und ihre Verteilung ist durch die Zuordnung der Punkte der angenommenen Kurven $k_s$, $\varkappa_\sigma$ bedingt; und mit diesen Kurven sind die Lagenkurven $k_0, k_1, k_2\, ..$ und $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2\, ..$ gegeben, deren Lagerung durch die angenommenen Bewegungsmomente bestimmt sind.

Wenn wir insbesondere kongruente Kurven $k_s$, $\varkappa_\sigma$ annehmen, die in ihren Anfangslagen $\varkappa_0$, $k_0$ zusammenliegen, und die sich denkenden Punkte dieser Kurven als zugeordnete Punkte betrachten, dann erhalten wir eine spezielle Zuordnung, die wir eine identische Zuordnung nennen. Die speziellste identische Zuordnung ergibt sich, wenn anstatt der Kurven $k_s$, $\varkappa_\sigma$ Gerade angenommen werden.

Die Bewegung des Systems $S$ in dem System $\Sigma$ ist bestimmt, wenn z. B. zwei Kurven $\alpha$, $\beta$ als Bahnkurven der Punkte $A_s$, $B_s$ gegeben sind. Um die so bestimmte Bewegung zu verwirklichen und die Zeichnung in Fig. 1 auszuführen, wird die Kurve $k_s$ mit den Punkten $A_s$, $B_s$, $C_s\, ..$ auf ein durchsichtiges Papierblatt, welches das System $S$ vertritt, gezeichnet. Dann führen wir die Punkte $A_s$, $B_s$ auf den Kurven $\alpha$, $\beta$, markieren auf dem durchsichtigen Papierblatt in verschiedenen Lagen desselben die Punkte, die sich mit den Punkten $\mathsf{A}_\sigma$, $\mathsf{B}_\sigma$, $\Gamma_\sigma\, ..$ der ruhenden Kurve $\varkappa_\sigma$ decken. Durch diese markierten Punkte ergeben sich in $S$ die Bahnkurven $a, b, c\, ..$, die während der Bewegung über die ruhenden Punkte $\mathsf{A}_\sigma$, $\mathsf{B}_\sigma$, $\Gamma_\sigma\, ..$ gleiten.

Zugleich markieren wir in den verschiedenen Lagen vermittelst Stiche durch den Punkt $C_s$ die Punkte, welche die Kurve $\gamma$ in $\Sigma$ bestimmen.

Um die Definition der kinetographischen Verwandtschaft zu verallgemeinern, nehmen wir auch eine mehrdeutige Zuordnung der Punkte auf den Kurven $k_s$, $\varkappa_\sigma$ an; und es kann jedoch auch bei Annahme einer eindeutigen Zuordnung durch den Bewegungsvorgang eine mehrdeutige Zuordnung eintreten. Wenn z. B. die Kurve $k_s$ mit den Punkten $A_s$, $B_s$, $C_s$ . . eine Gerade ist, die von ihrer anfänglichen Lage $\varkappa_0$ aus geht und durch die Bewegung wieder in diese Lage gelangt, aber so, daß die auf der Geraden $\varkappa_0$ liegenden Punkte $\mathsf{A}_0$, $\mathsf{B}_0$, $\Gamma_0$ . ., die sich anfänglich mit den Punkten $A_s$, $B_s$, $C_s$ . . der Geraden $k_s$ decken, nun wieder mit anderen Punkten $A'_s$. $B'_s$, $C'_s$ . . desselben zur Deckung gelangen; dann ergibt sich, daß auf der Geraden $k_s$ die Punkte $A'_s$, $B'_s$, $C'_s$ . . ebenso wie die Punkte $A_s$, $B_s$, $C_s$ . . den Punkten $\mathsf{A}_\sigma$, $\mathsf{B}_\sigma$, $\Gamma_\sigma$ . . der Kurve $\varkappa_\sigma$ zugeordnet sind. Demnach erscheint bei diesem Bewegungsvorgang eine zweideutige Zuordnung und bei Wiederholung desselben eine mehrdeutige. Das Gleiche gilt unter denselben Bedingungen, wenn die Kurve $k_s$ ein Kreis ist.

Wird in jedem der Systeme $S$, $\Sigma$ ein zweckmäßiges Koordinatensystem angenommen, sind ferner die Gleichungen der in dem ruhenden System $\Sigma$ befindlichen Bahnkurven zweier Punkte des bewegten Systems, deren Abstand bekannt ist, gegeben, und ist die Zuordnung der Punkte auf den Kurven $k_s$, $\varkappa_\sigma$ durch Gleichungen bestimmt, so kann man unter günstigen Umständen die allgemeinen Gleichungen ableiten, welche die bestimmenden Beziehungen enthalten. Die Eliminationen zur Erlangung der vier reduzierten Gleichungen der kinetographischen Verwandtschaft sind jedoch nur in geeigneten Fällen ausführbar.

Zu einer kinetographischen Verwandtschaft zweier ebener Systeme $S$, $\Sigma$, in denen sich Punkte entsprechen, ergibt sich durch Dualität eine kinetographische Verwandtschaft zweier ebener Systeme $S$, $\Sigma$, in denen sich Gerade entsprechen, wenn

wir anstatt der zugeordneten Punkte der Kurven $k_s$, $\varkappa_\sigma$ zugeordnete Tangenten dieser Kurven annehmen.

Die Definition der kinetographischen Verwandtschaft ebener Systeme gilt verallgemeinert auch für die kinetographische Verwandtschaft räumlicher Systeme. Bei einer gesetzmäßigen Bewegung eines räumlichen Systems $S$ in einem anderen räumlichen System $\Sigma$, welches wir als ruhend annehmen, beschreibt ein angenommener Punkt $A_s$ des bewegten räumlichen Systems $S$ eine Kurve $\alpha$ in dem ruhenden räumlichen System $\Sigma$, und ferner beschreibt ein angenommener Punkt $\mathsf{A}_\sigma$ des ruhenden räumlichen Systems $\Sigma$ eine Kurve $a$ in dem bewegten räumlichen System $S$. Wenn wir nun den Punkten $A_s$, $B_s$ . . einer in dem bewegten System $S$ gegebene Fläche $k_s$ eindeutig die Punkte $\mathsf{A}_\sigma$, $\mathsf{B}_\sigma$ . . einer in dem ruhenden System $\Sigma$ gegebenen Fläche $\varkappa_\sigma$ zuordnen. so ist dadurch die kinetographische Verwandtschaft der räumlichen Systeme $S$, $\Sigma$ in analoger Weise wie bei den ebenen Systemen definiert. Und durch eine Annahme einer mehrdeutigen Zuordnung der Punkte auf den Flächen $k_s$, $\varkappa_\sigma$ wird diese Verwandtschaft verallgemeinert. Werden anstatt der Punkte auf den Flächen $k_s$, $\varkappa_\sigma$ die Berührungsebenen an denselben zugeordnet, dann ergibt sich eine kinetographische Verwandtschaft zweier räumlicher Systeme $S$, $\Sigma$, in denen sich Ebenen entsprechen.

Durch die kinetographischen Verwandtschaften wird ein Gebiet neuer geometrischer Verwandtschaften eröffnet; denn mit jeder gesetzmäßigen Bewegung eines Systems in einem anderen System nebst einer gesetzmäßigen Zuordnung ist eine kinetographische Verwandtschaft gegeben, die zwar im allgemeinen sehr kompliziert sein wird; aber in besonderen Fällen auch zu manchen interessanten Ergebnissen führen kann.

Im Folgenden wollen wir noch auf einige Beispiele spezieller Bewegungen und spezieller Zuordnungen hinweisen, aus denen mannigfaltige kinetographische Verwandtschaften hervorgehen.

## Beispiele der Bewegungen und der Zuordnungen.

In Fig. 2 wird die Bewegung eines ebenen Systems $S$ in einem anderen ebenen System $\Sigma$ dadurch erzeugt, daß sich zwei Punkte $C_s$, $D_s$ einer Geraden $k_s$ des Systems $S$ auf den senkrechten Geraden $\gamma$, $\delta$ in dem ruhenden System $\Sigma$ bewegen; und ferner ist eine identische Zuordnung der Punkte $A_s$, $B_s$, $C_s$, $D_s$ .. der Geraden $k_s$ und der Punkte $\mathsf{A}_\sigma$, $\mathsf{B}_\sigma$, $\Gamma_\sigma$, $\Delta_\sigma$ .. der Geraden $\varkappa_\sigma$, wobei die zugehörigen Anfangslagen $\varkappa_0$, $k_0$ sich in der Geraden $\delta$ befinden, angenommen. Für verschiedene Bewegungsmomente sind die Lagen $\varkappa_0$ ($\mathsf{A}_0$, $\mathsf{B}_0$, $\Gamma_0$, $\Delta_0$ . .), $\varkappa_1$ ($\mathsf{A}_1$, $\mathsf{B}_1$, $\Gamma_1$, $\Delta_1$ ..), $\varkappa_2$ ($\mathsf{A}_2$, $\mathsf{B}_2$, $\Gamma_2$, $\Delta_2$ ..) der Geraden $k_s$ und die entsprechenden Lagen $k_0$ ($A_0$, $B_0$, $C_0$, $D_0$ . .), $k_1$ ($A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ . .), $k_2$ ($A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$ . .) der Geraden $\varkappa_\sigma$ in der oben angegebenen Weise gezeichnet.

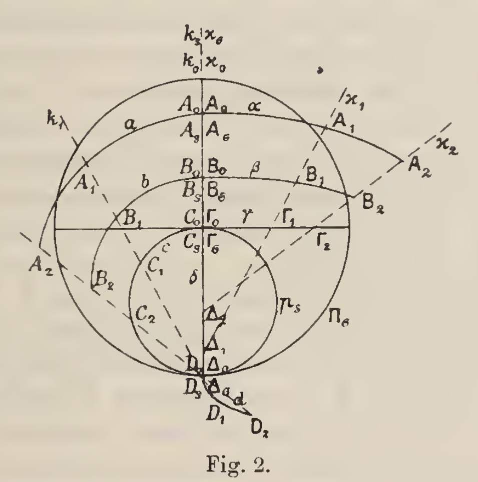



Fig. 2.

Die Punkte $A_s$, $B_s$, $C_s$, $D_s$ .. beschreiben in dem ruhenden System $\Sigma$ die Bahnen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ .., die koaxiale Ellipsen sind, deren Achsen in den Geraden $\gamma$, $\delta$ liegen[1]). Für die Punkte $C_s$, $D_s$ degenerieren die Ellipsen zu Strecken auf den Geraden $\gamma$, $\delta$. Die Punkte $\mathsf{A}_\sigma$, $\mathsf{B}_\sigma$, $\Gamma_\sigma$, $\Delta_\sigma$ .. beschreiben in

[1]) L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik. 1888, S. 37. 41.

dem bewegten System $S$ Bahnen $a$, $b$, $c$, $d$ . ., die allgemeine Kardioiden (Pascalsche Kurven) sind und für die der Punkt $D_0$ ein gemeinsamer Doppelpunkt ist. Für den Punkt $\Gamma_6$ degeneriert die Kardioide $c$ zu einem Kreis und für den Punkt $\Delta_6$ ist die Bahn eine gespitzte Kardioide $d$. Die Geraden $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ sind Tangenten einer vierspitzigen Hypotrochoide[1]), die auch Astroide genannt wird; und die Geraden $k_0$, $k_1$, $k_2$ sind Strahlen eines Strahlenbüschels, dessen Mittelpunkt $D_0$ ist. Hieraus ergibt sich eine zwei-vierdeutige kinetographische Verwandtschaft der Ebenen System $\Sigma$, $S$, d. h. einem Punkt in $S$ entsprechen zwei Punkte in $\Sigma$ und einem Punkt in $\Sigma$ entsprechen vier Punkte in $S$.

Bei dieser Bewegung rollt der über $C_s\,D_s$ als Durchmesser beschriebene Kreis $p_s$ des Systems $S$, der mit dem Kreis $c$ identisch ist, innerhalb eines doppelt so großen Kreises $\pi_6$[2]). Wir können auch für jene Kurven $k_s$. $\varkappa_6$ die Kreise $p_s$, $\pi_6$ annehmen, und können die Punkte des rollenden Kreises $p_s$ und die Punkte des ruhenden Kreises $\pi_6$, die in Berührung kommen als zugeordnete Punkte betrachten; dann sind jedem Punkt des rollenden Kreises $p_s$ zwei Punkte des ruhenden Kreises $\pi_6$ zugeordnet, weil jeder Punkt des Kreises $p_s$ bei einer ganzen Umrollung an den Kreis $\pi_6$ zweimal mit denselben in Berührung tritt.

Bei dieser Bewegung sind in dem System $\Sigma$ die Bahnen der Punkte des rollenden Kreises $p_s$ Durchmesser des Kreises $\pi_6$, und ferner sind in dem bewegten System $S$ die Bahnen der Punkte des ruhenden Kreises $\pi_6$ gespitzte Kardioiden.

Wenn ein Kreis $p_s$ innerhalb oder außerhalb an einem Kreis $\pi_6$ rollt, deren Radien in einem rationalen Verhältnis stehen, und eine identische Zuordnung der Punkte auf einer zentralen Geraden angenommen wird, dann erhalten wir eine kinetographische Verwandtschaft, bei der in beiden Systemen die Bahnkurven geschlossene Trochoiden und die Lagen der Geraden, Tangenten an gespitzten Trochoiden sind[3]). Ferner

---

[1]) A. a. O. S. 185. [2]) A. a. O. S. 37. [3]) A. a. O. S. 157.

können wir auch die Berührungspunkte der Kreise $p_s$, $\pi_\sigma$ als zugeordnete Punkte betrachten, dann sind die Bahnkurven in beiden Systemen gespitzte geschlossene Trochoiden.

Wenn insbesondere ein Kreis auf einem gleich großen anderen Kreis rollt, so ist die Zuordnung der Berührungspunkte eindeutig, und alle Bahnen sind kongruente gespitzte Kardioiden.

Die durch die Rollung eines Kreises auf einen anderen und durch die Zuordnung der Berührungspunkte bestimmte, kinetographisch verwandten Systemen sind von je zwei konzentrischen Kreisen begrenzt und demnach ringförmige Felder. Ist der eine Kreis z. B. der ruhende unendlich groß; rollt also ein Kreis auf einer Geraden, dann ist das Feld des ruhenden Systems zwischen dieser Geraden und der zu ihr parallelen Tangente dieses Kreises eingeschlossen, aber das Feld des bewegten Systems erstreckt sich ins Unendliche und wird einerseits nur von dem rollenden Kreis begrenzt. In diesem Fall sind die Bahnen in dem ruhenden System kongruente gespitzte Zykloiden und in dem bewegten System kongruente gespitzte Kreisevolventen.

Durch verschiedene Zuordnungen können bei einer Bewegung eines Systems mannigfaltige kinetographische Verwandtschaften entstehen. So z. B. in dem einfachen Fall, wenn sich das bewegte System um einen Punkt dreht, und auf einer durch ihn gehenden Geraden eine identische Zuordnung angenommen wird; dann sind die kinetographisch verwandten Systeme symmetrisch kongruente Systeme, werden aber die entsprechenden Punkte zweier kongruenter, zweier ähnlicher oder zweier projektiver Punktreihen als zugeordnete Punkte angenommen, so ergeben sich komplizierte kinetographisch verwandte Systeme.

Wir wollen ferner auf einige Beispiele der Bewegungen eines ebenen Systems bei einfachen Getrieben und auch auf einfache Zuordnungen hinweisen.

Bei einem Kurbelgetriebe in Fig. 3 bewegen sich die Koppelpunkte $F_s$, $L_s$ auf den Kreisen $\varphi$, $\lambda$, deren Mittelpunkte $\Phi_\sigma$, $\Lambda_\sigma$ sind; und werden je zwei entsprechende Punkte der ähnlichen Punktreihen $F_s$, $L_s \dots$ und $\Phi_\sigma$, $\Lambda_\sigma \dots$ als zugeordnete

Punkte angenommen, dann sind die Bahnen in beiden Systemen symmetrische Kurven sechster Ordnung resp. in bezug auf $F_s, L_s$ und $\Phi_\sigma \Lambda_\sigma$ als Symmetralgeraden.

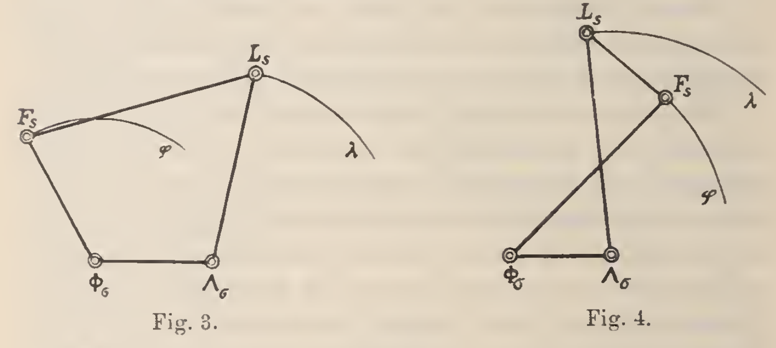



Fig. 3. Fig. 4.

Wenn insbesonders, wie in Fig. 4 bei einem Zwillingskurbelgetriebe $F_s L_s = \Phi_\sigma \Lambda_\sigma$, $\Phi_\sigma F_s = \Lambda_\sigma L_s$ ist, und die entsprechenden Punkte der kongruenten Punktreihen $F_s, L_s$.. und $\Phi_\sigma, \Lambda_\sigma$.. zugeordnete Punkte sind, dann sind die Bahnen symmetrische Kurven vierter Ordnung resp. in bezug auf $F_s L_s$, $\Phi_\sigma \Lambda_\sigma$ als Symmetralgeraden. Diese Kurven sind Fußpunktenkurven einer Ellipse oder einer Hyperbel, je nachdem die Koppel $F_s L_s$ oder der Steg $\Phi_\sigma \Lambda_\sigma$ kürzer oder länger als die Kurbelarme $\Phi_\sigma F_s$, $\Lambda_\sigma L_s$ ist. Dies ergibt sich, weil bei dieser Bewegung des Systems $S$ ein Kegelschnitt, dessen Brennpunkte $F_s, L_s$ sind und deren Hauptachse gleich der Länge der Kurbelarme ist, auf einem kongruenten Kegelschnitt rollt, dessen Brennpunkte $\Phi_\sigma$, $\Delta_\sigma$ sind, so daß symmetrische Punkte dieser Kegelschnitte in Berührung kommen[1]).

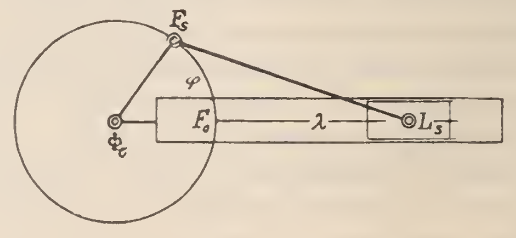



Fig. 5.

[1]) A. a. O. S. 303. 304.

Bei dem zentrischen Schubkurbelgetriebe in Fig. 5 bewegt sich der Koppelpunkt $F_s$ auf einem Kreis $\varphi$, dessen Mittelpunkt $\Phi_\sigma$ ist, und der Koppelpunkt $L_s$ auf einer Geraden $\lambda$, die durch den Mittelpunkt $\Phi_\sigma$ geht. Die entsprechenden Punkte der auf den Geraden $F_s\, L_s$ und $\Phi_\sigma\, \lambda$ liegenden kongruenten Punktreihen $F_s$.. und $\Phi_\sigma$.. betrachten wir als zugeordnete Punkte. Dann sind die Bahnen der auf $F_s\, L_s$ liegenden Punkte symmetrische Kurven vierter Ordnung in bezug auf $\Phi_\sigma\, \lambda$ als Symmetralgerade und die Bahnen der auf $\Phi_\sigma\, \lambda$ liegende Punkte symmetrische Kurven sechster Ordnung (Kreiskonchoiden) in bezug auf $F_s\, L_s$ als Symmetralgerade[1]). Ferner können wir auch die entsprechenden Punkte der auf $F_s\, L_s$ und $F_0\, \lambda$ liegenden kongruenten Punktreihen $F_s$.. und $F_0$.. als zugeordnete Punkte annehmen; und wenn dann insbesondere die Koppel gleich dem Kurbelarm, also $F_s\, L_s = \Phi_\sigma\, F_s$ ist, so ergibt sich in diesem speziellen Fall die S. 24 genannte zwei-vierdeutige kinetographische Verwandtschaft.

Jede gesetzmäßige Bewegung eines ebenen Systems $S$ in einem anderen System $\Sigma$ kann auch durch Rollung einer Kurve $p_s$ des Systems $S$ auf einer Kurve $\pi_\sigma$ des Systems $\Sigma$ erzeugt werden[2]). Diese Kurven, die Rollkurven oder Polbahnen heißen, sind aber oft sehr komplizierte Kurven, z. B. bei dem Kurbelgetriebe von achter Ordnung, und kommen hauptsächlich dann in Betracht, wenn sie als Kreise auftreten.

Zu den angeführten Beispielen ergeben sich Analogien für die Bewegungen eines räumlichen Systems $S^r$ in einem anderen räumlichen System $\Sigma^\varrho$. Betrachten wir die ebenen Systeme $S$, $\Sigma$ resp. als zu den räumlichen Systemen $S^r$, $\Sigma^\varrho$ gehörend, und die Rollkurven $p_s$, $\pi_\sigma$ als Leitkurven zweier Zylinderflächen $p_s^r$, $\pi_\sigma^\varrho$, die auf der Ebene der Systeme $S$, $\Sigma$ senkrecht stehen, so kann eine Bewegung des räumlichen Systems $S^r$ in dem ruhenden System $\Sigma^\varrho$ durch die Rollung der Zylinderfläche $p_s^r$ auf der Zylinderfläche $\pi_\sigma^\varrho$ erzeugt werden. Eine solche Bewegung des räumlichen System $S^r$ in dem

---

1) A. a. O. S. 327. 329. 2) A. a. O. S. 32.

anderen räumlichen System $\Sigma^{\varrho}$ wird eine zylindrische Rollung genannt[1]). Bei derselben bewegen sich die Punkte des einen Systems in parallelen Ebenen des anderen Systems, und die Punkte in einer auf diesen Ebenen senkrechten Geraden des einen Systems beschreiben kongruente Kurven in dem anderen System.

Als Beispiel einer zylindrischen Rollung nehmen wir das Analogon zu der in Fig. 2 betrachteten Bewegung. Demnach rollt eine Kreiszylinderfläche $p_s^r$ innerhalb an einer doppelt so großen Kreiszylinderfläche $\pi_\sigma^\varrho$, dann sind die Bahnen der Punkte des bewegten räumlichen Systems $S^r$ in dem ruhenden räumlichen System $\Sigma^{\varrho}$ Ellipsen, deren Mittelpunkte in der Achse Kreiszylinderfläche $\pi_\sigma^\varrho$ liegen. Für die Punkte der rollenden Kreiszylinderfläche $p_s^r$ degenerieren die Ellipsen zu Durchmessern der Kreiszylinderfläche $\pi_\sigma^\varrho$. Ferner sind die Bahnen der Punkte des ruhenden räumlichen Systems $\Sigma^{\varrho}$ in bezug auf das bewegte räumliche System $S^r$ allgemeine Kardioiden, die für die Punkte der Kreiszylinderfläche $\pi_\sigma^\varrho$ in gespitzte Kardioiden übergehen. Bei gleichförmigem Rollen der Kreiszylinderfläche $p_s^r$ heißt die Rollung eine harmonische Rollung.

Wird nun eine identische Zuordnung der Punkte auf einer durch die Achsen der beiden Kreiszylinderflächen $p_s^r$, $\pi_\sigma^\varrho$ gehenden Ebene angenommen, so ergibt sich ebenso wie S. 24 bei den ebenen Systemen $\Sigma$, $S$ in Fig. 2 eine zwei-vierdeutige kinetographische Verwandtschaft der räumlichen Systeme $\Sigma^{\varrho}$, $S^r$. Denn bei jeder zylindrischen Rollung mit einer Zuordnung der Punkte auf Zylinderflächen oder Ebenen, die parallel sind zu den Rollzylinderflächen, ist durch die kinetographische Verwandtschaft der ebenen Systeme $\Sigma$, $S$ auch die kinetographische Verwandtschaft der räumlichen Systeme $\Sigma^{\varrho}$, $S^r$ gegeben.

Werden den Punkten der rollenden Kreiszylinderfläche $p_s^r$ die Punktpaare der ruhenden Kreiszylinderfläche $\pi_\sigma^\varrho$ zugeordnet,

[1]) L. Burmester, Kinematische Flächenerzeugung vermittelst zylindrischer Rollung. Zeitschr. f. Mathematik u. Physik, 1888, B. 33, S. 337.

mit denen sie in Berührung kommen, dann erhalten wir eine kinetographische Verwandtschaft der räumlichen Systeme $\Sigma^{\varrho}$, $S^{r}$, bei der das Raumgebiet in $\Sigma^{\varrho}$ von der Kreiszylinderfläche $\pi_{0}^{\varrho}$ umgrenzt wird, und das Raumgebiet in $S^{r}$ zwischen der Kreiszylinderfläche $p_{s}^{r}$ und der koaxialen Kreiszylinderfläche mit dreimal größeren Durchmesser eingeschlossen ist.

Nehmen wir an, daß die Kreiszylinderfläche $p_{s}^{r}$ während ihrer harmonischen Rollung eine harmonische Schwingung längs den Mantellinien der Kreiszylinderfläche $\pi_{0}^{\varrho}$ vollzieht, so daß die Schwingungszeit zu der Umrollungszeit in einem bestimmten rationalen Verhältnis $n$ steht, dann ergibt sich eine Bewegung die harmonische zylindrische Schrotung heißt. Je nachdem wir das Verhältnis $n$ und die Phasendifferenz zwischen der harmonischen Rollung und der harmonischen Schwingung wählen, gehen bei einer angenommenen Zuordnung mannigfaltige kinetographische Verwandtschaften der räumlichen Systeme $S^{r}$, $\Sigma^{\varrho}$ aus der harmonischen zylindrischen Schrotung hervor. Bei derselben sind die Bahnen aller Punkte der schrotenden Kreiszylinderfläche $p_{s}^{r}$ Lissajoussche Kurven in Ebenen, die durch die Achse der ruhenden Kreiszylinderfläche $\pi_{0}^{\varrho}$ gehen.

Wenn insbesondere $n = 1$ ist, dann sind die Bahnen der Punkte des Systems $S^{r}$ in bezug auf das System $\Sigma^{\varrho}$ Ellipsen, deren Mittelpunkte in der Achse der Kreiszylinderfläche $\pi_{0}^{\varrho}$ liegen. Dieser spezieller Fall der harmonischen zylindrischen Schrotung, der bezüglich der Bewegungsvorgänge und der Bahnkurven untersucht wurde[1]), führt zu einer interessanten kinetographischen Verwandtschaft der räumlichen Systeme $\Sigma^{\varrho}$, $S^{r}$, wenn eine identische Zuordnung der Punkte in der durch die Achsen der beiden Kreiszylinderflächen gehen-

[1]) Vgl. L. Burmester, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1888, B. 33, S. 347. — A. Mannheim, Journal de l'École polytechnique, 1890, 60. cahier, p. 75. — G. Darboux, Note III. in G. Koenigs, Leçons de Cinématique, 1897, p. 352. — A. Grünwald, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1907, B. 54, S. 154.

den Ebene angenommen wird. Diese kinetographische Verwandtschaft kann gleichsam als aus zwei kinetographischen Verwandtschaften zusammengesetzt betrachtet werden. Die zu den Mantellinien der Kreiszylinderflächen parallelen Geraden, die sich in den kinetographisch verwandten räumlichen Systemen $\Sigma^{\varrho}$, $S^{r}$ entsprechen, schneiden eine zu diesen Mantellinien senkrechte Ebene in entsprechenden Punkten der S. 24 genannten zwei-vierdeutigen kinetographischen Verwandtschaft der ebenen Systeme $\Sigma$, $S$; und auf den entsprechenden Geraden werden die entsprechende Punkte durch die kinetographische Verwandtschaft bestimmt, welche ohne Rollung aus der harmonischen Schwingung bei zugehöriger Zuordnung hervorgeht.

Aus dieser harmonischen zylindrischen Schrotung ergeben sich ferner noch besondere kinetographische Verwandtschaften der räumlichen Systeme, wenn den Punkten der schrotenden Kreiszylinderfläche $p^{r}_{s}$ die Punktpaare der ruhenden Kreiszylinderfläche $\pi^{\varrho}_{\sigma}$ zugeordnet werden, mit denen sie in Berührung kommen, und wenn eine identische Zuordnung der Punkte in einer zu diesen Kreiszylinderflächen senkrechten Ebene angenommen wird.

Aus der Schraubung eines räumlichen Systems und deren beiden Spezialfällen, der Drehung sowie der geradlinigen Verschiebung ergeben sich bei identischen Zuordnungen involutorische kinetographische Verwandtschaften zweier räumlicher Systeme $S^{r}$, $\Sigma^{\varrho}$, in denen sich also die Punkte wechselweise entsprechen.

Bei der Schraubung sind die Bahnen der Punkte in jedem der Systeme $S^{r}$, $\Sigma^{\varrho}$ koaxiale Schraubenlinien mit gleicher Ganghöhe. Die entsprechenden Bahnen je zweier identisch zugeordneter Punkte fallen in einer Schraubenlinie zusammen und auf derselben entsprechen sich die Punkte der Systeme $S^{r}$, $\Sigma^{\varrho}$ involutorisch; denn diese Punkte befinden sich beiderseits von der gemeinsamen Anfangslage der beiden zugeordneten Punkte in gleichen Abständen auf der Schraubenlinie.

Werden die Punkte einer beliebig gegen die Schraubenachse geneigten Zuordnungsebene als identisch zugeordnet an-

genommen, so ist dadurch eine involutorische kinetographische Verwandtschaft der räumlichen Systeme $S^r$, $\Sigma^\varrho$ bestimmt. Die Bahnen je zwei zugeordneter Punkte auf einer in der Zuordnungsebene liegenden Geraden sind Schraubenlinien auf der von dieser Geraden erzeugten Regelschraubenfläche, die in den beiden räumlichen Systemen eine selbstentsprechende Fläche ist. Demnach bilden auf einer solchen Regelschraubenfläche die entsprechenden Punkte in ihrer Gesamtheit zwei involutorisch kinetographisch verwandte Flächensysteme.

In dem Spezialfalle, wenn die Ganghöhe der Schraubung gleich null ist, geht die Schraubung in Drehung über, und die Bahnen der Punkte sind in beiden Systemen Kreise, deren Mittelpunkte in der Drehachse liegen. Aus der Drehung und der angenommen identischen Zuordnung ergibt sich dann eine spezielle, involutorische kinetographische Verwandtschaft der räumlichen Systeme $S^r$, $\Sigma^\varrho$. Denn jene Regelschraubenfläche degeneriert zu einem einschaligen Drehungshyperboloid, welches in eine Drehungskegelfläche oder in eine Ebene ausartet, je nachdem die in der Zuordnungsebene liegende Gerade die Drehachse schneidet, oder sich zu derselben in einer senkrechten Lage befindet.

Bei der Schraubung ergeben sich ferner spezielle involutorische kinetographische Verwandtschaften, wenn die Zuordnungsebene entweder durch die Schraubenachse, parallel zu ihr oder senkrecht zu ihr gelegt wird; und ferner bei der Drehung, wenn die Zuordnungsebene durch die Drehachse gehend oder zu ihr parallel angenommen wird.

Die Schraubung geht, wenn ihre Ganghöhe unendlich groß ist, in eine geradlinige Verschiebung über. In diesen speziellen Fall sind die involutorisch kinetographischen verwandten Systeme $S^r$, $\Sigma^\varrho$ involutorisch affine räumliche Systeme, bei denen, wenn $S^r$ die Anfangslage erhält, die Zuordnungsebene die Affinitätsebene ist. Wenn insbesondere die Zuordnungsebene senkrecht zu der Richtung der Verschiebung steht, dann sind diese Systeme symmetrisch kongruent und die Zuordnungsebene ist die Symmetralebene derselben.

Werden anstatt der identischen Zuordnung der Punkte in der Zuordnungsebene die allgemeineren eindeutigen Zuordnungen, Kongruenz, Ähnlichkeit, Affinität oder Kollineation angenommen, so ergeben sich aus den drei betrachteten Bewegungsarten allgemeinere kinetographische Verwandtschaften der räumlichen Systeme $S^r$, $\Sigma^\varrho$. In dem einfachen Fall der geradlinigen Verschiebung und der kollinearen Zuordnung ist die kinetographische Verwandtschaft der räumlichen Systeme eine spezielle Verwandtschaft zweiten Grades.

---

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 2. März 1907.

1. Herr Hermann Ebert legte vor:

a) Eine Arbeit des Herrn Professor Max Thomas Edelmann an der technischen Hochschule dahier: „Über ein neues Aspirations-Hygrometer.“

Das Instrument ist als Basisinstrument für Stationen zur Aichung anderer Hygro- und Psychrometer bestimmt. In ein Gefäß wird eine Probe der auf ihren Feuchtigkeitsgehalt zu prüfenden Luft eingesogen, der Wasserdampf wird (ohne Änderung des Volumens) mittels Schwefelsäure entfernt. Ein am Apparate befestigtes Manometer gestattet dann unmittelbar die Spannkraft des Dampfes, beigegebene Tabellen die relative Feuchtigkeit zu bestimmen.

b) Eine Mitteilung des Herrn Dr. K. Lutz: „Über ein Saitenelektrometer.“

Ein sehr dünner Metalldraht ist zwischen zwei länglichen verstellbaren Platten ausgespannt, welche durch eine kleine Akkumulatorenbatterie geladen werden können. Wird der Draht, die „Saite“ mit einer Elektrizitätsquelle verbunden, so zeigt die mittels eines Mikroskopes mit Okularteilung gemessene Ausbiegung der Saite die Spannung derselben an. Durch eine Reihe von Kurven wird der Meßbereich und die Empfindlichkeit bei verschiedenen Schaltungen erläutert.

2. Herr Aurel Voss berichtet über eine Arbeit: „Konforme Transformation und Krümmung."

Bei jeder Punkttransformation der Ebene findet eine nur von der Tangentenrichtung abhängige Beziehung zwischen den Krümmungen entsprechender Kurven statt. Einen besonders einfachen Charakter erhält dieselbe für die konformen Transformationen, die in Bezug auf die vorliegende Frage für die Ebene und für krumme Flächen, schließlich auch für den Raum untersucht werden.

# Neues Absorptions-Hygrometer.

Von **M. Th. Edelmann.**

*(Eingelaufen 7. März 1907.)*

Im Jahre 1879[1]) habe ich einen einfachen Apparat angegeben, in welchem man einer Luftprobe ohne Volumveränderung Schwefelsäure zusetzen kann. Die Säure absorbiert den Wasserdampf, worauf der Druck um jenen Betrag sinkt, den vorher der Wasserdampf ausgeübt hat. Ein einfaches Quecksilbermanometer, von dem der eine Schenkel mit der

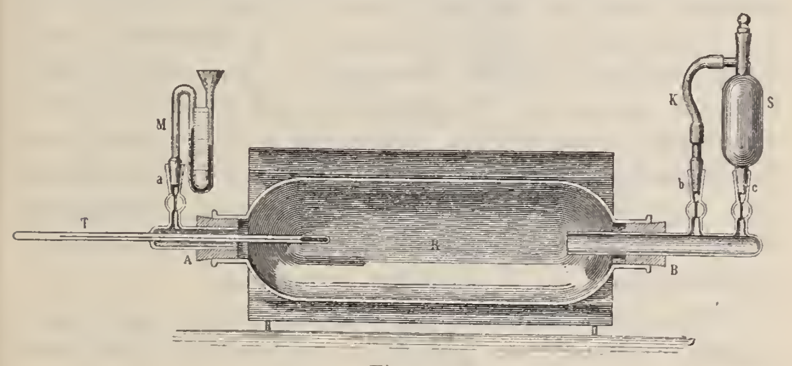



Fig. 1.

Atmosphäre, der andere mit dem die Luftprobe enthaltenden Gefäße kommuniziert, läßt in Millimetern Quecksilber den Dampfdruck erkennen. Für die Einrichtung des Apparates war die folgende Form vorgeschlagen.

Mit dem durch doppelten Blechmantel wärmeisolierten Glasgefäß $R$ (Fig. 1) kommunizieren durch konische Glasschliffe

[1]) Meteorolog. Zeitschr. XIV, p. 54. Wiedemann, Ann. 1878, VI, 455.

und drei Glashähne *a b c* das Quecksilbermanometer *M*, der Kautschukschlauch *K* und das Glasgefäß *S*. Bevor *M K S* eingesetzt werden, füllt man das vor jedem Versuche sorgfältig gereinigte und getrocknete Gefäß *R* durch Einsaugen mit Luft vom Beobachtungsorte, schließt die Hähne, setzt *M K S* auf, füllt *S* mit Schwefelsäure und setzt dann den Glasstöpsel über *S*. Nun öffnet man alle Hähne, worauf sich die Schwefelsäure ins Innere von *R* ergießt und zwar ohne Volumveränderung, weil die von der Schwefelsäure verdrängte Luftmenge durch *K* hindurch in *S* Platz nimmt. Wegen der großen Oberfläche, die nun die Schwefelsäure erhält, absorbiert dieselbe fast momentan allen Wasserdampf; das Monometer stellt sich sofort auf den Dampfdruck ein. Das Thermometer *T* gibt die Temperatur im Innern von *R* an.[1])

Dieses Instrument (und seine Varianten), welches anfänglich behufs Konstantenbestimmung anderer Hygrometer häufig angewendet wurde, ist indessen wegen der Umständlichkeit, die mit der gewissenhaften Reinigung und Austrocknung nach jedem einzelnen Versuche verknüpft ist, bald wieder außer Gebrauch gekommen. Vor kurzer Zeit ist jedoch eine Neukonstruktion erzielt worden, welche eine beliebige Anzahl von Feuchtigkeitsbestimmungen zuläßt, ohne daß eine Reinigung und Austrocknung vorgenommen werden muß. Beifolgende Konstruktionsskizze (Fig. 2) soll dazu dienen, die Einrichtung und Behandlung des Instrumentes darzustellen.

Ein weites Glasrohr *G* ist oben und unten durch zwei aufgekittete Metalldeckel geschlossen, wodurch ein luftdichtes

[1]) Später haben Rüdorff und Schwackhöfer das Konstruktionsprinzip, welches im Austausch der Schwefelsäure in Gefäß *S* (Fig. 1) gegen Luft durch den Schlauch *R* liegt und die Konstanz des Volumens beim Einströmen der Säure verbürgt, verwendet und die Form des Apparates vereinfacht. Vgl. Die Methoden und Instrumente der Feuchtigkeitsbestimmung von Dr. O. Steffens in der Zeitschrift „Der Mechaniker" XIV, p. 223, Fig. 172 und 173. In dem ersten Rüdorffschen Apparate (Chem. Nachr. XIII, p. 149) ist 1880 die Austausch-Pipette noch nicht verwendet.

Gefäß von etwa einem Liter Inhalt zur Aufnahme der zu untersuchenden Luftprobe gebildet wird; dieses Gefäß steht auf dem Dreifuß *DD*. In den unteren Metalldeckel *N* ist ein

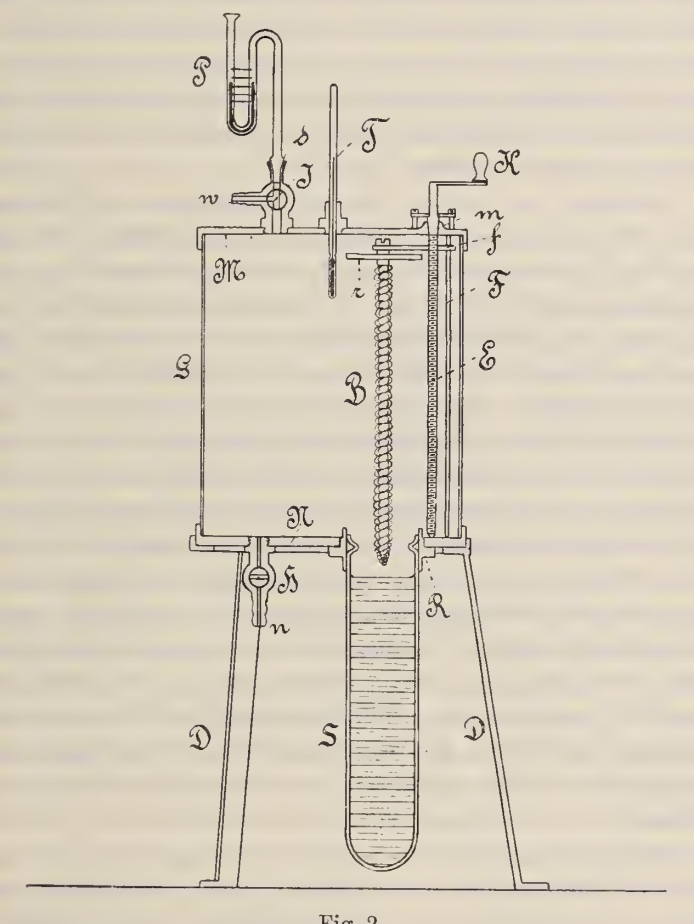



Fig. 2.

Gashahn *H* mit einfacher Bohrung und Schlauchansatz *n*, sowie ein Rohrstutzen *R* luftdicht eingeschraubt. In diesem Rohrstutzen *R*, an seinem oberen in das Gefäß *G* hineinragenden Rande sorgfältig ebengeschliffen, ist ein längliches Glasrohr *S*

eingekittet, welches die zur Austrocknung der Luft dienende Schwefelsäure aufnimmt.

Auf dem oberen Metalldeckel *M* sitzt ein Dreiweghahn *J*, welcher nach Belieben die Kommunikation zwischen dem Gefäße *G*, einem Schlauchansatz *w*, sowie dem Quecksilbermanometer *P* besorgt, welch' letzteres (vermittelst konischen Schliffes *d* in das Hahnstück eingesetzt) an einer Millimeterskala die zwischen dem Gefäßinnern und der Atmosphäre beruhende Luftdrucks-Differenz ablesen läßt.

Außerdem ist in dem oberen Metalldeckel ein Thermometer *T* eingesetzt und ein Konus *m* eingeschliffen, der sich nach oben in die Kurbel *K*, nach unten in die schnellgängige Schraubenspindel *E* fortsetzt. Dreht man an der Kurbel, so kann man vermittelst der Schraube *E* (an der Stange *F* geführt) das Metallstück *f* im Innern des Gefäßes *G* hoch und niedrig einstellen. Schraubt man *f* ganz herunter, so legt sich der auf seiner Unterseite ebengeschliffene Deckel *r* auf den gleichfalls ebengeschliffenen Rand des Rohrstutzens *R* luftdicht auf; die an dem Deckel *r* hängende Glasspirale *B* taucht tief in die Schwefelsäure *S*. Schraubt man nunmehr in verkehrter Richtung, so bringt man schließlich die Glasspirale *B*, welche mit Schwefelsäure benetzt ist und an welcher wegen ihrer großen Oberfläche viel Schwefelsäure hängen bleibt, ohne Volumveränderung in den Bereich der auf ihren Dampfgehalt zu prüfenden Luft: die Feuchtigkeit wird sehr schnell absorbiert, ihr Druck am Manometer *P* und die Temperatur am Thermometer *T* abgelesen; diese Arbeit erfordert etwa drei Minuten.

Schraubt man nun die Glasspirale wieder herab, bis der Deckel *r* schließt, so ist der Raum *G* nach dem Öffnen der Hähne zur Aufnahme einer neuen Luftprobe durch Ansaugen vermittelst eines Gummiball-Saugers wieder bereit.

Sollte nach vielen Bestimmungen die Schwefelsäure an ihrer Absorptionsfähigkeit verloren haben, dann wird das Gefäß *S* nach unten abgeschraubt und vermittelst einer Pipette die verbrauchte Säure durch frische ersetzt.

Die Verwendung des Apparates empfiehlt sich aus folgenden Gründen. Die Resultate sind bei allen Temperaturen vollkommen zuverlässig und mit Aufwand von sehr wenig Zeit und Mühe zu gewinnen. Der Ort für die Aufstellung des Apparates ist unabhängig vom Orte der Entnahme der Luftprobe; diese kann durch eine Schlauchleitung dem Apparate zugeführt werden, wobei jedoch selbstverständlich die wegen Temperaturdifferenz beider Orte nötige Korrektion zu berücksichtigen ist, wofür im weiteren Verlaufe dieser Abhandlung eine Tabelle angefügt ist.

Rücksichtlich des Gebrauches des Apparates sind noch folgende Bemerkungen anzufügen. Von großer Wichtigkeit ist die Konstanterhaltung resp. genaue Berücksichtigung der Temperatur im Inneren des Absorptionsgefäßes $G$ (Fig. 2) während der Feuchtigkeitsbestimmung, da durch Temperaturveränderungen der Stand des Manometers stark beeinflußt wird; es wird z. B. bei mittlerem Barometerstand durch eine Temperaturänderung um $1^0$ C. eine solche des Manometers um 2,79 mm hervorgebracht. Man hat also alle Veranlassung, das Absorptionsgefäß durch Umhüllung mit wärmeisolierenden Substanzen etc. vor äußerlichen Wärmeeinflüssen sorgfältigst zu schützen und ferner im Inneren des Absorptionsgefäßes ein genügend empfindliches Thermometer zu verwenden. Wenn man Feuchtigkeitsbestimmungen mit der Genauigkeit von 1 Prozent erreichen will, muß die Temperatur ebenfalls wenigstens auf 1 Prozent genau beobachtet werden. Sollte sich vom Augenblicke ab, in welchem durch Schließen der Hähne der Druckausgleich zwischen dem Inneren des Absorptionsgefäßes und der äußeren Atmosphäre aufgehoben wurde, eine Temperaturveränderung ergeben, so kann man bezüglich der nötigen Korrektion die folgende Tabelle I benützen:

**Tabelle I.**

| mm | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30⁰ C. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 740 | 0,136 | 0,272 | 0,407 | 0,544 | 0,680 | 0,816 |
| 750 | 0,137 | 0,275 | 0,413 | 0,550 | 0,688 | 0,825 |
| 760 | 0,140 | 0,279 | 0,419 | 0,558 | 0,698 | 0,837 |
| 770 | 0,142 | 0,283 | 0,425 | 0,566 | 0,708 | 0,849 |

In dieser Tabelle stehen in horizontaler Flucht nebeneinander (für die Barometerstände 740 bis 770 mm berechnet die Zahlen, um welche die Manometerablesungen zu verkleinern resp. zu vergrößern sind, wenn die Temperatur um 0,05, 0,10 . . . Grade Celsius während der Feuchtigkeitsbestimmung im Absorptionsgefäß zugenommen resp. abgenommen hat. War z. B. durch die Wirkung der Schwefelsäure eine Druckdifferenz am Manometer von 6 mm hervorgebracht, jedoch währenddessen bei 750 mm Barometerstand eine Temperaturzunahme von 0,25° C. am Thermometer $T$ (Fig. 2) beobachtet worden, so würde als absolute Feuchtigkeit der Luft ein Dampfdruck von 6 — 0,688 mm Quecksilber einzusetzen sein.

Übrigens kann man sich auf sehr einfache Weise gegen die Temperatureinflüsse auf das Messungsresultat schützen.[1]) Zu diesem Zwecke ist dem Apparate ein kurzes Glasrohr beigegeben, welches vermittelst konischen Schliffes in das oberste freie Ende des Manometers $P$ (Fig. 2) eingesetzt werden kann. Vermittelst dieses Glasröhrchens und eines an dasselbe gesteckten Gummischlauches setzt man den sonst mit der freien Atmosphäre kommunizierenden Schenkel des Manometers nunmehr mit dem Inneren eines (gleichfalls dem Apparat beigegebenen) Glasgefäßes in Kommunikation, welches Gefäß in Form, Inhalt und Umhüllung dem Absorptionsgefäß ungefähr gleichkommt und neben diesem aufgestellt wird. Es wirkt dann auf die Einstellung des Manometers nicht mehr die Druckdifferenz zwischen der ausgetrockneten Luftprobe und der freien Atmosphäre, sondern lediglich die Druckdifferenz zwischen beiden Gefäßen, für welche gleiche Temperaturbeeinflussung anzunehmen ist. In der Behandlung des solcherweise ergänzten Apparates ändert sich selbstverständlich gegen früher nur, daß man das erwähnte Verbindungsröhrchen während der Feuchtigkeitsbestimmung auf das Manometer zu stecken hat.

[1]) Diese Einrichtung wurde meines Erachtens zuerst von Wolpert angegeben, „Der Mechaniker" XIV, p. 224, und zwar zur Vermeidung des Einflusses von Barometerschwankungen.

Bei niedrigen Temperaturen wird die Ablesung des Quecksilbermanometers wegen der Kleinheit der Druckdifferenzen unsicher. In diesem Falle benützt man als Füllflüssigkeit für das Manometer Glyzerin oder Petroleum von bekanntem spezifischen Gewichte. Am einfachsten wird natürlich die Arbeit, insbesondere wegen Benützung der am Schlusse angefügten Tabelle III, wenn man sich eine Tabelle herstellt, in welcher die möglichen Ablesungen an der Füllflüssigkeit den zugehörigen Quecksilberdrucken gegenüberstehen.

Wenn dem Absorptions-Hygrometer die Luftprobe durch eine Schlauchleitung von einem entfernten Orte zugeführt wird, und die Temperatur des Hygrometergefäßes sich um $t^0$ C. von der Temperatur des Ortes unterscheidet, dem die Luftprobe entnommen wurde und für welchen die Feuchtigkeitsbestimmung gelten soll, dann sind die am Hygrometer abgelesenen Drucke zu korrigieren; dies geschieht mit Hilfe der Tabelle II, in welcher im Schnittpunkt für die Temperaturdifferenz (vertikale Reihen) und abgelesenen Drucke (horizontale Reihen) jene Zahl zu finden ist, die man vom abgelesenen Werte abzuziehen resp. im Falle die Außentemperatur die höhere ist, zuzuzählen hat, um den gesuchten Dampfdruck anzugeben. Die Tabelle ist berechnet bis zu Drucken von 30 mm und Temperaturdifferenzen bis zu 20° C. Wäre z. B. im Inneren des Hygrometers 8° C., am Orte des Schlauchendes — 2° C. beobachtet worden und hätte das Manometer 9 mm gezeigt, so ist für die Temperaturdifferenz 10° die Korrektionsziffer — 0,33 mm.

Es geschieht sehr häufig, daß man den Dampfgehalt der Luft in Prozenten jener Wassermenge angibt, welche die Atmosphäre bei der beobachteten Temperatur ad maximum enthalten könnte (relative Feuchtigkeit). Die Tabelle III gibt nun für Temperaturen zwischen — 20° C. und + 30° C., sowie relative Feuchtigkeit von 0 bis 100 Prozent die zugehörigen Dampfdrucke an, so daß man umgekehrt für eine gegebene Temperatur mit Hilfe der Tabelle III und dem mit dem Absorptions-Hygrometer gefundenen Resultat sofort die relative Feuchtigkeit aufsuchen kann.

Tabelle

| mm | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10⁰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,00 | 0,01 | 0,01 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,03 | 0,03 | 0,03 | 0,04 |
| 2 | 0,01 | 0.02 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,07 |
| 3 | 0,01 | 0,02 | 0.03 | 0,04 | 0,06 | 0,06 | 0,08 | 0,09 | 0,09 | 0,11 |
| 4 | 0,02 | 0.03 | 0.04 | 0,06 | 0,07 | 0,09 | 0,10 | 0,12 | 0,13 | 0,15 |
| 5 | 0,02 | 0,04 | 0,06 | 0,07 | 0,09 | 0,11 | 0.13 | 0,15 | 0,17 | 0,18 |
| 6 | 0,02 | 0,04 | 0,07 | 0,09 | 0,11 | 0,13 | 0,15 | 0,18 | 0,20 | 0,22 |
| 7 | 0,03 | 0.05 | 0,08 | 0,10 | 0,13 | 0,15 | 0,18 | 0,21 | 0.23 | 0.26 |
| 8 | 0,03 | 0,06 | 0,09 | 0,12 | 0,15 | 0,18 | 0,21 | 0,24 | 0,26 | 0,29 |
| 9 | 0,03 | 0,07 | 0.10 | 0,13 | 0,17 | 0,20 | 0,23 | 0,26 | 0,30 | 0,33 |
| 10 | 0,04 | 0,07 | 0,11 | 0,15 | 0,18 | 0,22 | 0,26 | 0,29 | 0,33 | 0,37 |
| 11 | 0,04 | 0,08 | 0,12 | 0,16 | 0,20 | 0,24 | 0,28 | 0,32 | 0,36 | 0,40 |
| 12 | 0,04 | 0,09 | 0,13 | 0,18 | 0,22 | 0,26 | 0,31 | 0,35 | 0.40 | 0,44 |
| 13 | 0,05 | 0,10 | 0,14 | 0,19 | 0.24 | 0,29 | 0,33 | 0,38 | 0,43 | 0,48 |
| 14 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,21 | 0,26 | 0,31 | 0,36 | 0,41 | 0,46 | 0,51 |
| 15 | 0,06 | 0,11 | 0,17 | 0,22 | 0,28 | 0,33 | 0,39 | 0,44 | 0,50 | 0,55 |
| 16 | 0,06 | 0.12 | 0,18 | 0,23 | 0,29 | 0,35 | 0,41 | 0,47 | 0,53 | 0,59 |
| 17 | 0,06 | 0,12 | 0,19 | 0,25 | 0,31 | 0,37 | 0,44 | 0,50 | 0,56 | 0.62 |
| 18 | 0,07 | 0,13 | 0,20 | 0,26 | 0,33 | 0,40 | 0,46 | 0,53 | 0,60 | 0.66 |
| 19 | 0,07 | 0,14 | 0,21 | 0,28 | 0,35 | 0,42 | 0,49 | 0,56 | 0,63 | 0,70 |
| 20 | 0,07 | 0,15 | 0,22 | 0,29 | 0,37 | 0,44 | 0,51 | 0,59 | 0,66 | 0,73 |
| 21 | 0,07 | 0,15 | 0,23 | 0,31 | 0,39 | 0,46 | 0,54 | 0,62 | 0,69 | 0,77 |
| 22 | 0,08 | 0,16 | 0,24 | 0,32 | 0,40 | 0,48 | 0,57 | 0,65 | 0,73 | 0,81 |
| 23 | 0,08 | 0,17 | 0,25 | 0,34 | 0,42 | 0,51 | 0,59 | 0,68 | 0.76 | 0.84 |
| 24 | 0,08 | 0,18 | 0,26 | 0,35 | 0,44 | 0,53 | 0,62 | 0,71 | 0,79 | 0,88 |
| 25 | 0,09 | 0,18 | 0,28 | 0,37 | 0,46 | 0,55 | 0,64 | 0,73 | 0,83 | 0,92 |
| 26 | 0,09 | 0,19 | 0,29 | 0,38 | 0,48 | 0,57 | 0,67 | 0,76 | 0,86 | 0,95 |
| 27 | 0,10 | 0,20 | 0,30 | 0,40 | 0,50 | 0,60 | 0,69 | 0,79 | 0,89 | 0,99 |
| 28 | 0,10 | 0,21 | 0,31 | 0.41 | 0,51 | 0,62 | 0,72 | 0,82 | 0,92 | 1.03 |
| 29 | 0,10 | 0,21 | 0,32 | 0,43 | 0,53 | 0,64 | 0,75 | 0,85 | 0,96 | 1,06 |
| 30 | 0,11 | 0,22 | 0,33 | 0,44 | 0,55 | 0,66 | 0,77 | 0,88 | 0,99 | 1,10 |

II.

| *mm* | *11* | *12* | *13* | *14* | *15* | *16* | *17* | *18* | *19* | *20°* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,04 | 0,04 | 0,05 | 0,05 | 0,06 | 0,06 | 0,06 | 0,07 | 0,07 | 0,07 |
| 2 | 0,08 | 0,09 | 0,10 | 0,10 | 0,11 | 0,12 | 0,12 | 0,13 | 0,14 | 0,15 |
| 3 | 0,12 | 0,13 | 0,14 | 0,15 | 0,17 | 0,18 | 0,19 | 0,20 | 0,21 | 0,22 |
| 4 | 0,16 | 0,18 | 0,19 | 0,21 | 0,22 | 0,23 | 0,25 | 0,26 | 0,28 | 0,29 |
| 5 | 0,20 | 0,22 | 0,24 | 0,26 | 0,28 | 0,29 | 0,31 | 0,33 | 0,35 | 0,37 |
| 6 | 0,24 | 0,26 | 0,29 | 0,31 | 0,33 | 0,35 | 0,37 | 0,40 | 0,42 | 0,44 |
| 7 | 0,28 | 0,31 | 0,33 | 0,36 | 0,39 | 0,41 | 0,44 | 0,46 | 0,49 | 0,51 |
| 8 | 0,32 | 0,35 | 0,38 | 0,41 | 0,44 | 0,47 | 0,50 | 0,53 | 0,56 | 0,59 |
| 9 | 0,36 | 0,40 | 0,43 | 0,46 | 0,50 | 0,53 | 0,56 | 0,59 | 0,63 | 0,66 |
| 10 | 0,40 | 0,44 | 0,48 | 0,51 | 0,55 | 0,59 | 0,62 | 0,66 | 0,70 | 0,73 |
| 11 | 0,44 | 0,48 | 0,52 | 0,56 | 0,61 | 0,65 | 0,69 | 0,73 | 0,77 | 0,81 |
| 12 | 0,48 | 0,53 | 0,57 | 0,62 | 0,66 | 0,70 | 0,75 | 0,79 | 0,84 | 0,88 |
| 13 | 0,52 | 0,57 | 0,62 | 0,67 | 0,72 | 0,76 | 0,81 | 0,86 | 0,91 | 0,95 |
| 14 | 0,56 | 0,62 | 0,67 | 0,72 | 0,77 | 0,82 | 0,87 | 0,92 | 0,98 | 1,03 |
| 15 | 0,60 | 0,66 | 0,71 | 0,77 | 0,83 | 0,88 | 0,94 | 0,99 | 1,05 | 1,10 |
| 16 | 0,65 | 0,70 | 0,76 | 0,82 | 0,88 | 0,94 | 1,00 | 1,06 | 1,11 | 1,17 |
| 17 | 0,69 | 0,75 | 0,81 | 0,87 | 0,94 | 1,00 | 1,06 | 1,12 | 1,18 | 1,25 |
| 18 | 0,73 | 0,79 | 0,86 | 0,92 | 0,99 | 1,06 | 1,12 | 1,19 | 1,25 | 1,32 |
| 19 | 0,77 | 0,84 | 0,91 | 0,98 | 1,05 | 1,11 | 1,18 | 1,25 | 1,32 | 1,39 |
| 20 | 0,81 | 0,88 | 0,95 | 1,03 | 1,10 | 1,17 | 1,25 | 1,32 | 1,39 | 1,47 |
| 21 | 0,85 | 0,92 | 1,00 | 1,08 | 1,15 | 1,23 | 1,31 | 1,39 | 1,46 | 1,54 |
| 22 | 0,89 | 0,97 | 1,05 | 1,13 | 1,21 | 1,29 | 1,37 | 1,45 | 1,53 | 1,61 |
| 23 | 0,93 | 1,01 | 1,10 | 1,18 | 1,27 | 1,35 | 1,43 | 1,52 | 1,60 | 1,69 |
| 24 | 0,97 | 1,06 | 1,14 | 1,23 | 1,32 | 1,41 | 1,50 | 1,58 | 1,67 | 1,76 |
| 25 | 1,01 | 1,10 | 1,19 | 1,28 | 1,38 | 1,47 | 1,56 | 1,65 | 1,74 | 1,83 |
| 26 | 1,05 | 1,14 | 1,24 | 1,33 | 1,43 | 1,52 | 1,62 | 1,72 | 1,81 | 1,91 |
| 27 | 1,09 | 1,19 | 1,29 | 1,39 | 1,49 | 1,58 | 1,68 | 1,78 | 1,88 | 1,98 |
| 28 | 1,13 | 1,23 | 1,33 | 1,44 | 1,54 | 1,64 | 1,74 | 1,85 | 1,95 | 2,05 |
| 29 | 1,17 | 1,28 | 1,38 | 1,49 | 1,60 | 1,70 | 1,81 | 1,91 | 2,02 | 2,13 |
| 30 | 1,21 | 1,32 | 1,43 | 1,54 | 1,65 | 1,76 | 1,87 | 1,98 | 2,09 | 2,20 |

**Tabelle**

— 20° (0,927 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0.06 | 0,07 | 0,07 | 0,08 |
| 10 | 0.09 | 0,10 | 0,11 | 0,12 | 0,13 | 0,14 | 0,15 | 0,16 | 0,17 | 0,18 |
| 20 | 0,19 | 0,20 | 0,21 | 0,21 | 0,22 | 0,23 | 0,24 | 0,25 | 0,26 | 0,27 |
| 30 | 0,28 | 0,29 | 0,30 | 0,31 | 0,32 | 0.33 | 0,34 | 0,34 | 0,35 | 0,36 |
| 40 | 0,37 | 0,38 | 0,39 | 0,40 | 0,41 | 0,42 | 0,43 | 0,44 | 0,45 | 0,46 |
| 50 | 0,47 | 0,47 | 0,48 | 0,49 | 0,50 | 0,51 | 0,52 | 0,53 | 0,54 | 0.55 |
| 60 | 0.56 | 0,57 | 0,58 | 0,59 | 0,60 | 0,60 | 0,61 | 0,62 | 0,63 | 0,64 |
| 70 | 0,65 | 0,66 | 0,67 | 0,68 | 0,69 | 0.70 | 0,71 | 0,72 | 0,73 | 0,73 |
| 80 | 0,74 | 0,75 | 0,76 | 0,77 | 0,78 | 0,79 | 0,80 | 0,81 | 0,82 | 0,83 |
| 90 | 0,84 | 0,85 | 0,86 | 0,86 | 0,87 | 0,88 | 0,89 | 0,90 | 0,91 | 0,92 |
| 100 | 0,93 | | | | | | | | | |

— 19° (1,008 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
| 10 | 0,10 | 0,11 | 0,12 | 0,13 | 0,14 | 0,15 | 0,16 | 0,17 | 0.18 | 0,19 |
| 20 | 0,20 | 0,21 | 0,22 | 0,23 | 0,24 | 0,25 | 0.26 | 0,27 | 0,28 | 0,29 |
| 30 | 0,30 | 0.31 | 0,32 | 0,33 | 0,34 | 0,35 | 0,36 | 0,37 | 0,38 | 0,39 |
| 40 | 0.40 | 0,41 | 0,42 | 0,43 | 0,44 | 0,45 | 0,46 | 0.47 | 0,48 | 0,49 |
| 50 | 0,50 | 0.51 | 0,52 | 0,53 | 0,54 | 0,55 | 0,57 | 0 58 | 0,59 | 0,60 |
| 60 | 0.61 | 0,62 | 0,63 | 0,64 | 0.65 | 0,66 | 0,67 | 0,68 | 0,69 | 0,70 |
| 70 | 0,71 | 0.72 | 0,73 | 0,74 | 0,75 | 0,76 | 0,77 | 0,78 | 0.79 | 0,80 |
| 80 | 0.81 | 0,82 | 0,83 | 0,84 | 0.85 | 0,86 | 0,87 | 0,88 | 0,89 | 0,90 |
| 90 | 0,91 | 0,92 | 0,93 | 0,94 | 0,95 | 0,96 | 0,97 | 0,98 | 0,99 | 1,00 |
| 100 | 1,01 | | | | | | | | | |

— 18° (1,095 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | 0,10 |
| 10 | 0.11 | 0.12 | 0.13 | 0,14 | 0,15 | 0,17 | 0,18 | 0,19 | 0.20 | 0.21 |
| 20 | 0.22 | 0,23 | 0,24 | 0,25 | 0,26 | 0,27 | 0,29 | 0,30 | 0,31 | 0,32 |
| 30 | 0,33 | 0,34 | 0,35 | 0,36 | 0,37 | 0,38 | 0,40 | 0,41 | 0,42 | 0,43 |
| 40 | 0.44 | 0,45 | 0,46 | 0,47 | 0,48 | 0,49 | 0,50 | 0,52 | 0,53 | 0,54 |
| 50 | 0,55 | 0,56 | 0,57 | 0,58 | 0,59 | 0,60 | 0,61 | 0,63 | 0,64 | 0,65 |
| 60 | 0,66 | 0,67 | 0,68 | 0,69 | 0,70 | 0,71 | 0,72 | 0,73 | 0,75 | 0,76 |
| 70 | 0.77 | 0.78 | 0,79 | 0,80 | 0.81 | 0,82 | 0,83 | 0,84 | 0,86 | 0,87 |
| 80 | 0,88 | 0,89 | 0,90 | 0,91 | 0.92 | 0,93 | 0,94 | 0,95 | 0,96 | 0,98 |
| 90 | 0.99 | 1.00 | 1,02 | 1,03 | 1,04 | 1,05 | 1,06 | 1,07 | 1,08 | 1,10 |
| 100 | 1,11 | | | | | | | | | |

III.

— 17⁰ (1,189 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,10 | 0,11 |
| 10 | 0,12 | 0,13 | 0,14 | 0,16 | 0,17 | 0,18 | 0,19 | 0,20 | 0,22 | 0,23 |
| 20 | 0,24 | 0,25 | 0,26 | 0,27 | 0,29 | 0,30 | 0,31 | 0,32 | 0,33 | 0,35 |
| 30 | 0,36 | 0,37 | 0,38 | 0,39 | 0,41 | 0,42 | 0,43 | 0,44 | 0,45 | 0,47 |
| 40 | 0,48 | 0,49 | 0,50 | 0,51 | 0,52 | 0,54 | 0,55 | 0,56 | 0,57 | 0,58 |
| 50 | 0,60 | 0,61 | 0,62 | 0,63 | 0,64 | 0,66 | 0,67 | 0,68 | 0,69 | 0,70 |
| 60 | 0,71 | 0,73 | 0,74 | 0,75 | 0,76 | 0,77 | 0,79 | 0,80 | 0,81 | 0,82 |
| 70 | 0,83 | 0,84 | 0,86 | 0,87 | 0,88 | 0,89 | 0,90 | 0,92 | 0,93 | 0,94 |
| 80 | 0,95 | 0,96 | 0,98 | 0,99 | 1,00 | 1,01 | 1,02 | 1,04 | 1,05 | 1,06 |
| 90 | 1,07 | 1,08 | 1,10 | 1,11 | 1,12 | 1,13 | 1,15 | 1,16 | 1,17 | 1,18 |
| 100 | 1,19 | | | | | | | | | |

— 16⁰ (1,290 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,01 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | 0.10 | 0,12 |
| 10 | 0,13 | 0,14 | 0,16 | 0,17 | 0,18 | 0,19 | 0,21 | 0,22 | 0,23 | 0,25 |
| 20 | 0,26 | 0,27 | 0,28 | 0,30 | 0,31 | 0,32 | 0,34 | 0,35 | 0,36 | 0,38 |
| 30 | 0,39 | 0,40 | 0,41 | 0,43 | 0,44 | 0,45 | 0,47 | 0,48 | 0,49 | 0,50 |
| 40 | 0,52 | 0,53 | 0,54 | 0,56 | 0,57 | 0,58 | 0,59 | 0,61 | 0.62 | 0,63 |
| 50 | 0,65 | 0,66 | 0,67 | 0,68 | 0,70 | 0,71 | 0,72 | 0,74 | 0,75 | 0,76 |
| 60 | 0,77 | 0,79 | 0,80 | 0,81 | 0,83 | 0,84 | 0,85 | 0,87 | 0,88 | 0,89 |
| 70 | 0,90 | 0,92 | 0,93 | 0,94 | 0,96 | 0,97 | 0,98 | 0,99 | 1,00 | 1,02 |
| 80 | 1,03 | 1,05 | 1,06 | 1.07 | 1,08 | 1,10 | 1,11 | 1,12 | 1,14 | 1,15 |
| 90 | 1,16 | 1,17 | 1,19 | 1,20 | 1,21 | 1,23 | 1,24 | 1,25 | 1,27 | 1,28 |
| 100 | 1,29 | | | | | | | | | |

— 15⁰ (1,400 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,01 | 0,03 | 0,04 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,10 | 0,11 | 0,13 |
| 10 | 0,14 | 0,15 | 0,17 | 0,18 | 0,20 | 0,21 | 0,22 | 0,24 | 0,25 | 0,27 |
| 20 | 0,28 | 0,29 | 0,31 | 0,32 | 0,34 | 0,35 | 0,36 | 0,38 | 0,39 | 0,41 |
| 30 | 0,42 | 0,43 | 0,45 | 0,46 | 0,48 | 0,49 | 0,50 | 0,52 | 0,53 | 0,55 |
| 40 | 0,56 | 0,57 | 0,59 | 0,60 | 0,62 | 0,63 | 0,64 | 0,66 | 0,67 | 0,69 |
| 50 | 0,70 | 0,71 | 0,73 | 0,74 | 0,76 | 0,77 | 0,78 | 0,80 | 0,81 | 0,83 |
| 60 | 0,84 | 0,85 | 0,87 | 0,88 | 0,90 | 0,91 | 0,92 | 0,94 | 0,95 | 0,97 |
| 70 | 0,98 | 0,99 | 1,01 | 1,02 | 1,04 | 1,05 | 1,06 | 1,08 | 1,09 | 1,11 |
| 80 | 1,12 | 1,13 | 1,15 | 1,16 | 1,18 | 1,19 | 1,20 | 1,22 | 1,23 | 1,25 |
| 90 | 1,26 | 1,27 | 1,29 | 1,30 | 1,32 | 1,33 | 1,34 | 1,36 | 1,37 | 1,39 |
| 100 | 1,40 | | | | | | | | | |

— $14^0$ (1,518 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,02 | 0,03 | 0,05 | 0,06 | 0,08 | 0,09 | 0,11 | 0,12 | 0,14 |
| 10 | 0,15 | 0,17 | 0,18 | 0,20 | 0,21 | 0,23 | 0,24 | 0,26 | 0.27 | 0,29 |
| 20 | 0,30 | 0,32 | 0,33 | 0,35 | 0.36 | 0,38 | 0,39 | 0,41 | 0,42 | 0,44 |
| 30 | 0,46 | 0,47 | 0,49 | 0,50 | 0,52 | 0,53 | 0,55 | 0,56 | 0,58 | 0,59 |
| 40 | 0,61 | 0,62 | 0,64 | 0.65 | 0,67 | 0,68 | 0,70 | 0,71 | 0,73 | 0,74 |
| 50 | 0,76 | 0.77 | 0.79 | 0,80 | 0,82 | 0,83 | 0,84 | 0,86 | 0,87 | 0,89 |
| 60 | 0,91 | 0,93 | 0.94 | 0,96 | 0,97 | 0,99 | 1,00 | 1,02 | 1,03 | 1,05 |
| 70 | 1,06 | 1,08 | 1,09 | 1,11 | 1,12 | 1,14 | 1,15 | 1,17 | 1,18 | 1,20 |
| 80 | 1,22 | 1,23 | 1.25 | 1,26 | 1,28 | 1,29 | 1,31 | 1,32 | 1,34 | 1,35 |
| 90 | 1,37 | 1,39 | 1,40 | 1,41 | 1,43 | 1,44 | 1,46 | 1,47 | 1,49 | 1,50 |
| 100 | 1,52 | | | | | | | | | |

— $13^0$ (1,646 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,02 | 0,03 | 0,05 | 0.07 | 0,08 | 0,10 | 0,12 | 0,13 | 0,15 |
| 10 | 0,17 | 0,18 | 0,20 | 0,22 | 0,23 | 0,25 | 0,27 | 0,28 | 0,30 | 0,32 |
| 20 | 0,33 | 0,35 | 0,36 | 0,38 | 0,40 | 0,41 | 0,43 | 0,45 | 0,47 | 0,48 |
| 30 | 0,49 | 0,51 | 0,53 | 0,55 | 0,56 | 0,58 | 0,60 | 0,61 | 0,63 | 0,65 |
| 40 | 0,66 | 0,68 | 0,69 | 0,71 | 0,73 | 0,74 | 0,76 | 0,78 | 0,79 | 0,81 |
| 50 | 0,82 | 0,84 | 0,86 | 0,87 | 0,89 | 0,91 | 0,92 | 0,94 | 0,96 | 0,97 |
| 60 | 0,99 | 1,01 | 1,02 | 1,04 | 1,05 | 1,07 | 1,09 | 1,10 | 1,12 | 1,14 |
| 70 | 1,15 | 1,17 | 1,19 | 1,20 | 1,22 | 1,24 | 1,25 | 1,27 | 1,28 | 1,30 |
| 80 | 1.32 | 1,33 | 1,35 | 1,37 | 1,38 | 1,40 | 1,42 | 1,43 | 1,45 | 1,47 |
| 90 | 1,48 | 1,50 | 1,51 | 1,53 | 1,55 | 1,56 | 1,58 | 1,60 | 1,61 | 1,63 |
| 100 | 1.65 | | | | | | | | | |

— $12^0$ (1,783 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,02 | 0,04 | 0,05 | 0,07 | 0,09 | 0,11 | 0,13 | 0,14 | 0,16 |
| 10 | 0,18 | 0,20 | 0,21 | 0,23 | 0,25 | 0,27 | 0,28 | 0,30 | 0,32 | 0.34 |
| 20 | 0,36 | 0,37 | 0,39 | 0,41 | 0,43 | 0,45 | 0,46 | 0,48 | 0,50 | 0,52 |
| 30 | 0,54 | 0,55 | 0,57 | 0,59 | 0.61 | 0,62 | 0,64 | 0,66 | 0,68 | 0,70 |
| 40 | 0,71 | 0,73 | 0,75 | 0,77 | 0,78 | 0,80 | 0.82 | 0,84 | 0,86 | 0,87 |
| 50 | 0,89 | 0,91 | 0,93 | 0,95 | 0,96 | 0,98 | 1,00 | 1,02 | 1,03 | 1,05 |
| 60 | 1,07 | 1,09 | 1,10 | 1,12 | 1,14 | 1,16 | 1,17 | 1,19 | 1,21 | 1,23 |
| 70 | 1,25 | 1,26 | 1,28 | 1,30 | 1,32 | 1,34 | 1,36 | 1,37 | 1,39 | 1,41 |
| 80 | 1,43 | 1,44 | 1,46 | 1,48 | 1,50 | 1,52 | 1,53 | 1,55 | 1,57 | 1,59 |
| 90 | 1,61 | 1,62 | 1,64 | 1,66 | 1,68 | 1,69 | 1,71 | 1,73 | 1,75 | 1,77 |
| 100 | 1,78 | | | | | | | | | |

— 11⁰ (1,933 mm)

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,02 | 0,04 | 0,06 | 0,08 | 0,10 | 0,12 | 0,14 | 0,16 | 0,17 |
| 10 | 0,19 | 0,21 | 0,23 | 0,25 | 0,27 | 0,29 | 0,31 | 0,33 | 0,35 | 0,37 |
| 20 | 0,39 | 0,41 | 0,43 | 0,44 | 0,46 | 0,48 | 0,50 | 0,52 | 0,54 | 0,56 |
| 30 | 0,58 | 0,60 | 0,62 | 0,64 | 0,66 | 0,68 | 0,70 | 0,72 | 0,73 | 0,75 |
| 40 | 0,77 | 0,79 | 0,81 | 0,83 | 0,85 | 0,87 | 0,89 | 0,91 | 0,93 | 0,95 |
| 50 | 0,97 | 0,99 | 1,01 | 1,02 | 1,04 | 1,06 | 1,08 | 1,10 | 1,12 | 1,14 |
| 60 | 1,16 | 1,18 | 1,20 | 1,22 | 1,24 | 1,26 | 1,28 | 1,30 | 1,31 | 1,33 |
| 70 | 1,35 | 1,37 | 1,39 | 1,41 | 1,43 | 1,45 | 1,47 | 1,49 | 1,51 | 1,53 |
| 80 | 1,55 | 1,57 | 1,59 | 1,60 | 1,62 | 1,64 | 1,66 | 1,68 | 1,70 | 1,72 |
| 90 | 1,74 | 1,76 | 1,78 | 1,80 | 1,82 | 1,84 | 1,86 | 1,88 | 1,89 | 1,91 |
| 100 | 1,93 | | | | | | | | | |

— 10⁰ (2,093 mm)

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,02 | 0,04 | 0,06 | 0,08 | 0,11 | 0,13 | 0,15 | 0,17 | 0,19 |
| 10 | 0,21 | 0,23 | 0,25 | 0,27 | 0,29 | 0,31 | 0,33 | 0,36 | 0,38 | 0,40 |
| 20 | 0,42 | 0,44 | 0,46 | 0,48 | 0,50 | 0,52 | 0,55 | 0,57 | 0,59 | 0,61 |
| 30 | 0,63 | 0,65 | 0,67 | 0,69 | 0,71 | 0,73 | 0,75 | 0,78 | 0,80 | 0,82 |
| 40 | 0,84 | 0,86 | 0,88 | 0,90 | 0,92 | 0,94 | 0,96 | 0,98 | 1,01 | 1,03 |
| 50 | 1,05 | 1,07 | 1,09 | 1,11 | 1,13 | 1,15 | 1,17 | 1,19 | 1,21 | 1,23 |
| 60 | 1,26 | 1,28 | 1,30 | 1,32 | 1,34 | 1,36 | 1,38 | 1,40 | 1,42 | 1,44 |
| 70 | 1,47 | 1,49 | 1,51 | 1,53 | 1,55 | 1,57 | 1,59 | 1,61 | 1,63 | 1,65 |
| 80 | 1,67 | 1,70 | 1,72 | 1,74 | 1,76 | 1,78 | 1,80 | 1,82 | 1,84 | 1,86 |
| 90 | 1,88 | 1,91 | 1,93 | 1,95 | 1,97 | 1,99 | 2,01 | 2,03 | 2,05 | 2,07 |
| 100 | 2,09 | | | | | | | | | |

— 9⁰ (2,267 mm)

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,02 | 0,05 | 0,07 | 0,09 | 0,11 | 0,14 | 0,16 | 0,18 | 0,20 |
| 10 | 0,23 | 0,25 | 0,27 | 0,30 | 0,32 | 0,34 | 0,36 | 0,39 | 0,41 | 0,43 |
| 20 | 0,45 | 0,48 | 0,50 | 0,52 | 0,54 | 0,57 | 0,59 | 0,61 | 0,64 | 0,66 |
| 30 | 0,68 | 0,70 | 0,73 | 0,75 | 0,77 | 0,79 | 0,82 | 0,84 | 0,86 | 0,88 |
| 40 | 0,91 | 0,93 | 0,95 | 0,98 | 1,00 | 1,02 | 1,04 | 1,07 | 1,09 | 1,11 |
| 50 | 1,13 | 1,16 | 1,18 | 1,20 | 1,22 | 1,25 | 1,27 | 1,29 | 1,32 | 1,34 |
| 60 | 1,36 | 1,38 | 1,41 | 1,43 | 1,45 | 1,47 | 1,50 | 1,52 | 1,54 | 1,57 |
| 70 | 1,59 | 1,61 | 1,63 | 1,66 | 1,68 | 1,70 | 1,72 | 1,75 | 1,77 | 1,79 |
| 80 | 1,81 | 1,84 | 1,86 | 1,88 | 1,91 | 1,93 | 1,95 | 1,97 | 2,00 | 2,02 |
| 90 | 2,04 | 2,06 | 2,09 | 2,11 | 2,13 | 2,15 | 2,18 | 2,20 | 2,22 | 2,25 |
| 100 | 2,27 | | | | | | | | | |

— 8⁰ (2,455 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,03 | 0.05 | 0,07 | 0,10 | 0,12 | 0,15 | 0,17 | 0,20 | 0,22 |
| 10 | 0.25 | 0.27 | 0,30 | 0,32 | 0,34 | 0,37 | 0,39 | 0,42 | 0,44 | 0,47 |
| 20 | 0,49 | 0.52 | 0,54 | 0,57 | 0,59 | 0,61 | 0,64 | 0,66 | 0.69 | 0,71 |
| 30 | 0,74 | 0,76 | 0,79 | 0,81 | 0,84 | 0,86 | 0,88 | 0,91 | 0,93 | 0,96 |
| 40 | 0,98 | 1,01 | 1,03 | 1,06 | 1,08 | 1,11 | 1,13 | 1,15 | 1,18 | 1,20 |
| 50 | 1,23 | 1,25 | 1,28 | 1,30 | 1,33 | 1,35 | 1,38 | 1,40 | 1,42 | 1,45 |
| 60 | 1.47 | 1,50 | 1,52 | 1,55 | 1,57 | 1,60 | 1,62 | 1,65 | 1,67 | 1,69 |
| 70 | 1,72 | 1,74 | 1,77 | 1.79 | 1,82 | 1.84 | 1,87 | 1,89 | 1,92 | 1,94 |
| 80 | 1.96 | 1,99 | 2.01 | 2.04 | 2.06 | 2,09 | 2,11 | 2,14 | 2,16 | 2,19 |
| 90 | 2,21 | 2,23 | 2,26 | 2,28 | 2,31 | 2,33 | 2,36 | 2,38 | 2,41 | 2,43 |
| 100 | 2,46 | | | | | | | | | |

— 7⁰ (2,658 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,03 | 0,05 | 0,08 | 0.11 | 0,13 | 0,16 | 0,19 | 0,21 | 0,24 |
| 10 | 0.27 | 0.29 | 0.32 | 0,35 | 0,37 | 0,40 | 0,43 | 0.45 | 0,48 | 0.51 |
| 20 | 0,53 | 0,56 | 0,59 | 0,61 | 0,64 | 0,67 | 0,69 | 0,72 | 0,74 | 0,77 |
| 30 | 0.80 | 0,82 | 0,85 | 0,88 | 0.90 | 0,93 | 0,96 | 0,98 | 1,01 | 1,04 |
| 40 | 1,06 | 1,09 | 1,12 | 1,14 | 1,17 | 1,20 | 1,22 | 1,25 | 1,28 | 1,30 |
| 50 | 1,33 | 1,36 | 1,38 | 1,41 | 1,44 | 1,46 | 1,49 | 1,52 | 1,54 | 1,57 |
| 60 | 1.60 | 1,62 | 1,65 | 1.68 | 1.70 | 1,73 | 1.75 | 1,78 | 1,81 | 1,83 |
| 70 | 1,86 | 1,89 | 1,91 | 1,94 | 1,97 | 1,99 | 2,02 | 2,05 | 2,07 | 2,10 |
| 80 | 2.13 | 2,15 | 2,18 | 2.21 | 2,23 | 2,26 | 2,29 | 2,31 | 2,34 | 2,37 |
| 90 | 2.39 | 2,42 | 2,45 | 2,47 | 2,50 | 2,53 | 2,55 | 2,58 | 2,61 | 2,63 |
| 100 | 2,66 | | | | | | | | | |

— 6⁰ (2.876 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,03 | 0,06 | 0,09 | 0,12 | 0,14 | 0.17 | 0.20 | 0,23 | 0,26 |
| 10 | 0,29 | 0,32 | 0,35 | 0,37 | 0.40 | 0,43 | 0,46 | 0,49 | 0.52 | 0,55 |
| 20 | 0,58 | 0,60 | 0,63 | 0,66 | 0,69 | 0,72 | 0,75 | 0.78 | 0,81 | 0.83 |
| 30 | 0,86 | 0,89 | 0,92 | 0,95 | 0,98 | 1,01 | 1,04 | 1,06 | 1,09 | 1,12 |
| 40 | 1,15 | 1,18 | 1.21 | 1,24 | 1,27 | 1,29 | 1.32 | 1,35 | 1,38 | 1,41 |
| 50 | 1,44 | 1,47 | 1,50 | 1,52 | 1,55 | 1,58 | 1,61 | 1,64 | 1.67 | 1,70 |
| 60 | 1,73 | 1,75 | 1,78 | 1,81 | 1,84 | 1,87 | 1,90 | 1,93 | 1,96 | 1,98 |
| 70 | 2,01 | 2,04 | 2.07 | 2,10 | 2.13 | 2,16 | 2,19 | 2.22 | 2,24 | 2,27 |
| 30 | 2,30 | 2,33 | 2,36 | 2,39 | 2,42 | 2.45 | 2,47 | 2,50 | 2,53 | 2,56 |
| 90 | 2,59 | 2,62 | 2.65 | 2,68 | 2.70 | 2,73 | 2,76 | 2,79 | 2,82 | 2,85 |
| 100 | 2,88 | | | | | | | | | |

— $5^0$ (3,113 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,03 | 0,06 | 0,09 | 0,13 | 0,16 | 0,19 | 0,22 | 0,25 | 0,28 |
| 10 | 0,31 | 0,34 | 0,37 | 0,41 | 0,44 | 0,47 | 0,50 | 0,53 | 0,56 | 0,59 |
| 20 | 0,62 | 0,65 | 0,69 | 0,72 | 0,75 | 0,78 | 0,81 | 0,84 | 0,87 | 0,90 |
| 30 | 0,93 | 0,97 | 1,00 | 1,03 | 1,06 | 1,09 | 1,12 | 1,15 | 1,18 | 1,21 |
| 40 | 1,25 | 1,28 | 1,31 | 1,34 | 1,37 | 1,40 | 1,43 | 1,46 | 1,49 | 1,53 |
| 50 | 1,56 | 1,59 | 1,62 | 1,65 | 1,68 | 1,71 | 1,74 | 1,77 | 1,81 | 1,84 |
| 60 | 1,87 | 1,90 | 1,93 | 1,96 | 1,99 | 2,02 | 2,05 | 2,08 | 2,12 | 2,15 |
| 70 | 2,18 | 2,21 | 2.24 | 2,27 | 2,30 | 2,33 | 2.37 | 2,40 | 2,43 | 2,46 |
| 80 | 2,49 | 2,52 | 2,55 | 2,58 | 2,61 | 2,65 | 2,68 | 2.71 | 2,74 | 2,77 |
| 90 | 2,80 | 2,83 | 2,86 | 2,90 | 2,93 | 2,96 | 2,99 | 3,02 | 3,05 | 3,08 |
| 100 | 3,11 | | | | | | | | | |

— $4^0$ (3,368 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,03 | 0,07 | 0,10 | 0,14 | 0,17 | 0,20 | 0,23 | 0,27 | 0,30 |
| 10 | 0,33 | 0,37 | 0,40 | 0,44 | 0,47 | 0,51 | 0,54 | 0,57 | 0,61 | 0,64 |
| 20 | 0,67 | 0,71 | 0,74 | 0,77 | 0,81 | 0,84 | 0,88 | 0,91 | 0,94 | 0,98 |
| 30 | 1,01 | 1,04 | 1,08 | 1,11 | 1,15 | 1,18 | 1.21 | 1,25 | 1,28 | 1,31 |
| 40 | 1,35 | 1,38 | 1,42 | 1,45 | 1,48 | 1,52 | 1,55 | 1,58 | 1,62 | 1,65 |
| 50 | 1,68 | 1,72 | 1,75 | 1,79 | 1,82 | 1,85 | 1,89 | 1,92 | 1,95 | 1,99 |
| 60 | 2,02 | 2,06 | 2,09 | 2,12 | 2,16 | 2,19 | 2,22 | 2,26 | 2,29 | 2,32 |
| 70 | 2,36 | 2,39 | 2,43 | 2,46 | 2,49 | 2,53 | 2,56 | 2,59 | 2,63 | 2,66 |
| 80 | 2,69 | 2,73 | 2,76 | 2,80 | 2,83 | 2,86 | 2,90 | 2,93 | 2,96 | 3,00 |
| 90 | 3,03 | 3,07 | 3,10 | 3,13 | 3,17 | 3,20 | 3,23 | 3,27 | 3,30 | 3,34 |
| 100 | 3,37 | | | | | | | | | |

— $3^0$ (3,644 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,04 | 0,07 | 0,11 | 0,15 | 0,18 | 0,22 | 0,26 | 0,29 | 0,33 |
| 10 | 0,36 | 0,40 | 0,44 | 0,47 | 0,51 | 0,55 | 0,58 | 0,62 | 0,66 | 0,69 |
| 20 | 0,73 | 0,77 | 0,80 | 0,84 | 0,87 | 0,91 | 0,95 | 0,98 | 1,02 | 1,06 |
| 30 | 1,09 | 1,13 | 1.17 | 1,20 | 1,24 | 1,28 | 1,31 | 1,35 | 1.38 | 1,42 |
| 40 | 1,46 | 1,49 | 1,53 | 1,57 | 1,60 | 1,64 | 1,68 | 1,71 | 1,75 | 1,79 |
| 50 | 1,82 | 1,86 | 1.90 | 1,93 | 1,97 | 2,00 | 2,04 | 2,08 | 2.11 | 2,15 |
| 60 | 2,19 | 2,22 | 2,26 | 2,30 | 2,33 | 2,37 | 2,40 | 2,44 | 2,48 | 2,51 |
| 70 | 2,55 | 2,59 | 2,62 | 2,66 | 2,70 | 2,73 | 2,77 | 2,81 | 2,84 | 2,88 |
| 80 | 2,92 | 2,95 | 2,99 | 3,02 | 3,06 | 3,10 | 3,13 | 3,17 | 3,21 | 3,24 |
| 90 | 3,28 | 3,32 | 3,35 | 3,39 | 3,42 | 3,46 | 3,50 | 3,53 | 3,57 | 3,61 |
| 100 | 3,64 | | | | | | | | | |

— 2⁰ (3,941 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,04 | 0,08 | 0,12 | 0,16 | 0,20 | 0.24 | 0,28 | 0,32 | 0,36 |
| 10 | 0,39 | 0,43 | 0,47 | 0,51 | 0,55 | 0,59 | 0,63 | 0.67 | 0.71 | 0,75 |
| 20 | 0,79 | 0,83 | 0.87 | 0.91 | 0.95 | 0.99 | 1,03 | 1.06 | 1,10 | 1,14 |
| 30 | 1.18 | 1.22 | 1,26 | 1,30 | 1,84 | 1.38 | 1,42 | 1.46 | 1,50 | 1,54 |
| 40 | 1,58 | 1,62 | 1,66 | 1.70 | 1,73 | 1,77 | 1,81 | 1.85 | 1,89 | 1.93 |
| 50 | 1,97 | 2,01 | 2,05 | 2,09 | 2,13 | 2,17 | 2,21 | 2.25 | 2.29 | 2,33 |
| 60 | 2,36 | 2,40 | 2,44 | 2,48 | 2,52 | 2,56 | 2,60 | 2.64 | 2,68 | 2.72 |
| 70 | 2,76 | 2,80 | 2,84 | 2,88 | 2,92 | 2,96 | 3,00 | 3,03 | 3,07 | 3,11 |
| 80 | 3,15 | 3,19 | 3,23 | 3,27 | 3,31 | 3.35 | 3.39 | 3,43 | 3,47 | 3.51 |
| 90 | 3.55 | 3,59 | 3,63 | 3,67 | 3,70 | 3,74 | 3,78 | 3,82 | 3,86 | 3,90 |
| 100 | 3.94 | | | | | | | | | |

— 1⁰ (4,263 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.04 | 0.09 | 0,13 | 0,17 | 0,21 | 0,26 | 0,30 | 0,34 | 0.38 |
| 10 | 0.43 | 0,47 | 0.51 | 0,55 | 0,60 | 0.64 | 0.68 | 0,73 | 0,77 | 0,81 |
| 20 | 0,85 | 0,90 | 0.94 | 0,98 | 1,02 | 1,07 | 1,11 | 1,15 | 1,19 | 1.24 |
| 30 | 1,28 | 1.32 | 1,36 | 1,41 | 1.45 | 1,49 | 1,53 | 1,58 | 1,62 | 1.66 |
| 40 | 1,71 | 1,75 | 1,79 | 1.83 | 1,88 | 1,92 | 1.96 | 2,00 | 2 05 | 2.09 |
| 50 | 2,13 | 2.17 | 2.22 | 2,26 | 2,30 | 2,34 | 2,39 | 2,43 | 2.47 | 2,52 |
| 60 | 2,56 | 2,60 | 2.64 | 2,69 | 2,73 | 2,77 | 2,81 | 2,86 | 2,90 | 2,94 |
| 70 | 2.98 | 3,03 | 3,07 | 3.11 | 3,15 | 3,20 | 3,24 | 3.28 | 3,33 | 3,37 |
| 80 | 3,41 | 3,45 | 3,50 | 3,54 | 3.58 | 3,62 | 3,67 | 3,71 | 3,75 | 3.79 |
| 90 | 3,84 | 3,88 | 3,92 | 3,96 | 4.00 | 4,05 | 4,09 | 4,14 | 4,18 | 4,22 |
| 100 | 4.26 | | | | | | | | | |

0⁰ (4,600 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,05 | 0,09 | 0.14 | 0.18 | 0,23 | 0,28 | 0,32 | 0,37 | 0,41 |
| 10 | 0,46 | 0,51 | 0.55 | 0.60 | 0,64 | 0,69 | 0,74 | 0,78 | 0,83 | 0,87 |
| 20 | 0,92 | 0,97 | 1,01 | 1,06 | 1.10 | 1,15 | 1,20 | 1,24 | 1.29 | 1,33 |
| 30 | 1,38 | 1,43 | 1,47 | 1.52 | 1,56 | 1,61 | 1,66 | 1.70 | 1,75 | 1,79 |
| 40 | 1,84 | 1,89 | 1,93 | 1,98 | 2,02 | 2.07 | 2,12 | 2.16 | 2,21 | 2,25 |
| 50 | 2,30 | 2,35 | 2,39 | 2,44 | 2,48 | 2.53 | 2,58 | 2,62 | 2,67 | 2,71 |
| 60 | 2.76 | 2.81 | 2,85 | 2,90 | 2.94 | 2.99 | 3,04 | 3,08 | 3,13 | 3.17 |
| 70 | 3,22 | 3,27 | 3,31 | 3,36 | 3,40 | 3,45 | 3,50 | 3,54 | 3,59 | 3,63 |
| 80 | 3.68 | 3,73 | 3,77 | 3.82 | 3,86 | 3,91 | 3,96 | 4,00 | 4,05 | 4,09 |
| 90 | 4,14 | 4,19 | 4.23 | 4,28 | 4,32 | 4,37 | 4,42 | 4,46 | 4,51 | 4,55 |
| 100 | 4.60 | | | | | | | | | |

+ 1⁰ (4,940 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 |
| 10 | 0,49 | 0,54 | 0,59 | 0,64 | 0,69 | 0,74 | 0,79 | 0,84 | 0,89 | 0,94 |
| 20 | 0,99 | 1,04 | 1,09 | 1,14 | 1,19 | 1,24 | 1,28 | 1,33 | 1,38 | 1,43 |
| 30 | 1,48 | 1,53 | 1,58 | 1.63 | 1,68 | 1,73 | 1,79 | 1,83 | 1,88 | 1,93 |
| 40 | 1,98 | 2,03 | 2,08 | 2,12 | 2,17 | 2,22 | 2,27 | 2,32 | 2,37 | 2,42 |
| 50 | 2,47 | 2,52 | 2,57 | 2,62 | 2,67 | 2,72 | 2,77 | 2,82 | 2,87 | 2,92 |
| 60 | 2,96 | 3,01 | 3,06 | 3,11 | 3,16 | 3.21 | 3,26 | 3.31 | 3,36 | 3,41 |
| 70 | 3,46 | 3,51 | 3,56 | 3,61 | 3,66 | 3,71 | 3,75 | 3,80 | 3,85 | 3,90 |
| 80 | 3,95 | 4,00 | 4,05 | 4,10 | 4,15 | 4,20 | 4,25 | 4,30 | 4,35 | 4,40 |
| 90 | 4,45 | 4,50 | 4,55 | 4,59 | 4,64 | 4,69 | 4,74 | 4,79 | 4,84 | 4,89 |
| 100 | 4,94 | | | | | | | | | |

+ 2⁰ (5,302 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,05 | 0,11 | 0,16 | 0,21 | 0,27 | 0,32 | 0,37 | 0,42 | 0,48 |
| 10 | 0,53 | 0,58 | 0,64 | 0,69 | 0,74 | 0,80 | 0,85 | 0,90 | 0,95 | 1,01 |
| 20 | 1,06 | 1,11 | 1,17 | 1,22 | 1,27 | 1,33 | 1,38 | 1,43 | 1.48 | 1,54 |
| 30 | 1,59 | 1,64 | 1,70 | 1,75 | 1,80 | 1,86 | 1,91 | 1,96 | 2,02 | 2,07 |
| 40 | 2,12 | 2,17 | 2,23 | 2,28 | 2,33 | 2,39 | 2,44 | 2,49 | 2,55 | 2,60 |
| 50 | 2,65 | 2,70 | 2,76 | 2,81 | 2,86 | 2,92 | 2,97 | 3,02 | 3,08 | 3,13 |
| 60 | 3,18 | 3,23 | 3,29 | 3.34 | 3,39 | 3,45 | 3,50 | 3,55 | 3,61 | 3,66 |
| 70 | 3,71 | 3,76 | 3,82 | 3,87 | 3,92 | 3,98 | 4,03 | 4,08 | 4,14 | 4,19 |
| 80 | 4,24 | 4,30 | 4,35 | 4,40 | 4,45 | 4,51 | 4,56 | 4,61 | 4,67 | 4,72 |
| 90 | 4,77 | 4,83 | 4,88 | 4,93 | 4,98 | 5,04 | 5,09 | 5,14 | 5,20 | 5,25 |
| 100 | 5,30 | | | | | | | | | |

+ 3⁰ (5,687 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,06 | 0,12 | 0,17 | 0,23 | 0,28 | 0,34 | 0,40 | 0,46 | 0,51 |
| 10 | 0,57 | 0,63 | 0,68 | 0,74 | 0,80 | 0,85 | 0,91 | 0,97 | 1,02 | 1,08 |
| 20 | 1,14 | 1,20 | 1,25 | 1,31 | 1,37 | 1,42 | 1,48 | 1,54 | 1,59 | 1,65 |
| 30 | 1,71 | 1,76 | 1,82 | 1,88 | 1,93 | 1,99 | 2,05 | 2,10 | 2,16 | 2,22 |
| 40 | 2,28 | 2,33 | 2,39 | 2,45 | 2,50 | 2,56 | 2,62 | 2,67 | 2,73 | 2,79 |
| 50 | 2,84 | 2,89 | 2,95 | 3,00 | 3,06 | 3,12 | 3,17 | 3,23 | 3,29 | 3,35 |
| 60 | 3,41 | 3,47 | 3,53 | 3,58 | 3,64 | 3,70 | 3,75 | 3,81 | 3,87 | 3,92 |
| 70 | 3,98 | 4,04 | 4,09 | 4,15 | 4,21 | 4,27 | 4;32 | 4,38 | 4,44 | 4,49 |
| 80 | 4,55 | 4,61 | 4,66 | 4,72 | 4,78 | 4,83 | 4,89 | 4,95 | 5,00 | 5,06 |
| 90 | 5,12 | 5,18 | 5,23 | 5,29 | 5,35 | 5,40 | 5,46 | 5,52 | 5,57 | 5,63 |
| 100 | 5,69 | | | | | | | | | |

+ 4° (6,097 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.06 | 0.12 | 0,18 | 0,24 | 0,31 | 0,37 | 0,43 | 0,49 | 0.55 |
| 10 | 0,61 | 0.67 | 0,73 | 0,79 | 0,85 | 0,92 | 0,98 | 1,04 | 1,10 | 1,16 |
| 20 | 1.22 | 1,28 | 1.34 | 1 40 | 1,46 | 1,52 | 1,59 | 1,65 | 1,71 | 1,77 |
| 30 | 1,83 | 1,89 | 1,95 | 2,01 | 2,07 | 2,13 | 2,20 | 2.26 | 2.32 | 2,38 |
| 40 | 2,44 | 2.50 | 2,56 | 2,62 | 2,68 | 2,74 | 2,81 | 2,87 | 2,93 | 2,99 |
| 50 | 3,05 | 3.11 | 3,17 | 3.23 | 3,29 | 3,35 | 3,41 | 3,48 | 3,54 | 3,59 |
| 60 | 3,66 | 3,72 | 3,78 | 3,84 | 3,90 | 3.96 | 4,02 | 4,09 | 4,15 | 4,21 |
| 70 | 4,27 | 4,33 | 4,39 | 4,45 | 4,51 | 4,57 | 4,63 | 4.69 | 4,76 | 4,82 |
| 80 | 4,88 | 4,94 | 5,00 | 5,06 | 5,12 | 5,18 | 5,24 | 5,30 | 5,37 | 5,43 |
| 90 | 5,49 | 5,55 | 5,61 | 5,67 | 5,73 | 5,79 | 5,85 | 5,91 | 5,98 | 6,04 |
| 100 | 6,10 | | | | | | | | | |

+ 5° (6,534 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,07 | 0,13 | 0.20 | 0,26 | 0,33 | 0,39 | 0,46 | 0,52 | 0,59 |
| 10 | 0.65 | 0,72 | 0,78 | 0,85 | 0.92 | 0,98 | 1,05 | 1,11 | 1,18 | 1,24 |
| 20 | 1,31 | 1.37 | 1,44 | 1,50 | 1,57 | 1,63 | 1,70 | 1,76 | 1,83 | 1,89 |
| 30 | 1,96 | 2.03 | 2,09 | 2,16 | 2.22 | 2,29 | 2,35 | 2,41 | 2,48 | 2,54 |
| 40 | 2,61 | 2,67 | 2,74 | 2,81 | 2,88 | 2,94 | 3,01 | 3,07 | 3,14 | 3,20 |
| 50 | 3,27 | 3,33 | 3,40 | 3,46 | 3,53 | 3,59 | 3,66 | 3,72 | 3,79 | 3,85 |
| 60 | 3,92 | 3,99 | 4.05 | 4,12 | 4,18 | 4,25 | 4,31 | 4,38 | 4,44 | 4,51 |
| 70 | 4,57 | 4,64 | 4,70 | 4,77 | 4,84 | 4,90 | 4,97 | 5,03 | 5,10 | 5,16 |
| 80 | 5,23 | 5,29 | 5,36 | 5,42 | 5.49 | 5,55 | 5,62 | 5,68 | 5,75 | 5,81 |
| 90 | 5,88 | 5,95 | 6,01 | 6,08 | 6,14 | 6,21 | 6.27 | 6,34 | 6,40 | 6,47 |
| 100 | 6,53 | | | | | | | | | |

+ 6° (6,998 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.07 | 0,14 | 0,21 | 0,28 | 0,35 | 0,42 | 0,49 | 0,56 | 0,63 |
| 10 | 0,70 | 0,77 | 0.84 | 0,91 | 0,98 | 1,05 | 1,12 | 1,19 | 1,26 | 1.33 |
| 20 | 1,40 | 1,47 | 1,54 | 1.61 | 1.68 | 1.75 | 1,82 | 1,89 | 1,96 | 2,03 |
| 30 | 2,10 | 2,17 | 2,24 | 2,31 | 2,38 | 2,45 | 2,52 | 2.59 | 2,66 | 2.73 |
| 40 | 2,80 | 2,87 | 2,94 | 3,01 | 3,08 | 3.15 | 3,22 | 3,29 | 3,36 | 3,43 |
| 50 | 3.50 | 3.57 | 3,64 | 3,71 | 3,78 | 3,85 | 3,92 | 3,99 | 4.06 | 4,13 |
| 60 | 4,20 | 4.27 | 4,34 | 4,41 | 4,48 | 4,55 | 4,62 | 4,69 | 4,76 | 4,83 |
| 70 | 4,90 | 4,97 | 5,04 | 5,11 | 5.18 | 5.25 | 5,32 | 5,39 | 5,46 | 5,53 |
| 80 | 5,60 | 5,67 | 5,74 | 5,81 | 5,88 | 5.95 | 6,02 | 6,09 | 6,16 | 6,23 |
| 90 | 6,30 | 6.37 | 6,44 | 6,51 | 6,58 | 6,65 | 6,72 | 6,79 | 6,86 | 6,93 |
| 100 | 7,00 | | | | | | | | | |

+ 7° (7,492 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,08 | 0,15 | 0,23 | 0,30 | 0,38 | 0,45 | 0,52 | 0,60 | 0,67 |
| 10 | 0,75 | 0,82 | 0,90 | 0,97 | 1,05 | 1,12 | 1,20 | 1,27 | 1,35 | 1,42 |
| 20 | 1,50 | 1,57 | 1,65 | 1,72 | 1,80 | 1,87 | 1,95 | 2,02 | 2,10 | 2,17 |
| 30 | 2,25 | 2,32 | 2,40 | 2,47 | 2,55 | 2,62 | 2,70 | 2,77 | 2,85 | 2,92 |
| 40 | 3,00 | 3,07 | 3,15 | 3,22 | 3,30 | 3,37 | 3,45 | 3,52 | 3.60 | 3,67 |
| 50 | 3,75 | 3,82 | 3,90 | 3,97 | 4,05 | 4,12 | 4,20 | 4,27 | 4,35 | 4,42 |
| 60 | 4,50 | 4,57 | 4,65 | 4,72 | 4,80 | 4,87 | 4.94 | 5,02 | 5,09 | 5,17 |
| 70 | 5,24 | 5,32 | 5,39 | 5,47 | 5,54 | 5,62 | 5,69 | 5,77 | 5,84 | 5,92 |
| 80 | 5,99 | 6,07 | 6,14 | 6,22 | 6,29 | 6,37 | 6,44 | 6,52 | 6,59 | 6,67 |
| 90 | 6,74 | 6,82 | 6,89 | 6,97 | 7,04 | 7,12 | 7,19 | 7,27 | 7,34 | 7,42 |
| 100 | 7,50 | | | | | | | | | |

+ 8° (8,017 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,08 | 0,16 | 0,24 | 0,32 | 0,40 | 0,48 | 0,56 | 0,64 | 0,72 |
| 10 | 0,80 | 0,88 | 0.96 | 1,04 | 1,12 | 1,20 | 1,28 | 1,36 | 1,44 | 1,52 |
| 20 | 1,60 | 1,68 | 1,76 | 1,84 | 1,92 | 2,00 | 2,08 | 2,16 | 2,24 | 2,32 |
| 30 | 2,40 | 2,48 | 2,56 | 2,64 | 2,72 | 2,80 | 2,89 | 2,97 | 3,05 | 3,13 |
| 40 | 3,21 | 3,29 | 3,37 | 3,45 | 3.53 | 3,61 | 3,69 | 3,77 | 3,85 | 3,93 |
| 50 | 4,01 | 4,09 | 4,17 | 4,25 | 4,33 | 4.41 | 4,49 | 4,57 | 4,65 | 4,73 |
| 60 | 4,81 | 4,89 | 4,97 | 5,05 | 5,13 | 5,21 | 5,29 | 5,37 | 5,45 | 5.53 |
| 70 | 5,61 | 5,69 | 5,77 | 5,85 | 5,93 | 6,01 | 6,09 | 6,17 | 6,25 | 6,33 |
| 80 | 6,41 | 6,49 | 6,57 | 6,65 | 6,73 | 6,81 | 6,89 | 6,97 | 7,05 | 7,13 |
| 90 | 7,22 | 7,30 | 7,38 | 7,46 | 7,54 | 7,62 | 7,70 | 7,78 | 7,86 | 7,94 |
| 100 | 8,02 | | | | | | | | | |

+ 9° (8,574 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,09 | 0,17 | 0,26 | 0,34 | 0,43 | 0,51 | 0.60 | 0,69 | 0,77 |
| 10 | 0,86 | 0,94 | 1,03 | 1.12 | 1,20 | 1,29 | 1,37 | 1,46 | 1,54 | 1,63 |
| 20 | 1,72 | 1,80 | 1,89 | 1,97 | 2,06 | 2,14 | 2.23 | 2,32 | 2,40 | 2,49 |
| 30 | 2,57 | 2,66 | 2,74 | 2,83 | 2,92 | 3,00 | 3,09 | 3,17 | 3,25 | 3,34 |
| 40 | 3,43 | 3,51 | 3,60 | 3,69 | 3.77 | 3,86 | 3,94 | 4,03 | 4,12 | 4,20 |
| 50 | 4,29 | 4,37 | 4,46 | 4,54 | 4,63 | 4,72 | 4,80 | 4,89 | 4,97 | 5,06 |
| 60 | 5,14 | 5,23 | 5,32 | 5,40 | 5,49 | 5,57 | 5,66 | 5,74 | 5,83 | 5,92 |
| 70 | 6,00 | 6,09 | 6,17 | 6,26 | 6,35 | 6,43 | 6,51 | 6,60 | 6,69 | 6,77 |
| 80 | 6,86 | 6,95 | 7,03 | 7,12 | 7,20 | 7,29 | 7,37 | 7,46 | 7,55 | 7,63 |
| 90 | 7,72 | 7,80 | 7,89 | 7,97 | 8,06 | 8,15 | 8,23 | 8,32 | 8,40 | 8,49 |
| 100 | 8,57 | | | | | | | | | |

+ 10⁰ (9,165 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,09 | 0,18 | 0,28 | 0,37 | 0,46 | 0,55 | 0.64 | 0,73 | 0,82 |
| 10 | 0.92 | 1.01 | 1.10 | 1,19 | 1,28 | 1,38 | 1,47 | 1.56 | 1,65 | 1,74 |
| 20 | 1,83 | 1,92 | 2,02 | 2,11 | 2,20 | 2,29 | 2,38 | 2,47 | 2,56 | 2,65 |
| 30 | 2.75 | 2,84 | 2,93 | 3,02 | 3,12 | 3,21 | 3.30 | 3.39 | 3,48 | 3,57 |
| 40 | 3,67 | 3,76 | 3,85 | 3,94 | 4,03 | 4,12 | 4,22 | 4.31 | 4,40 | 4,49 |
| 50 | 4,58 | 4,67 | 4,76 | 4.86 | 4,95 | 5,04 | 5,13 | 5,22 | 5,32 | 5,41 |
| 60 | 5.50 | 5,59 | 5,68 | 5,77 | 5,87 | 5,96 | 6,05 | 6,14 | 6,23 | 6,32 |
| 70 | 6.42 | 6,51 | 6,60 | 6,69 | 6,78 | 6,87 | 6,97 | 7,06 | 7,15 | 7,24 |
| 80 | 7,33 | 7.42 | 7,52 | 7,61 | 7,70 | 7,79 | 7,88 | 7,97 | 8,07 | 8,16 |
| 90 | 8,25 | 8,34 | 8,43 | 8,52 | 8,62 | 8,71 | 8,80 | 8,89 | 8,98 | 9,07 |
| 100 | 9,17 | | | | | | | | | |

+ 11⁰ (9,792 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,10 | 0,20 | 0.29 | 0,39 | 0,49 | 0,59 | 0,69 | 0,78 | 0,88 |
| 10 | 0,98 | 1,08 | 1.18 | 1.27 | 1,37 | 1,47 | 1,57 | 1,66 | 1.76 | 1,86 |
| 20 | 1.96 | 2.06 | 2.15 | 2.25 | 2,35 | 2,45 | 2,55 | 2,64 | 2,74 | 2,84 |
| 30 | 2.94 | 3,04 | 3,13 | 3.23 | 3.33 | 3,43 | 3,53 | 3,62 | 3,72 | 3,82 |
| 40 | 3,92 | 4.02 | 4,11 | 4,21 | 4,31 | 4,41 | 4,50 | 4.60 | 4.70 | 4,80 |
| 50 | 4,90 | 4,99 | 5,09 | 5,19 | 5,29 | 5,39 | 5,48 | 5,58 | 5,68 | 5,78 |
| 60 | 5.88 | 5,97 | 6.07 | 6,17 | 6,27 | 6,37 | 6,46 | 6,56 | 6,66 | 6,76 |
| 70 | 6,85 | 6,95 | 7,05 | 7.15 | 7,25 | 7,34 | 7,44 | 7,54 | 7,64 | 7,74 |
| 80 | 7.83 | 7,93 | 8.03 | 8,13 | 8,23 | 8,32 | 8,42 | 8,52 | 8,62 | 8,72 |
| 90 | 8,81 | 8,91 | 9,01 | 9,11 | 9,20 | 9,30 | 9,40 | 9,50 | 9,60 | 9,69 |
| 100 | 9,79 | | | | | | | | | |

+ 12⁰ (10,457 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,11 | 0.21 | 0.31 | 0,42 | 0,52 | 0,63 | 0.73 | 0.84 | 0,94 |
| 10 | 1.05 | 1,15 | 1,26 | 1,36 | 1,46 | 1,57 | 1,67 | 1.78 | 1.88 | 1.99 |
| 20 | 2,09 | 2,20 | 2,30 | 2,41 | 2,51 | 2,61 | 2.72 | 2.82 | 2.93 | 3,03 |
| 30 | 3,14 | 3.24 | 3,35 | 3,45 | 3.55 | 3.66 | 3.76 | 3,87 | 3,97 | 4.08 |
| 40 | 4,18 | 4,29 | 4,39 | 4,50 | 4,60 | 4,71 | 4,81 | 4,92 | 5.02 | 5,12 |
| 50 | 5,23 | 5.33 | 5,44 | 5,54 | 5.65 | 5,75 | 5,86 | 5,96 | 6,07 | 6,17 |
| 60 | 6,27 | 6.38 | 6,48 | 6,59 | 6.69 | 6,80 | 6,90 | 7,01 | 7,11 | 7,22 |
| 70 | 7.32 | 7.42 | 7,53 | 7,63 | 7,74 | 7.84 | 7,95 | 8,05 | 8,16 | 8,26 |
| 80 | 8,37 | 8,47 | 8.58 | 8,68 | 8.78 | 8,89 | 8,99 | 9,10 | 9,20 | 9,31 |
| 90 | 9.41 | 9.52 | 9,62 | 9,73 | 9,83 | 9,93 | 10,0 | 10,1 | 10,3 | 10,4 |
| 100 | 10,5 | | | | | | | | | |

+ 13⁰ (11,162 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,11 | 0,22 | 0,34 | 0,45 | 0,56 | 0,67 | 0,78 | 0,89 | 1,01 |
| 10 | 1,12 | 1,23 | 1,34 | 1,45 | 1,56 | 1,67 | 1,78 | 1,89 | 2,00 | 2,12 |
| 20 | 2,23 | 2,34 | 2,45 | 2,57 | 2,68 | 2.79 | 2,90 | 3,01 | 3,13 | 3,24 |
| 30 | 3,35 | 3,46 | 3.57 | 3,68 | 3,79 | 3,90 | 4,02 | 4,13 | 4,24 | 4.35 |
| 40 | 4,46 | 4,58 | 4,69 | 4,80 | 4,91 | 5.02 | 5.13 | 5,25 | 5,36 | 5,47 |
| 50 | 5,58 | 5,69 | 5.80 | 5,92 | 6,03 | 6,14 | 6.25 | 6,36 | 6,47 | 6,58 |
| 60 | 6,70 | 6,81 | 6,92 | 7,03 | 7,14 | 7,26 | 7,37 | 7,48 | 7,59 | 7,70 |
| 70 | 7,81 | 7,93 | 8,04 | 8,15 | 8,26 | 8,37 | 8,48 | 8,59 | 8,71 | 8,82 |
| 80 | 8,93 | 9,04 | 9,15 | 9,26 | 9,38 | 9,49 | 9.60 | 9,71 | 9,82 | 9,83 |
| 90 | 10,1 | 10,2 | 10,3 | 10,4 | 10,5 | 10,6 | 10,7 | 10,8 | 10,9 | 11,1 |
| 100 | 11,2 | | | | | | | | | |

+ 14⁰ (11,908 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,12 | 0,24 | 0,36 | 0.48 | 0,60 | 0,72 | 0,83 | 0,95 | 1.07 |
| 10 | 1.19 | 1,31 | 1,43 | 1,55 | 1,67 | 1,79 | 1,91 | 2,02 | 2.14 | 2,26 |
| 20 | 2.38 | 2.50 | 2,62 | 2,74 | 2,86 | 2,98 | 3.10 | 3,22 | 3,33 | 3,45 |
| 30 | 3,57 | 3,69 | 3.81 | 3,93 | 4,05 | 4,17 | 4,29 | 4,41 | 4.52 | 4,63 |
| 40 | 4,76 | 4,88 | 5,00 | 5,12 | 5,24 | 5,36 | 5,48 | 5,60 | 5,72 | 5,83 |
| 50 | 5,95 | 6,07 | 6,19 | 6,31 | 6,43 | 6,55 | 6,67 | 6,79 | 6.91 | 7,03 |
| 60 | 7,15 | 7,26 | 7,38 | 7,59 | 7,62 | 7.74 | 7,86 | 7,98 | 8,10 | 8,22 |
| 70 | 8,34 | 8,46 | 8,57 | 8,69 | 8,81 | 8.93 | 9,05 | 9,17 | 9,29 | 9,41 |
| 80 | 9.53 | 9.65 | 9,77 | 9,88 | 10,0 | 10,1 | 10,2 | 10,4 | 10,5 | 10,6 |
| 90 | 10,7 | 10,8 | 11,0 | 11,1 | 11,2 | 11.3 | 11,4 | 11,6 | 11,7 | 11,8 |
| 100 | 11,9 | | | | | | | | | |

+ 15⁰ (12,699 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,13 | 0,25 | 0,38 | 0,51 | 0,64 | 0,76 | 0,89 | 1,02 | 1.14 |
| 10 | 1.27 | 1,40 | 1,52 | 1,65 | 1,78 | 1,91 | 2,03 | 2,16 | 2,29 | 2,41 |
| 20 | 2,54 | 2,67 | 2,79 | 2,92 | 3,05 | 3,18 | 3,30 | 3,43 | 3,56 | 3.68 |
| 30 | 3,81 | 3,94 | 4,06 | 4,19 | 4,32 | 4,45 | 4,57 | 4,70 | 4.83 | 4,95 |
| 40 | 5,08 | 5,21 | 5,33 | 5,46 | 5,59 | 5,72 | 5,84 | 5,97 | 6,10 | 6,22 |
| 50 | 6,35 | 6,48 | 6,60 | 6,73 | 6,86 | 6,99 | 7,11 | 7,24 | 7,37 | 7,49 |
| 60 | 7,62 | 7,75 | 7,87 | 8,00 | 8,13 | 8,26 | 8,38 | 8,51 | 8,64 | 8,76 |
| 70 | 8,89 | 9,02 | 9,14 | 9.27 | 9,40 | 9,53 | 9,65 | 9,78 | 9,91 | 10,0 |
| 80 | 10.2 | 10,3 | 10.4 | 10,5 | 10.7 | 10,8 | 10,9 | 11.1 | 11.2 | 11,3 |
| 90 | 11.4 | 11.6 | 11.7 | 11,8 | 11,9 | 12,1 | 12,2 | 12,3 | 12,5 | 12,6 |
| 100 | 12,7 | | | | | | | | | |

+ 16° (13,536 mm)

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,14 | 0,27 | 0,41 | 0,54 | 0,68 | 0,81 | 0,95 | 1,08 | 1,22 |
| 10 | 1,35 | 1,49 | 1,62 | 1,76 | 1,90 | 2,03 | 2,17 | 2,30 | 2,44 | 2,57 |
| 20 | 2,71 | 2,84 | 2,98 | 3,11 | 3,25 | 3,38 | 3,52 | 3,66 | 3,79 | 3,93 |
| 30 | 4,06 | 4,20 | 4,33 | 4,46 | 4,60 | 4,74 | 4,87 | 5,01 | 5,14 | 5,28 |
| 40 | 5,41 | 5,55 | 5,69 | 5,82 | 5,96 | 6.09 | 6,23 | 6.36 | 6,50 | 6,63 |
| 50 | 6,77 | 6,90 | 7,04 | 7,17 | 7,31 | 7,45 | 7,58 | 7,71 | 7,85 | 7,99 |
| 60 | 8,12 | 8,26 | 8,39 | 8,53 | 8,66 | 8,80 | 8,93 | 8,07 | 8,21 | 8,34 |
| 70 | 9.48 | 9.61 | 9,75 | 9,88 | 10,0 | 10,2 | 10,3 | 10,4 | 10,6 | 10,7 |
| 80 | 10,8 | 11.0 | 11,1 | 11,2 | 11,4 | 11,5 | 11,6 | 11,8 | 11,9 | 12,1 |
| 90 | 12,2 | 12,3 | 12,5 | 12,6 | 12,7 | 12,9 | 13,0 | 13,1 | 13,3 | 13,4 |
| 100 | 13,5 | | | | | | | | | |

+ 17° (14,421 mm)

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,14 | 0,29 | 0,43 | 0,58 | 0,72 | 0,87 | 1,01 | 1,15 | 1,30 |
| 10 | 1.44 | 1,59 | 1,73 | 1.87 | 2,02 | 2,16 | 2,31 | 2,45 | 2,59 | 2,74 |
| 20 | 2,88 | 3,03 | 3,17 | 3,32 | 3,46 | 3,60 | 3,75 | 3,89 | 4.04 | 4,18 |
| 30 | 4,33 | 4,47 | 4.61 | 4,76 | 4,90 | 5,05 | 5.19 | 5,34 | 5.48 | 5,62 |
| 40 | 5,77 | 5,91 | 6,06 | 6,20 | 6,34 | 6,49 | 6,63 | 6,78 | 6,92 | 7,06 |
| 50 | 7,21 | 7,36 | 7,50 | 7,64 | 7,79 | 7,93 | 8,08 | 8,22 | 8,36 | 8,51 |
| 60 | 8,65 | 8,80 | 8,94 | 9,09 | 9,23 | 9,37 | 9,52 | 9,66 | 9,81 | 9,95 |
| 70 | 10,1 | 10,2 | 10,4 | 10,5 | 10,7 | 10,8 | 11.0 | 11.1 | 11,3 | 11.4 |
| 80 | 11,5 | 11,7 | 11.8 | 12,0 | 12,1 | 12,3 | 12.4 | 12,6 | 12,7 | 12,8 |
| 90 | 13,0 | 13,1 | 13,3 | 13,4 | 13,6 | 13,7 | 13,8 | 14,0 | 14,1 | 14,3 |
| 100 | 14,4 | | | | | | | | | |

+ 18 (15,357 mm)

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,15 | 0,31 | 0,46 | 0,61 | 0,77 | 0,92 | 1,07 | 1,23 | 1,38 |
| 10 | 1,54 | 1,69 | 1,84 | 2,00 | 2,15 | 2,30 | 2,46 | 2,61 | 2,76 | 2,92 |
| 20 | 3,07 | 3,23 | 3,38 | 3,53 | 3,69 | 3,84 | 3,99 | 4,15 | 4,30 | 4.45 |
| 30 | 4,61 | 4,76 | 4.91 | 5,07 | 5,22 | 5,38 | 5,53 | 5,68 | 5,84 | 5,99 |
| 40 | 6,14 | 6,30 | 6,45 | 6,60 | 6,76 | 6,91 | 7,06 | 7,22 | 7,37 | 7,53 |
| 50 | 7,68 | 7,83 | 7,99 | 8,14 | 8,29 | 8,45 | 8,60 | 8,75 | 8,91 | 9,06 |
| 60 | 9,21 | 9,37 | 9,52 | 9,68 | 9,83 | 9,98 | 10,1 | 10,3 | 10,4 | 10,6 |
| 70 | 10,7 | 10,9 | 11,1 | 11,2 | 11,4 | 11,5 | 11,7 | 11,8 | 12,0 | 12,1 |
| 80 | 12,3 | 12,4 | 12,6 | 12,7 | 12,9 | 13,1 | 13,2 | 13,4 | 13,5 | 13,7 |
| 90 | 13,8 | 14,0 | 14,1 | 14,3 | 14,4 | 14,6 | 14,7 | 14,9 | 15,1 | 15,2 |
| 100 | 15,4 | | | | | | | | | |

+ 19⁰ (16,346 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,16 | 0,33 | 0,49 | 0,65 | 0,82 | 0,98 | 1,14 | 1,31 | 1,47 |
| 10 | 1,64 | 1,80 | 1,96 | 2,13 | 2,29 | 2,45 | 2,62 | 2,78 | 2.94 | 3,11 |
| 20 | 3,27 | 3,43 | 5,60 | 3,76 | 3,92 | 4,09 | 4,25 | 4,41 | 4,58 | 4,74 |
| 30 | 4,90 | 5,07 | 5,23 | 5,39 | 5,56 | 5,72 | 5,88 | 6,04 | 6,21 | 6,38 |
| 40 | 6,54 | 6,70 | 6,87 | 7,03 | 7,19 | 7,36 | 7,52 | 7,68 | 8,85 | 9,01 |
| 50 | 8,17 | 8,34 | 8,50 | 8,66 | 8,83 | 8,99 | 9,15 | 9,32 | 9,48 | 9,64 |
| 60 | 9,81 | 9,97 | 10,1 | 10,3 | 10,5 | 10,6 | 10,8 | 11,0 | 11,1 | 11,3 |
| 70 | 11,4 | 11.6 | 11,8 | 11,9 | 12,1 | 12.3 | 12,4 | 12,6 | 12,8 | 12,9 |
| 80 | 13,1 | 13,2 | 13,4 | 13,6 | 13,7 | 13,9 | 14,1 | 14,2 | 14.4 | 14,5 |
| 90 | 14,7 | 14,9 | 15,0 | 15,2 | 15,4 | 15,5 | 15,7 | 15,9 | 16,0 | 16,2 |
| 100 | 16,4 | | | | | | | | | |

+ 20⁰ (17,391 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.17 | 0,35 | 0,52 | 0,70 | 0,87 | 1,04 | 1,22 | 1,39 | 1,57 |
| 10 | 1,74 | 1,91 | 2,09 | 2,26 | 2,44 | 2,61 | 2,78 | 2,96 | 3,13 | 3,31 |
| 20 | 3,48 | 3,65 | 3,83 | 4,00 | 4,17 | 4,35 | 4,52 | 2,70 | 4,87 | 5,04 |
| 30 | 5,22 | 5,39 | 5,57 | 5,74 | 5,91 | 6,09 | 6,26 | 6,44 | 6,61 | 6,78 |
| 40 | 6,96 | 7,13 | 7,30 | 7,48 | 7,65 | 7,83 | 8,00 | 8.17 | 8,35 | 8,52 |
| 50 | 8,70 | 8,87 | 9,04 | 9,22 | 9,39 | 9,57 | 9,74 | 9,91 | 10,1 | 10,3 |
| 60 | 10,4 | 10,6 | 10,8 | 10,9 | 11,1 | 11,3 | 11,5 | 11,7 | 11,8 | 12,0 |
| 70 | 12,2 | 12,4 | 12,5 | 12,7 | 12,9 | 13,0 | 13,2 | 13,4 | 13,6 | 13,7 |
| 80 | 13,9 | 14,1 | 14,3 | 14,4 | 14,6 | 14,8 | 15,0 | 15,1 | 15,3 | 15,5 |
| 90 | 15,7 | 15,8 | 16,0 | 16,2 | 16,3 | 16,5 | 16,7 | 16,9 | 17,0 | 17,2 |
| 100 | 17,4 | | | | | | | | | |

+ 21⁰ (18,495 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,19 | 0,37 | 0,56 | 0,74 | 0,93 | 1,11 | 1.30 | 1,48 | 1,66 |
| 10 | 1,85 | 2,03 | 2,22 | 2,41 | 2,59 | 2,77 | 2,96 | 3,13 | 3.33 | 3,51 |
| 20 | 3,70 | 3,88 | 4,07 | 4,25 | 4,44 | 4,62 | 4,81 | 4,99 | 5,18 | 5.36 |
| 30 | 5.55 | 5,73 | 5,92 | 6,10 | 6,29 | 6,47 | 6,66 | 6,84 | 7,03 | 7,21 |
| 40 | 7,40 | 7,58 | 7,77 | 7,95 | 8,14 | 8,32 | 8,50 | 8,69 | 8,88 | 9,06 |
| 50 | 9,25 | 9,43 | 9,61 | 9,80 | 9,99 | 10,2 | 10,4 | 10,5 | 10,7 | 10,9 |
| 60 | 11,1 | 11,3 | 11,5 | 11,7 | 11,8 | 12,0 | 12,2 | 12,4 | 12,6 | 12,8 |
| 70 | 13,0 | 13,1 | 13,3 | 13,5 | 13,7 | 13,9 | 14,1 | 14,2 | 14,4 | 14,6 |
| 80 | 14,8 | 15,0 | 15,2 | 15,4 | 15,5 | 15,7 | 15,9 | 16,1 | 16,3 | 16,5 |
| 90 | 16,7 | 16,8 | 17,0 | 17,2 | 17,4 | 17,6 | 17,8 | 17,9 | 18,1 | 18,3 |
| 100 | 18,5 | | | | | | | | | |

+ 22° (19,659 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,20 | 0,40 | 0,59 | 0,79 | 0,98 | 1,18 | 1,38 | 1,57 | 1,77 |
| 10 | 1,97 | 2,16 | 2,36 | 2.56 | 2,75 | 2,95 | 3.15 | 3.34 | 3,54 | 3.74 |
| 20 | 3.93 | 4,13 | 4,33 | 4,52 | 4,72 | 4,92 | 5,11 | 5,31 | 5,51 | 5,70 |
| 30 | 5,90 | 6,09 | 6,29 | 6,49 | 6,68 | 6.88 | 7,07 | 7,27 | 7,47 | 7,67 |
| 40 | 7,86 | 8,06 | 8,26 | 8,45 | 8,65 | 8,85 | 9,04 | 9,24 | 9,44 | 9,63 |
| 50 | 9,83 | 10,0 | 10,2 | 10,4 | 10,6 | 10,8 | 10,0 | 11,2 | 11,4 | 11,6 |
| 60 | 11,8 | 12,0 | 12,2 | 12,4 | 12,6 | 12,8 | 13,0 | 13,2 | 13,4 | 13,6 |
| 70 | 13,8 | 14,0 | 14,2 | 14,4 | 14,6 | 14,7 | 14,9 | 15,1 | 15,3 | 15,5 |
| 80 | 15,7 | 15,9 | 16,1 | 16,3 | 16,5 | 16,7 | 16,9 | 17,1 | 17,3 | 17,5 |
| 90 | 17.7 | 17,9 | 18,1 | 18,3 | 18,5 | 18,7 | 18,9 | 19,1 | 19,3 | 19,5 |
| 100 | 19,7 | | | | | | | | | |

+ 23° (20,888 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,21 | 0,42 | 0,63 | 0.84 | 1.04 | 1,25 | 1,46 | 1,67 | 1,88 |
| 10 | 2.09 | 2.30 | 2.51 | 2,72 | 2,92 | 3,13 | 3,34 | 3,55 | 3,76 | 3,97 |
| 20 | 4.18 | 4.39 | 4,60 | 4.80 | 5,01 | 5.22 | 5.43 | 5,64 | 5,85 | 6.06 |
| 30 | 6.27 | 6,48 | 6,68 | 6,89 | 7.10 | 7,31 | 7,52 | 7,73 | 7,94 | 8,15 |
| 40 | 8,36 | 8,56 | 8,77 | 8,98 | 9.19 | 9,40 | 9,61 | 9,82 | 10,0 | 10.2 |
| 50 | 10,4 | 10,7 | 10,9 | 11,1 | 11,3 | 11.5 | 11,7 | 11.9 | 12,1 | 12,3 |
| 60 | 12,5 | 12,7 | 13,0 | 13.2 | 13.4 | 13,6 | 13,8 | 14,0 | 14,2 | 14.4 |
| 70 | 14.6 | 14.8 | 15,0 | 15.2 | 15.5 | 15,7 | 15,9 | 16.1 | 16,3 | 16,5 |
| 80 | 16,7 | 16.9 | 17,1 | 17,3 | 17,6 | 17,8 | 18,0 | 18,2 | 18,4 | 18,6 |
| 90 | 18,8 | 19,0 | 19,2 | 19,4. | 19.6 | 19,8 | 20,1 | 20,3 | 20,5 | 20,7 |
| 100 | 20,9 | | | | | | | | | |

+ 24° (22,184 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,22 | 0,44 | 0,67 | 0,89 | 1,11 | 1,33 | 1,55 | 1,78 | 2,00 |
| 10 | 2,22 | 2.44 | 2,66 | 2,88 | 3.11 | 3,33 | 3,55 | 3,77 | 3.99 | 4.22 |
| 20 | 4.44 | 4,66 | 4.88 | 5,10 | 5,32 | 5,55 | 5,77 | 5,99 | 6,21 | 6.43 |
| 30 | 6.66 | 6,88 | 7,10 | 7,32 | 7.54 | 7,76 | 7.99 | 8.21 | 8,43 | 8,65 |
| 40 | 8,87 | 9,10 | 9,32 | 9,54 | 9,76 | 9,98 | 10,2 | 10,4 | 10,7 | 10,9 |
| 50 | 11,1 | 11,3 | 11,5 | 11,8 | 12.0 | 12.2 | 12.4 | 12,6 | 12,9 | 13,1 |
| 60 | 13,3 | 13,5 | 13,8 | 14,0 | 14,2 | 14,4 | 14,6 | 14,9 | 15,1 | 15,3 |
| 70 | 15.5 | 15.8 | 16,0 | 16,2 | 16,4 | 16,6 | 16.9 | 17.1 | 17.3 | 17,5 |
| 80 | 17,8 | 18,0 | 18,2 | 18,4 | 18,6 | 18.9 | 19,1 | 19.3 | 19,5 | 19,8 |
| 90 | 20,0 | 20,2 | 20.4 | 20,6 | 20,9 | 21,1 | 21,3 | 21.5 | 21,7 | 22,0 |
| 100 | 22,2 | | | | | | | | | |

+ 25⁰ (23,550 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,24 | 0,47 | 0,71 | 0,94 | 1,18 | 1,41 | 1,65 | 1,88 | 2,12 |
| 10 | 2,36 | 2,59 | 2,83 | 3,06 | 3,30 | 3,54 | 3,77 | 4,01 | 4.24 | 4.48 |
| 20 | 4,71 | 4,95 | 5,18 | 5,42 | 5,65 | 5,89 | 6,13 | 6,36 | 6.60 | 6,83 |
| 30 | 7,07 | 7,30 | 7,54 | 7.77 | 8,01 | 8,25 | 8,48 | 8,72 | 8,95 | 8,19 |
| 40 | 9,42 | 9,66 | 9.89 | 10,2 | 10,4 | 10,6 | 10,8 | 11,1 | 11,3 | 11,5 |
| 50 | 11,8 | 12,0 | 12,2 | 12,5 | 12,7 | 13,0 | 13,2 | 13.4 | 13,7 | 13,9 |
| 60 | 14,1 | 14.4 | 14,6 | 14,8 | 15,1 | 15.3 | 15,6 | 15,8 | 16,0 | 16,3 |
| 70 | 16,5 | 16,7 | 17,0 | 17,2 | 17,4 | 17,7 | 17,9 | 18,1 | 18,4 | 18,6 |
| 80 | 18.8 | 19,1 | 19,3 | 19.6 | 19.8 | 20,0 | 20,3 | 20,5 | 20,7 | 21,0 |
| 90 | 21,2 | 21,4 | 21,7 | 21,9 | 22,1 | 22,4 | 22,6 | 22,9 | 23,1 | 23.3 |
| 100 | 23,6 | | | | | | | | | |

+ 26⁰ (24,988 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,25 | 0,50 | 0,75 | 1,00 | 1,25 | 1,50 | 1,75 | 2,00 | 2,25 |
| 10 | 2,5 | 2,75 | 3,00 | 3,25 | 3,50 | 3,75 | 4.00 | 4,25 | 4,50 | 4,75 |
| 20 | 5,0 | 5,25 | 5,50 | 5,75 | 6,00 | 6,25 | 6,50 | 6.75 | 7,00 | 7,25 |
| 30 | 7,5 | 7,75 | 8,00 | 8,25 | 8,50 | 8,75 | 9,00 | 9,25 | 9,50 | 9,75 |
| 40 | 10,0 | 10,3 | 10,5 | 10,8 | 11,0 | 11,3 | 11,5 | 11,8 | 12,0 | 12,3 |
| 50 | 12,5 | 12,8 | 13,0 | 13,3 | 13,5 | 13,8 | 14,0 | 14,3 | 14.5 | 14,8 |
| 60 | 15,0 | 15,3 | 15,5 | 15,8 | 16,0 | 16,3 | 16,5 | 16,8 | 17,0 | 17,3 |
| 70 | 17,5 | 17,8 | 18,0 | 18,3 | 18,5 | 18,8 | 19,0 | 19,3 | 19,5 | 19,8 |
| 80 | 20,0 | 20,3 | 20,5 | 20,8 | 21,0 | 21,3 | 21,5 | 21,8 | 22,0 | 22,3 |
| 90 | 22,5 | 22,8 | 23,0 | 23,3 | 23,5 | 23,8 | 24,0 | 24,3 | 24,5 | 24,8 |
| 100 | 25,0 | | | | | | | | | |

+ 27⁰ (25,505 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,26 | 0,51 | 0,77 | 1,02 | 1,28 | 1,53 | 1,79 | 2,04 | 2,30 |
| 10 | 2,55 | 2,81 | 3,06 | 3,32 | 3,57 | 3,83 | 4,08 | 4,34 | 4,60 | 4,85 |
| 20 | 5,10 | 5,36 | 5,61 | 5,87 | 6,12 | 6,38 | 6,63 | 6,89 | 7,14 | 7,40 |
| 30 | 7,65 | 7,91 | 8,16 | 8,42 | 8,67 | 8,93 | 9,18 | 9,44 | 9,69 | 9,94 |
| 40 | 10,2 | 10,5 | 10,7 | 11,0 | 11,2 | 11,5 | 11,7 | 12,0 | 12,2 | 12,5 |
| 50 | 12,8 | 13,0 | 13,2 | 13.5 | 13,8 | 14,0 | 14.3 | 14,5 | 14,8 | 15,1 |
| 60 | 15,3 | 15,6 | 15,8 | 16,1 | 16,3 | 16,6 | 16,8 | 17,1 | 17,3 | 17,6 |
| 70 | 17,9 | 18,1 | 18,3 | 18,6 | 18,9 | 19,1 | 19,4 | 19,6 | 19,9 | 20.2 |
| 80 | 20,4 | 20,7 | 20,9 | 21,2 | 21,4 | 21,7 | 21,9 | 22,2 | 22,5 | 22,7 |
| 90 | 23,0 | 23,2 | 23,5 | 23,7 | 24,0 | 24,2 | 24,5 | 24,7 | 25,0 | 25,3 |
| 100 | 25,5 | | | | | | | | | |

+ 28⁰ (28,101 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,28 | 0,56 | 0,84 | 1,12 | 1,41 | 1,69 | 1,97 | 2,25 | 2,53 |
| 10 | 2,81 | 3,09 | 3,37 | 3,65 | 3,93 | 4,22 | 4,50 | 4,78 | 5,06 | 5,34 |
| 20 | 5,62 | 5,90 | 6,18 | 6,46 | 6,74 | 7,03 | 7,31 | 7,59 | 7,87 | 8,15 |
| 30 | 8,43 | 8,71 | 8,99 | 9,27 | 9,55 | 9,84 | 10,1 | 10,4 | 10,7 | 11,0 |
| 40 | 11,2 | 11,5 | 11,8 | 12,1 | 12,4 | 12,7 | 12,9 | 13,2 | 13,5 | 13,8 |
| 50 | 14,1 | 14,3 | 14,6 | 14,9 | 15,2 | 15,5 | 15,7 | 16,0 | 16,3 | 16,6 |
| 60 | 16,9 | 17,1 | 17,4 | 17,7 | 18,0 | 18,3 | 18,6 | 18,8 | 19,1 | 19,4 |
| 70 | 19,7 | 20,0 | 20,2 | 20,5 | 20,8 | 21,1 | 21,4 | 21,6 | 21,9 | 22,2 |
| 80 | 22,5 | 22,8 | 23,0 | 23,3 | 23,6 | 23,9 | 24,2 | 24,5 | 24,7 | 25,0 |
| 90 | 25,3 | 25,6 | 25,9 | 26,1 | 26,4 | 26,7 | 27,0 | 27,3 | 27,5 | 27,8 |
| 100 | 28,1 | | | | | | | | | |

+ 29⁰ (29,782 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,30 | 0,60 | 0,89 | 1,19 | 1,49 | 1,69 | 2,09 | 2,38 | 2,68 |
| 10 | 2,98 | 3,28 | 3,57 | 3,87 | 4,17 | 4,47 | 4,77 | 5,06 | 5,36 | 5,66 |
| 20 | 5,96 | 6,25 | 6,55 | 6,85 | 7,15 | 7,45 | 7,74 | 8,04 | 9,34 | 9,64 |
| 30 | 8,94 | 9,23 | 9,53 | 9,83 | 11,1 | 11,4 | 11,7 | 12,0 | 12,3 | 12,6 |
| 40 | 11,9 | 12,2 | 12,5 | 12,8 | 13,1 | 13,4 | 13,7 | 14,0 | 14,3 | 14,6 |
| 50 | 14,9 | 15,2 | 15,5 | 15,8 | 16,1 | 16,4 | 16,7 | 17,0 | 17,3 | 17,6 |
| 60 | 17,9 | 18,2 | 18,5 | 18,8 | 19,1 | 19,4 | 19,7 | 20,0 | 20,3 | 20,6 |
| 70 | 20,9 | 21,2 | 21,4 | 21,7 | 22,0 | 22,3 | 22,6 | 22,9 | 23,2 | 23,5 |
| 80 | 23,8 | 24,1 | 24,4 | 24,7 | 25,0 | 25,3 | 25,6 | 25,9 | 26,2 | 26,5 |
| 90 | 26,8 | 27,1 | 27,4 | 27,7 | 28,0 | 28,3 | 28,6 | 28,9 | 29,2 | 29,5 |
| 100 | 29,8 | | | | | | | | | |

+ 30⁰ (31,548 mm)

| | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,32 | 0,63 | 0,97 | 1,26 | 1,58 | 1,89 | 2,21 | 2,52 | 2,84 |
| 10 | 3,16 | 3,48 | 3,79 | 4,11 | 4,42 | 4,74 | 5,05 | 5,37 | 5,68 | 6,00 |
| 20 | 6,31 | 6,63 | 6,64 | 7,26 | 7,57 | 7,89 | 8,20 | 8,52 | 8,83 | 9,15 |
| 30 | 9,46 | 9,78 | 10,1 | 10,4 | 10,7 | 11,0 | 11,4 | 11,7 | 12,0 | 12,3 |
| 40 | 12,6 | 12,9 | 13,3 | 13,6 | 13,9 | 14,2 | 14,5 | 14,8 | 15,1 | 15,5 |
| 50 | 15,8 | 16,1 | 16,4 | 16,7 | 17,0 | 17,4 | 17,7 | 18,0 | 18,3 | 18,6 |
| 60 | 18,9 | 19,3 | 19,6 | 19,9 | 20,2 | 20,5 | 20,8 | 21,1 | 21,5 | 21,8 |
| 70 | 22,1 | 22,4 | 22,7 | 23,0 | 23,3 | 23,7 | 24,0 | 24,3 | 24,6 | 24,9 |
| 80 | 25,2 | 25,6 | 25,9 | 26,2 | 26,5 | 26,8 | 27,1 | 27,5 | 27,8 | 28,1 |
| 90 | 28,4 | 28,7 | 29,0 | 29,3 | 29,6 | 30,0 | 30,3 | 30,6 | 30,9 | 31,2 |
| 100 | 31,6 | | | | | | | | | |

# Über ein Saitenelektrometer.

Von Dr. **C. W. Lutz.**

*(Eingelaufen 8. März.)*

(Mit Tafel 1.)

Die elektrostatischen Messungen haben in neuerer Zeit eine erhöhte Bedeutung gewonnen; einmal durch die Entdeckung der radioaktiven Substanzen und die hiedurch veranlaßten Messungen, sodann durch den Aufschwung, den in den letzten Jahren die luftelektrische Forschung genommen hat. Zu diesen Messungen verwendet man hauptsächlich das Quadrantelektrometer und das Blattelektroskop. Neben den bekannten Vorzügen dieser Instrumente machen sich nun eine Reihe von Nachteilen bemerkbar, die gerade bei radioaktiven und luftelektrischen Messungen recht stören können. So beim Quadrantelektrometer namentlich die große Kapazität, die Trägheit des beweglichen Systemes und der Mangel der Transportfähigkeit; beim Elektroskope die geringe Empfindlichkeit, der engbegrenzte Meßbereich, die verhältnismäßig große Kapazität, sowie seine Untauglichkeit zur Messung kleiner Spannungen und zur Selbstregistrierung.

Diese Mängel gaben Veranlassung zu zahlreichen Verbesserungen, die im Laufe der letzten Jahre diese Instrumente erfuhren. Haben sich auch manche dieser Neukonstruktionen bei speziellen Messungen als vorteilhaft erwiesen, so wurde ein durchschlagender Erfolg doch nicht erzielt, denn meist treten, durch die Behebung des einen Nachteiles, die anderen nur desto empfindlicher hervor. Die Schuld hieran liegt meines

Erachtens nicht an den Konstrukteuren, sondern offenbar am Prinzip der erwähnten Meßinstrumente, welches eben den vielerlei Ansprüchen, die die neueren elektrostatischen Messungen daran stellen, nicht gewachsen ist. Man ist daher gezwungen, sich nach einer neuen Anordnung umzusehen.

Nun hat sich bei Galvanometern[1]) das Prinzip der lose gespannten Saite wohl bewährt, und unter den Vorzügen desselben sind gerade solche, die auch bei feinen elektrostatischen Messungen gefordert werden. Es liegt daher nahe, das Saitenprinzip zur Konstruktion eines Elektrometers („Saitenelektrometer") zu verwenden.

Ich habe schon vor zwei Jahren[2]) ein Modell eines solchen Elektrometers hergestellt und mich davon überzeugt, daß das neue Instrument in der Tat vielerlei Vorzüge vor den gebräuchlichen elektrostatischen Meßinstrumenten voraus hat. Seither habe ich eine Reihe von Verbesserungen daran angebracht und es nun in nachstehend beschriebener Form ausführen lassen. (Fig. 1a und 1b Taf. I.)

Innerhalb eines parallelepipetischen Gehäuses $G$ (Fig. 1a) aus Leichtguß (Magnalium) stehen sich zwei zu einander parallele Messingplatten $P_1$ $P_2$ gegenüber. Diese beiden Platten sind bei $H_1$ $S_1$ bzw. $H_2$ $S_2$ geführt und lassen sich durch die Mikrometerschrauben $M_1$ und $M_2$ mit Trommelteilung um meßbare Beträge einander nähern, oder voneinander entfernen.

---

[1]) Ader, Compt. rend. 124, 1440, 1897; La Nature 2, 115, 1897; L'Éclairage électrique 295, 1897; Elektrotechn. Zeitschr. 561, 1897.

W. Einthoven, Ann. d. Phys. (4) 12, 1059, 1903; 14, 182, 1904.

M. Edelmann jun., Physikal. Zeitschr. 7, 115, 1906.

[2]) Später erfuhr ich, daß auf ein Elektrometer, welches auf demselben Prinzipe beruht, von der Firma M. Th. Edelmann & Sohn hierselbst ein Musterschutz genommen ist.

Während der Drucklegung dieser Arbeit erhielt ich Kenntnis davon, daß auch Herr Professor Dr. Max Cremer hier auf die Idee eines Saitenelektrometers gekommen ist und ein derartiges, gemeinsam mit Herrn Dr. Max Edelmann jun. konstruiertes Instrument mit Erfolg zu elektrophysiologischen Messungen verwendet hat. (Siehe darüber: Münchener medizinische Wochenschrift Nr. 11, 1907.)

Durch geriefte Hartgummistopfen $H_1 h_1 S_1$ und $H_2 h_2 S_2$, in welchen die Führungsstifte gelagert sind, werden die beiden Platten $P_1 P_2$ vom Gehäuse isoliert. Die unteren Führungsstifte $S_1 S_2$ gehen isoliert durch das Gehäuse $G$ hindurch und können mit den beiden Polen $E_1 E_2$ einer Batterie, deren Mitte geerdet wird, verbunden werden, so daß die eine Platte auf ein $+$, die andere auf ein ebenso hohes $-$ Potential aufgeladen wird. Die zum Instrumente gehörige Batterie $B$ (Fig. 1b) ist eine kleine Akkumulatorenbatterie von 50 Zellen, die in ein Holzkästchen von 20 cm Breite, 11 cm Höhe, 16 cm Tiefe eingebaut ist, welches gleichzeitig dem Elektrometer als Fuß dient. Durch geeignete Schaltung der Batterie (Steckkontakte $E_1 E_2$) lassen sich die beiden Feldplatten $P_1 P_2$ (Fig. 1a) auf die Potentiale $\pm$ 50 Volt $\pm$ 30, $\pm$ 10 und $\pm$ 4 Volt bringen.

Genau in der Mitte zwischen den beiden Platten $P_1 P_2$ ist die Saite $W$, ein Wollastondraht von $\frac{1}{1000}$ mm Durchmesser und 10 cm Länge ausgespannt, mit beiden Enden an kurze Metallstiftchen angelötet, welche ihrerseits von je einem gerieften Hartgummiisolator $J_1$ und $J_2$ gehalten werden. Während der untere Isolator $J_2$ fest gelagert ist, läßt sich der obere $J_1$ mit Hilfe der Mikrometerschraube $M_3$ (1 Trommelteil $= \frac{1}{100}$ mm) um meßbare Beträge verschieben und so die Spannung der Saite beliebig ändern. In die obere Lagerung der Saite läßt sich die Ladesonde $L$ einstecken, die dann mit der Saite in leitender Verbindung steht. Bei Außergebrauchsetzung des Instrumentes wird die Sonde entfernt und der Verschlußdeckel $D$ (Fig. 1b) aufgesteckt. Mit Hilfe eines kleinen Ablesemikroskopes $O$ mit Okularmaßstab von großem Gesichtsfelde (Fig. 1b) (Durchmesser des Gesichtsfeldes 3 mm Vergrößerung 30fach)[1]) werden die Durchbiegungen der Saite in Teilen des Okularmaßstabes gemessen.

Die vier in den Figuren 1a und b deutlich sichtbaren kleinen Glasgefäße dienen zur Aufnahme von Natrium, zwecks

---

[1]) Angefertigt von der Firma C. A. Steinheil Söhne, München.

Austrocknung des Elektrometers im Innern. Die Klemmschraube $K$ dient zur Erdung des Elektrometergehäuses.

Durch die Ladung der beiden Platten $P_1$ $P_2$ auf entgegengesetzt gleiches Potential, entsteht zwischen ihnen ein hinreichend homogenes elektrisches Feld.

Wird nun ein zu messendes Potential an die Saite (Ladesonde L) angelegt, so schlägt sie, je nach dem Vorzeichen dieses Potentiales, nach der + oder — Platte hin aus. Aus der Größe und Richtung dieses Ausschlages kann das Potential nach Größe und Vorzeichen bestimmt werden, wenn das Elektrometer geeicht ist. Bei nicht allzu großen Durchbiegungen der Saite (innerhalb der „Elastizitätsgrenze") sind die Ausschläge den angelegten Potentialen proportional, die Eichkurve ist also eine Gerade.

### Handhabung des Saitenelektrometers.

Das eben beschriebene Instrument läßt sich, wie das Quadrantelektrometer, in verschiedenen Schaltungsarten verwenden:

#### I. Mit Hilfsladung:

a) Die beiden Platten werden auf entgegengesetzt gleiches Potential geladen, das unbekannte Potential an die Saite angelegt: „Saitenschaltung".

b) Die Saite wird auf ein hohes Hilfspotential geladen, eine Platte geerdet, an die andere die unbekannte Spannung angelegt: „Plattenschaltung".

#### II. Ohne Hilfsladung:

a) Die Saite wird durch einen außen um das Gehäuse herumführenden Metallbügel mit einer Platte leitend verbunden, die andere Platte geerdet. Das unbekannte Potential wird an die Saite (und die eine Platte) angelegt. Diese Schaltung ist im Prinzipe die gleiche, wie sie beim Braunschen Zeigerelektrometer verwendet ist: „Doppelschaltung".

b) Beide Platten werden geerdet, eine Platte wird möglichst weit herausgeschraubt. Das unbekannte Potential wird

an die Saite angelegt. Durch Influenzwirkung biegt sich die Saite nach der näherstehenden Platte hindurch: „Influenzschaltung“.

## Ia. Saitenschaltung.

Die Empfindlichkeit des Instrumentes, d. i. der Ausschlag für ein bestimmtes kleines Potential, etwa 0,1 Volt, ist hier abhängig: 1. von der Saitenspannung, 2. vom Plattenabstande, 3. von der Plattenladung. Alle diese drei Größen können bei dem vorstehend beschriebenen Instrument verändert werden. Ihr Einfluß auf die Empfindlichkeit wurde der Reihe nach genau festgestellt.

### 1. Saitenspannung geändert.

Die Größe der Durchbiegung der Saite, der Ausschlag derselben, ist im allgemeinen abhängig von ihrer Spannung. Es gelingt leicht, durch entsprechende Regulierung der Saitenspannung für ein gegebenes Potential einen bestimmten Ausschlag immer wieder herzustellen. Bei genügender Spannung schnellt die Saite in ihre jeweilige Gleichgewichtslage ohne jegliches Hin- und Herschwingen, die (Luft-)Dämpfung ist eine völlig aperiodische.

Bei einer bestimmten Plattenladung und bestimmter Plattenentfernung läßt sich durch Entspannen der Saite ihr Ausschlag für ein bekanntes Potential mehr und mehr vergrößern. Hiebei werden die Bewegungen der Saite nach ihrer Einstellungs- bzw. Nullage langsamer und langsamer und schließlich geht sie überhaupt nicht mehr auf 0 zurück, sondern verharrt bei stärkster Durchbiegung in der Nähe einer Platte. Die Näherung der anderen Platte, oder ein Neigen des Instrumentes bewirkt dann, daß die Saite von der einen extremen Lage sogleich in die entgegengesetzte überspringt, eine Einstellung auf den Nullpunkt ist nicht mehr zu erreichen. In dieser „instabilen Lage“ der Saite läßt sich das Instrument zu Messungen nicht mehr verwenden, und damit ist auch der Entspannung der Saite, also auch der Empfindlichkeit für jede gegebene Platten-

ladung und Plattenentfernung eine strenge Grenze gesetzt. Um eine möglichst große Empfindlichkeit zu erreichen, wird man zweckmäßig nahe an die instabile Lage herangehen, die Entspannung aber nur so weit treiben, daß die Einstellungen der Saite noch rasch und sicher erfolgen. Die Saite ist genügend gespannt, wenn sie nach ihrem jeweiligen Einstellungspunkt hin schnellt.

## 2. Plattenabstand verändert.

Die Empfindlichkeit des Instrumentes wächst mit Verminderung des Plattenabstandes anfänglich linear, nimmt aber dann rascher zu, je näher die Saite der instabilen Lage kommt. Fig. 2 (hiezu Tabelle 1) zeigt diesen Zusammenhang zwischen Plattenabstand und Ausschlag der Saite in Teilen des Okularmaßstabes für Potentiale von 0,24 Volt (Fig. 2a) und 0,38 Volt (Fig. 2b), einer Plattenladung von ± 50 Volt und einer konstanten Saitenspannung (Teilstrich 25,9 der Trommelteilung $M_3$). Bei dieser Saitenspannung befindet sich die Saite bei dem Abstand von 4,5 mm gerade an der Grenze der instabilen Lage.

**Tabelle 1.**

| Plattenabstand in mm | | 4,5 | 6 0 | 8,0 | 10,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| Ausschlag der Saite in Okularteilen | bei 0,38 Volt | 2,1 | 0,65 | 0,5 | 0,3 |
| | bei 0,24 Volt | 1,3 | 0,4 | 0,3 | 0,15 |

Eine weitere Annäherung der Platten aneinander führt die instabile Lage der Saite herbei, ist aber auch noch aus einem anderen Grunde nicht zu empfehlen. Es ist nämlich, ohne besondere Hilfsmittel, nicht möglich, bei Außergebrauchsetzen des Instrumentes beide Feldplatten im genau gleichen Zeitmoment zu entladen. Die Folge davon ist, daß die Saite im Augenblick der Entladung mit Heftigkeit nach der später zur Ableitung gelangenden Platte hingerissen wird, was unter Umständen ein Ankleben des dünnen Drahtes an dieser Platte und ein Abreißen desselben zur Folge haben kann.

Eine allzu große Annäherung der beiden Platten aneinander ist aber auch, wie sogleich gezeigt werden soll, gar nicht notwendig, weil hiedurch eine Vergrößerung der Empfindlichkeit doch nicht erzielt wird. Je näher sich nämlich die beiden Feldplatten gegenüberstehen, desto stärker ist auch die Saite anzuspannen, um sie außerhalb der instabilen Lage zu erhalten. Was also einerseits durch die stärkere Annäherung der beiden Platten aneinander an Empfindlichkeit gewonnen wird, geht andererseits durch die damit notwendig werdende straffere Anziehung der Saite wieder verloren. Dies ist deutlich aus Fig. 3a und b (hiezu Tabelle 2) ersichtlich, wo die Eichkurven für Plattenentfernungen von 4,5 mm (Fig. 3a) und 10 mm (Fig. 3b) dargestellt sind, wobei die Saite jedesmal bis nahe an die instabile Lage hin entspannt wurde.

**Tabelle 2.**

| Potential in Volt | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,07 | 0,14 | 0,24 | 0,38 | 0,72 | 0,73 | 1,05 | 1,40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Saitenanschlag bei 4,5 mm Plattenabstand | 0,08 | 0,15 | 0,25 | 0,60 | 1,10 | 1,95 | 3,00 | 5,15 | — | — | 8,20 |
| Saitenanschlag bei 10 mm Plattenabstand | 0,05 | 0,1 | 0.17 | 0,45 | 0,95 | 1,70 | 2,55 | 4,85 | 4.95 | 6,70 | 8,65 |

Bei einer Plattenladung von ± 50 Volt läßt sich also ein Potential von 0,01 Volt noch gut messen. Die Saitenausschläge hiefür sind, wenn auch bei der geringen Vergrößerung des Mikroskopes klein, so doch deutlich wahrnehmbar.

Aus den in Fig. 3 gezeichneten Eichkurven ergibt sich noch eine weitere Eigenschaft der Saite, die alle späteren Messungen immer wieder bestätigt haben. Nämlich Proportionalität zwischen angelegtem Potential und Ausschlag der Saite besteht, bei gegebener Plattenladung und Plattenentfernung nur innerhalb eines gewissen Bereiches (Gültigkeitsbereich des Hookschen Gesetzes). Im vorliegenden Fall nur für Potentiale bis ca. 0,4 Volt (Fig. 3a) bzw. 0,9 Volt (Fig. 3b).

Bei höheren Potentialen vermag die Saite nicht mehr genügend weit auszuschlagen.

Ferner zeigt Fig. 3: je stärker die Saite angespannt ist, desto kleiner wird auch der Bereich der Proportionalität zwischen Ausschlag und Potential. Auch deshalb empfiehlt es sich, den Plattenabstand groß zu wählen. Aus diesen Gründen habe ich bei allen späteren Messungen den Plattenabstand konstant auf 10 mm belassen, wobei eine Beschädigung der Saite durch Anspringen an eine Platte ausgeschlossen ist.

### 3. Plattenladung geändert.

Durch Änderung der Plattenladung ändert sich auch die Empfindlichkeit des Instrumentes (bei konstanter Saitenspannung und Plattenentfernung) und zwar ist der Zusammenhang zwischen beiden anfänglich linear (Fig. 4 und Tabelle 3).

**Tabelle 3.**

| Plattenladung in Volt | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| Saitenausschlag für 0,24 Volt | 0,09 | 0,17 | 0,3 | 0,75 | 2,1 |

Um den Gesamtmeßbereich des Instrumentes bei Verwendung der mir zur Verfügung stehenden Hilfsladung von 100 Volt festzustellen, wurde dasselbe für verschiedene Plattenladungen geeicht und zwar für ± 50 ± 30 ± 10 und ± 4 Volt bei 10 mm Plattenabstand und konstanter Saitenspannung (Teilstrich 28,9 der Trommelteilung). Die Saitenspannung wurde so hoch genommen, daß sich die Saite auch bei der höchsten Plattenladung (± 50 Volt) gut außerhalb der instabilen Lage befand. Geht man mit der Plattenladung bei 10 mm Abstand unter ± 4 Volt herab, so erhält man kein hinreichend homogenes elektrisches Feld mehr zwischen beiden Platten. Die Eichkurve ist dann auch in ihrem unteren Teile keine Gerade mehr. Will man bei dieser Schaltung den Meßbereich des Instrumentes erweitern (innerhalb der Proportionalitätsgrenze),

**Tabelle 4.**

| Potential in Volt | 0,01 | 0,02 | 0,06 | 0,11 | 0,18 | 0,36 | 0,53 | 0,73 | 1,00 | 1,27 | 1,57 | 2,00 | 2,55 | 3,14 | 4,00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Saitenausschlag bei ± 50 Volt Plattenladung | 0,05 | 0,1 | 0,3 | 0,7 | 1,1 | 2,2 | 3,3 | 4,5 | 6,0 | 7,4 | 8,9 | 10,3 | — | — | — |
| Saitenausschlag bei ± 30 Volt Plattenladung | 0,0 | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,3 | 0,8 | 1,0 | 1,35 | 2,0 | 2,45 | 3,0 | 3,85 | 4,8 | 5,95 | 7,1 |

**Tabelle 5.**

| Potential in Volt | 0,18 | 0,53 | 1,00 | 2,00 | 4,0 | 6,1 | 8,2 | 10,2 | 12,2 | 14,2 | 16,0 | 18,2 | 20,2 | 26,4 | 30,6 | 40,8 | 50,9 | 61,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Saitenausschlag bei ± 10 Volt Plattenladung | 0,08 | 0,2 | 0,5 | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 5,9 | 6,8 | 7,65 | 8,65 | 9,45 | 11,85 | 13,2 | 16,4 | 18,8 | 20,95 |
| Potential in Volt | 2,0 | 4,0 | 6,0 | 8,0 | 10,2 | 20,4 | 30,6 | 40,8 | 51,0 | 61,2 | 71,4 | 81,6 | 91,6 | 101,8 | 111,6 | 121,8 | 131,6 | 141,4 |
| Saitenausschlag bei ± 4 Volt Plattenladung | 0,25 | 0,85 | 1,05 | 1,5 | 1,95 | 3,85 | 5,7 | 7,6 | 9,5 | 11,45 | 13,3 | 15,0 | 16,6 | 18,35 | 19,8 | 21,2 | 22,5 | 23,8 |
| Potential in Volt | 151,4 | 161,2 | 171,2 | 181,2 | 191,2 | 201,0 | 210,8 | 220,8 | 230,6 | 240,6 | 250,4 | | | | | | | |
| Saitenausschlag bei ± 4 Volt Plattenladung | 24,9 | 25,9 | 26,85 | 27,75 | 28,45 | 29,15 | 29,95 | 30,6 | 31,1 | 31,85 | 32,25 | | | | | | | |

so empfiehlt sich zur Messung höherer Potentiale als 75 Volt (Fig. 6b) die Verwendung einer dickeren Saite und zur Messung kleinerer Spannungen als 0,01 Volt (Fig. 5a) die Vergrößerung der Plattenladung.

Fig. 5a und b zeigt die Eichkurven für eine Plattenladung von ± 50 Volt und ± 30 Volt bei 10 mm Plattenabstand und beidesmal derselben Saitenspannung (Teilstrich 28,9 der Trommelteilung) (hiezu Tabelle 4). In Fig. 6a und b sind die Eichkurven für ± 10 Volt und ± 4 Volt Plattenladung und demselben Plattenabstand von 10 mm und derselben Saitenspannung (28,9) gezeichnet (hiezu Tabelle 5).

Wie aus den Fig. 5 und 6 (und den Tabellen 4 und 5) ersichtlich ist, lassen sich unter Verwendung der verschiedenen Plattenladungen Spannungen von 0,01 Volt bis ca. 75 Volt messen, wobei Proportionalität zwischen Saitenausschlag und angelegtem Potential besteht. Der Proportionalitätsbereich ist für die einzelnen Plattenladungen in Tabelle 6 zusammengestellt.

**Tabelle 6.**

| Plattenladung | Bereich der Proportionalität zwischen Potential und Saitenausschlag |
|---|---|
| ± 50 Volt | Von 0,01 Volt bis ca. 0,8 Volt |
| ± 30 „ | „ 0,02 „ „ „ 3,4 „ |
| ± 10 „ | „ 0,2 „ „ „ 20 „ |
| ± 4 „ | „ 0,5 „ „ „ 75 „ |

Für diesen Meßbereich ist die Eichung des Instrumentes eine höchst einfache. Es genügt, einen einzigen Punkt der Eichkurve (gerade Linie) durch Anlegen eines bekannten Potentiales festzulegen. Hiezu verwendet man bei großer Empfindlichkeit ein Normalelement (offen), bei den kleineren Empfindlichkeiten aber eine entsprechende Anzahl von Zellen der zum Instrumente gehörigen Akkumulatorenbatterie, deren Spannung jederzeit durch das Saitenelektrometer selbst (ohne Hilfs-

ladung) in einer der nachstehend beschriebenen Schaltungen geprüft werden kann.

Will man in der Schaltung I Potentiale messen, die außerhalb der Proportionalitätsgrenze liegen (> 75 Volt), so ist eine vollständige Durcheichung des Instrumentes nötig (Fig. 6 b). Hiebei hat man immer noch den Vorteil, die unbekannten Spannungen auch ihrem Vorzeichen nach bestimmen zu können und durch Kommutieren der Plattenladung (und damit des Saitenausschlages) eine große Genauigkeit der Messung zu erreichen. Auf diese Weise lassen sich bei einer Plattenladung von ± 4 Volt Potentiale von ca. 1 Volt bis 250 Volt gut messen (Fig. 6 b).

Hat man es aber stets mit höheren Potentialen zu tun, z. B. bei Messung des atmosphärischen Potentialgefälles, oder will man das Instrument als Hochspannungselektrometer benützen, so empfiehlt sich die Verwendung einer dickeren Saite, vielleicht auch eine der unter 2 a und b angegebenen Schaltungen ohne Hilfsladung.

Bei niederen Plattenladungen (± 10 Volt und ± 4 Volt) läßt sich die Plattenladung kommutieren, um Ausschläge der Saite nach beiden Seiten hin zu erhalten, aus denen dann der Mittelwert gebildet wird. Bei größeren Plattenladungen ändert sich beim Kommutieren derselben die Nullstellung der Saite, wohl wegen der Ungleichheit der Spannungen beider Batteriehälften. Die kleinen hiedurch entstehenden Verschiebungen der Nullage der Saite (ca. 0,5 bis 1 Okularteil) stören bei der Messung niederer Potentiale.

Es gelingt leicht (bei jeder Plattenladung), die Ausschläge der Saite nach beiden Richtungen gleich groß zu machen. Zu diesem Zwecke braucht man nur die beiden Feldplatten, ohne dabei ihren gegenseitigen Abstand zu verändern, entsprechend zu verschieben.

Um auch bei höheren Plattenladungen Ausschläge nach beiden Seiten hin zu erhalten, kommutiert man das angelegte Potential, oder, wo dies nicht möglich ist, verwendet man die

### Ib. Plattenschaltung.

Bei dieser Schaltung wird, je nach der verlangten Empfindlichkeit, eine entsprechende Anzahl von Zellen der Akkumulatorenbatterie hintereinander geschaltet, der eine Batteriepol geerdet und der andere mit der Saite verbunden. Eine Feldplatte wird geerdet, die andere an das zu messende Potential angelegt. Beim Kommutieren des Hilfspotentiales bleibt jetzt die Saite ruhig in ihrer Nullage stehen. Auch bei dieser Schaltung besteht Proportionalität zwischen angelegtem Potential und Ausschlag der Saite innerhalb eines bestimmten Bereiches (wie bei Ia).

### IIa. Doppelschaltung.

Bei meinen Messungen betrug in dieser Schaltung (siehe S. 64 unter IIa) der Abstand der mit der Saite leitend verbundenen Feldplatte von ihr = 5 mm. Die Saitenspannung betrug einmal 28,9 Trommelteile, was der bereits oben benützten Saitenspannung entspricht (Fig. 7a) und wurde bei einer zweiten Eichung so groß als möglich genommen (Fig. 7b). Durch größere Annäherung der Platte an die Saite läßt sich

**Tabelle 7.**

| Saitenspannung 28,9 | | | | Saitenspannung 25,0 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Potential in Volt | Saiten-ausschlag | Potential in Volt | Saiten-ausschlag | Potential in Volt | Saiten-ausschlag | Potential in Volt | Saiten-ausschlag |
| 4,0 | 0,1 | 141,4 | 38,0 | 10,2 | 0,1 | 161,0 | 21,6 |
| 6,0 | 0,3 | 151,4 | 38,9 | 20,4 | 0,9 | 170,8 | 22,6 |
| 10,0 | 1,0 | 161,4 | 39,4 | 30,4 | 1,9 | 180,8 | 23,5 |
| 20,4 | 4,3 | 171,2 | 40,1 | 40,0 | 3,1 | 190,8 | 24,4 |
| 30,4 | 9,5 | | | 50,8 | 4,9 | 200,8 | 25,2 |
| 40,8 | 15,2 | | | 61,0 | 6,8 | 210,6 | 26,1 |
| 50,8 | 20,4 | | | 71,2 | 8,8 | 220,4 | 27,0 |
| 61,2 | 24,5 | | | 81,2 | 10,7 | 230,4 | 27,8 |
| 71,2 | 27,7 | | | 91,2 | 12,4 | 240,4 | 28,4 |
| 81,4 | 30,0 | | | 101,4 | 14,0 | 250,2 | 29,1 |
| 91,6 | 32,0 | | | 111,4 | 15,6 | 262,0 | 30,2 |
| 101,6 | 33,5 | | | 121,4 | 17,0 | 272,0 | 30,9 |
| 111,6 | 34,9 | | | 131,2 | 18,1 | 281,6 | 31,6 |
| 121,8 | 36,0 | | | 141,0 | 19,4 | 292,0 | 32,1 |
| 131,6 | 37,0 | | | 151,0 | 20,5 | 301,6 | 32,8 |

die Empfindlichkeit des Instrumentes steigern. Wie die Eichkurven (Fig. 7a und b, hiezu Tabelle 7) zeigen, ist das Instrument auch in dieser Schaltung dem Blättchenelektroskope überlegen, dessen Meßbereich von 50 bis ca. 250 Volt geht, während man es beim vorliegenden Instrumente durch entsprechende Wahl der Saitenspannung in der Hand hat, entweder niederere oder höhere Spannungen in weitem Bereich genau zu messen. Bei Verwendung dickerer Saiten gibt das Instrument in dieser Schaltung ein sehr einfaches Hochspannungselektrometer.

Diese Schaltung weist noch einen weiteren Vorteil auf, der namentlich luftelektrischen Messungen zustatten kommen wird. Das Instrument läßt sich nämlich bei den mittleren und höheren Ausschlägen der Saite um ganz erhebliche Beträge neigen, ohne daß dadurch eine zu berücksichtigende Änderung der Saiteneinstellung auftritt. So wurde z. B. das Elektrometer bei stärkster Saitenspannung und 100 Volt angelegtem Potential bis ca. $40^0$ geneigt, ohne daß eine Änderung des Saitenausschlages (ca. 14 Okularteile) eintrat. Nur bei den kleineren Potentialen und schwach gespannter Saite verursacht eine Neigung des Instrumentes eine geringfügige Änderung der Saiteneinstellung (einige $\frac{1}{10}$ Okularteile bei stärkerer Neigung). Daher besitzt das Instrument überall dort, wo man nicht auf eine stabile Aufstellung rechnen kann, eine große Verwendbarkeit, also namentlich für Beobachtungen im Ballon und auf Schiffen.

### IIb. Influenzschaltung.

Der Abstand der einen Platte von der Saite betrug 5 mm, die Saitenspannung war wieder 28,9 Trommelteile die andere Platte wurde soweit als möglich von der Saite zurückgeschraubt (ca. 7 mm). Die Eichung ergab die in Fig. 7c (hiezu Tabelle 8) gezeichnete Kurve. Hier gilt im wesentlichen dasselbe, was schon unter IIa S. 72 angeführt wurde, nur ist das Instrument in dieser Schaltung gegen Neigungen etwas empfindlicher.

Tabelle 8.

| Influenzschaltung | | Influenzschaltung | |
|---|---|---|---|
| Potential in Volt | Saitenausschlag | Potential in Volt | Saitenausschlag |
| 20.4 | 0,2 | 171.0 | 24.0 |
| 30.4 | 0,6 | 181.0 | 25.2 |
| 40.6 | 1.2 | 191.0 | 26.4 |
| 50.8 | 2,1 | 201,0 | 27,5 |
| 60.8 | 3.1 | 210.6 | 28.4 |
| 71,0 | 4,4 | 220,8 | 29,2 |
| 81.2 | 6,0 | 230.6 | 30,1 |
| 91,2 | 8,0 | 240.6 | 31,0 |
| 101.4 | 10,1 | 250,4 | 31.5 |
| 111.4 | 12,2 | 262.4 | 32,2 |
| 121.4 | 14,6 | 272,4 | 32,9 |
| 131.4 | 16.9 | 281,6 | 33.2 |
| 141.0 | 18,9 | 291.6 | 33,8 |
| 151,0 | 20,8 | 301,6 | 34,2 |
| 161,0 | 22,4 | | |

## Kapazität des Saitenelektrometers bei den verschiedenen Schaltungsarten.

Die Kapazität wurde nach der Harmschen Methode[1]) bestimmt. Wie vorauszusehen, war die Kapazität des Elektrometers bei Saitenschaltung sehr klein. Um sie mit wünschenswerter Genauigkeit (ca. 1 %) nach dieser Methode zu bestimmen, dürfte der Harmsche Kondensator für diesen Zweck eine kleinere Eigenkapazität haben.

In Saitenschaltung betrug die Kapazität des Elektrometers bei ± 4 Volt Plattenladung (kommutiert), 10 mm Plattenabstand und 28.9 Trommelteilen Saitenspannung = 5 cm. Sie ist also ca. 3 mal so klein, als die eines Elektroskopes und ca. 10 mal so klein als die eines Quadrantelektrometers in gebräuchlicher Ausführung.

In Doppelschaltung, bei 5 mm Abstand zwischen Saite und Platte und 28,9 Trommelteilen Saitenspannung betrug die Kapazität 17,7 cm.

[1]) F. Harms, Physikal. Zeitschr. 5, 47, 1904.

In Influenzschaltung, bei 5 mm Abstand der Platte von der Saite und derselben Saitenspannung von 28,9 Trommelteilen erwies sich die Kapazität stark abhängig von der Größe des Saitenausschlages, also von der jeweiligen Entfernung der Saite von der influenzierten Platte. Die Messung ergab Werte zwischen 5 und 8 cm (bei dem gegebenen Gesichtsfelde des Ablesemikroskopes).

Überblicken wir die Ergebnisse der vorstehend angeführten Messungen, so lassen sich folgende Eigenschaften des Saitenelektrometers anführen, durch welche es in mancher Hinsicht den anderen elektrostatischen Meßinstrumenten überlegen ist.

Für alle Schaltungsarten gilt: Äußerst einfache Handhabung, leichte Transportfähigkeit, Wegfall jeglicher Arretierung, einfache und genaue Ablesung, außerordentliche Beweglichkeit und geringe Trägheit der Saite, daher momentane Einstellung und aperiodische Dämpfung, ferner veränderlicher Meßbereich, vorzügliche Isolation und endlich Verwendbarkeit zum Projizieren und Selbstregistrieren. Bei Verwendung einer Hilfsladung gilt noch besonders: Große Empfindlichkeit, Proportionalität zwischen angelegtem Potential und Ausschlag der Saite innerhalb ziemlich weiter Grenzen, Möglichkeit, den Saitenausschlag zu kommutieren und damit erhöhte Genauigkeit der Messung, Meßbarkeit auch des Vorzeichens eines unbekannten Potentiales, kleine Kapazität, einfache Eichung.

Für die Schaltungen ohne Hilfsladung gilt: Weiter Meßbereich (durch Veränderung der Saitenspannung und Verwendung verschieden dicker Saiten), Unabhängigkeit der Angaben des Instrumentes von der Neigung desselben (bei mittleren und höheren Potentialen und speziell der Doppelschaltung).

Infolge dieser Eigenschaften dürfte das Saitenelektrometer zu vielen Messungen in der Physik, Geophysik, Chemie und Physiologie verwendbar sein; es wird dort besondere Vorteile bieten, wo es sich um die Messung oder Registrierung kleiner, auch rasch veränderlicher Spannungen und Elektrizitätsmengen handelt, sich aber auch als Hochspannungselektrometer unter Benützung dickerer Saiten eignen.

Zum Schlusse drängt es mich Herrn, Prof. Dr. H. Ebert für die Freundlichkeit, mit welcher er mir die zu diesen Messungen nötigen Apparate zur Verfügung stellte, auch an dieser Stelle meinen besten Dank auszusprechen.

# Über Krümmung und konforme Transformation.

Von **A. Voss.**

(*Eingelaufen 16. März.*)

---

## § 1.

### Allgemeine Punkttransformation der Ebene.

Es seien $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ zwei reelle, eindeutige und, soweit es in Betracht kommt, differentiierbare Funktionen der beiden unabhängigen Variabeln $x, y$. Dann wird vermöge der Gleichungen:

$$\text{A)} \qquad \begin{aligned} X &= f(x, y) \\ Y &= \varphi(x, y) \end{aligned}$$

jedem Punkte $p$ eines den angegebenen Voraussetzungen entsprechenden Bereiches der Ebene $x, y$ ein Punkt $P$ mit den Koordinaten $X$, $Y$ einer zweiten Ebene zugeordnet sein[1]) und umgekehrt, wenn die Funktionaldeterminante von $f$, $\varphi$ nicht verschwindet.

Die Gleichung:

$$1) \qquad Y' = \frac{Y_x + Y_y\, y'}{X_x + X_y\, y'} = \frac{y' + \operatorname{tg} \alpha}{1 - y' \operatorname{tg} \alpha},$$

in der die Indices $x, y$ partielle Differentiationen nach den betreffenden Variabeln, $Y', y'$ aber die Differentialquotienten $\frac{dY}{dX}, \frac{dy}{dx}$ bedeuten, drückt aus, daß der von $x, y$ ausgehenden

---

[1]) Die rechtwinkeligen Koordinatenachsen beider Ebenen mögen parallel zueinander angenommen werden.

Richtung $y'$ in der ersten Ebene die Richtung $Y'$ in der zweiten Ebene zugeordnet ist, welche mit der ersten den Winkel $\alpha$ bildet. Die Gleichung 1) wird im allgemeinen, falls $\operatorname{tg} \alpha$ einen gegebenen Wert für die Stelle $x, y$ hat, nur für zwei Richtungen bestehen. Sie findet aber daselbst für alle statt, wenn:

$$Y_x = X_x \operatorname{tg} \alpha,$$
$$X_x + X_y \operatorname{tg} \alpha = - Y_x \operatorname{tg} \alpha + Y_y,$$
$$- Y_y \operatorname{tg} \alpha = X_y$$

ist. Durch Addition der ersten und letzten dieser Gleichungen und Vergleichung mit der zweiten folgt:

$$(Y_x + X_y)^2 + (X_x - Y_y)^2 = 0.$$

Da nur reelle Werte in Betracht kommen, so ist:

$$X_x = Y_y \tag{2}$$
$$Y_x = - X_y$$

und

$$Y_y \operatorname{tg} \alpha + X_y = 0. \tag{3}$$

Sind also die Gleichungen 2) für den Punkt $p$ erfüllt, so entspricht der Gleichung 3) ein Wert von $\operatorname{tg} \alpha$ derart, daß die Tangentenrichtungen korrespondierender Kurven, die von $p$, $P$ ausgehen, beständig diesen Winkel $\alpha$ miteinander bilden; diese Tangenten bilden also zwei kongruente Büschel, und man könnte auch umgekehrt aus der Betrachtung solcher Büschel die Gleichungen 2), 3) erhalten.

Die Gleichungen 2) können, anstatt nur für einzelne Stellen, auch für Kurven oder auch für ein zweidimensionales Gebiet erfüllt sein. Versteht man unter $X$, $Y$ die reellen und imaginären Bestandteile einer analytischen Funktion $f(z)$ der komplexen Variabeln $z$ und setzt:

$$X + Yi = f(z),$$

so sind die Gleichungen 2) für jeden Punkt eines zusammenhängenden Gebietes der Ebene erfüllt. Setzt man dann:

$$\text{B)}\qquad \begin{aligned} X_1 &= X + (Y_x - X_x \psi)^m f(x, y) \\ Y_1 &= Y + (Y_x - X_x \psi)^n \varphi(x, y), \end{aligned}$$

wo $m, n > 2$, so hat man an Stelle von A) ein Entsprechen der beiden Ebenen $x, y$; $X_1$, $Y_1$, bei dem, falls $\operatorname{tg} \alpha$ aus der Gleichung:

$$\text{4)}\qquad \operatorname{tg} \alpha = \psi$$

entnommen wird, die Gleichungen 2) für jeden Punkt der Kurve:

$$Y_x - X_x \psi = 0$$

bestehen. Das heißt, die Gleichungen B) vermitteln ein Entsprechen der beiden Ebenen derart, daß in jedem Punkte der Kurve $Y_x - X_x \psi = 0$ entsprechende Fortschreitungsrichtungen kongruente Büschel bilden.

Noch allgemeiner kann man endlich setzen:

$$\text{C)}\qquad \begin{aligned} X_1 &= X + f(x\, y)\, \Pi_k (Y_x - X_x \psi_k)^{m_k} \\ Y_1 &= Y + \varphi(x\, y)\, \Pi_k (Y_x - X_x \psi_k)^{n_k} \end{aligned}$$

wo $m_k$, $n_k > 2$; $k = 1, 2 \ldots p$; man hat dann ein System von $p$ Kurven der angegebenen Eigenschaft.

Wählt man insbesondere für die $\psi_k$ ebenso viele verschiedene Konstanten, so ist die Winkeldifferenz zwischen den Fortschreitungsrichtungen längs der Kurven $c_k$:

$$X_x - X_y c_k = 0$$

und ihrer entsprechenden jeweilig konstant.

Diese Kurven $c_k$ und ihre entsprechenden $C_k$ haben bemerkenswerte Eigenschaften.

Es seien $p, p'$ zwei konsekutive Punkte von $c_k$, $P$, $P'$ die entsprechenden Punkte von $C_k$; ferner $q'$ ein zu $p'$ benachbarter Punkt auf der Tangente $p\,p'$, so daß $p\,p'\,q'$ in gerader Linie liegen. Dann müssen sich auch die Punkte $P, P', Q'$ in gerader Linie befinden. Also:

Jeder Kurve, die im Punkte $p$ die Tangente von $c_k$ zur Wendetangente hat, entspricht eine Kurve, die

im Punkte $P$ die Tangente von $C_k$ zur Wendetangente hat.

Möge andererseits eine Kurve $c$ die Kurve $c_k$ im Punkte $p$ berühren, d. h. $p$ und $p'$ mit ihr gemein haben, und sei $q'$ ein benachbarter Punkt von $c$. Dann entspricht der Kurve $c$ eine Kurve $C$ der zweiten Ebene, welche mit $c_k$ die Punkte $P$, $P'$ gemein hat, während die Richtung $P'Q'$ mit $PP'$ denselben Winkel bildet wie $p'q'$ mit $pp'$. Oder:

Jeder Kurve, welche $c_k$ in einem Punkte $p$ berührt, entspricht eine Kurve, die $C_k$ in $P$ so berührt, daß $c$ und $C$ in den Punkten $p$, $P$ gleiche Kontingenzwinkel haben.[1])

---

[1]) Der Ausdruck „Kurven von gleichem Kontingenzwinkel in entsprechenden Punkten" ist nicht so zu verstehen, als ob damit der einen Kurve in Bezug auf die andere eine charakteristische Eigenschaft an und für sich zugeschrieben werden solle. In der Tat braucht man nur zwei beliebige Kurven, eventuell dadurch, daß man die eine um einen geeigneten Winkel in ihrer Ebene dreht, so aufeinander zu beziehen, daß sie in korrespondierenden Punkten parallele Tangenten haben. Dies ist „im allgemeinen" immer möglich, falls nicht die eine Kurve eine gerade Linie ist. Genauer erkennt man dies durch folgende Betrachtung.

Zur Bestimmung aller Kurven $\xi, \eta$, die mit einer gegebenen $x, y$ in Punkten desselben Parameters $t$ gleiche Kontingenzwinkel haben, setze man:

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = d\left(\operatorname{arctg}\frac{\frac{d\eta}{dt}}{\frac{d\xi}{dt}}\right)$$

oder:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx} + c : 1 - c\frac{dy}{dx};$$

d. h.:

$$\eta = \int f'(x)\,(dy + c\,dx) + \text{const}$$

$$\xi = \int f'(x)\,(dx - c\,dy) + \text{const},$$

wo $c$ eine willkürliche Konstante, $f'(x)$ die Ableitung einer willkürlichen Funktion von $x$ bedeutet. Für $c = \operatorname{tg}\alpha$ kommt, wenn man $f(x)$ durch $\cos\alpha\, f(x)$ ersetzt und die Integrationskonstanten fortläßt:

$$\eta\sin\alpha + \xi\cos\alpha = f(x)$$

$$\eta\cos\alpha - \xi\sin\alpha = \int f'(x)\,dy.$$

Insbesondere entspricht der Kurve $c_k$ die $C_k$ so, daß beide in korrespondierenden Punkten gleiche Kontingenzwinkel haben. Jedem geradlinigen Bestandteil von $c_k$ entspricht wieder ein geradliniger Bestandteil von $C_k$.

## § 2.

## Konforme Transformation der Ebene.

In allgemeinerer Weise ergeben sich die vorigen Betrachtungen durch die folgende analytische Untersuchung. Sind wieder $X$, $Y$ reelle eindeutige Funktionen von $x, y$, deren Funktionaldeterminante $\Delta$ nicht verschwindet, so ist:

$$1)\quad \begin{aligned} dS^2 &= dX^2 + dY^2 \\ &= (X_x^2 + Y_x^2)\, dx^2 + 2\,(X_x X_y + Y_x Y_y)\, dx\, dy + (X_y^2 + Y_y^2)\, dy^2, \end{aligned}$$

während:

---

Führt man in der $\xi, \eta$ Ebene ein um den Winkel $\alpha$ gedrehtes Koordinatensystem $\xi', \eta'$ ein, so ist:

$$1)\quad \begin{aligned} \xi' &= f(x), \\ \eta' &= \int f'(x)\, d\, y; \end{aligned}$$

also:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,\eta'}{d\,\xi'},$$

und auf diesen Fall des Parallelismus läßt sich daher die Betrachtung zurückführen. Ist nun $y = \varphi(x)$ und $\eta' = F(\xi')$, so handelt es sich um die Bestimmung von $f(x)$ aus den Gleichungen 1). Dies gibt:

$$\int f'(x)\, \varphi'(x)\, d\, x = F(f(x))$$

oder:

$$\varphi'(x) = F'(f(x)).$$

Ist nun $\Phi$ die reziproke Funktion von $F'$, also $\Phi(F'(u)) = u$, so wird:

$$\Phi(\varphi'(x)) = f(x),$$

womit $f(x)$ so bestimmt ist, daß $\eta' = F(\xi')$ wird, und zugleich wird:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = F'(f(x)) = \varphi'\, x$$

oder:

$$y = \varphi(x) + \text{const.}$$

$$d\,x^2 + d\,y^2 = d\,s^2$$

ist. Auf dieselbe Weise folgt:

$$2)\qquad \begin{vmatrix} d\,X & d\,Y \\ d^2 X & d^2 Y \end{vmatrix} = \Delta \begin{vmatrix} d\,x & d\,y \\ d^2 x & d^2 y \end{vmatrix} + U,$$

wo $U$ eine Differentialform dritten Grades:

$$U = a\,(d\,x)^3 + b\,(d\,x)^2\,d\,y + c\,d\,x\,(d\,y)^2 + d\,(d\,y)^3$$

und:

$$\begin{aligned} a &= X_x Y_{xx} - Y_x X_{xx} \\ b &= 2\,(X_x Y_{xy} - Y_x X_{yx}) + X_y Y_{xx} - Y_y X_{xx} \\ c &= 2\,(X_y Y_{xy} - Y_y X_{yx}) + X_x Y_{yy} - Y_x X_{yy} \\ d &= X_y Y_{yy} - Y_y X_{yy} \end{aligned}$$

gesetzt ist. Führt man nun in 2) die Krümmungshalbmesser der entsprechenden Kurven:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\,x\,d^2 y - d\,y\,d^2 x}{d\,s^3}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d\,X\,d^2 Y - d\,Y\,d^2 X}{d\,S^3}$$

ein, so folgt:

$$3)\qquad \frac{d\,S^3}{R} = \Delta\,\frac{d\,s^3}{r} + U.$$

Bei jeder Abbildung ist also die durch $dx^3$ dividierte Differenz der beiden die Krümmungsradien enthaltenden Glieder nur von der Richtung $y'$ abhängig, daher für alle entsprechenden Kurven mit derselben Tangente dieselbe.[1]) Und es gibt stets mindestens eine reelle Tangentenrichtung, für die $U = 0$ ist, so daß sich die Gleichung 3) auf:

$$\frac{d\,S^3}{R} = \Delta\,\frac{d\,s^3}{r}$$

[1]) Vgl. die Anmerkung zu § 4 pag. 92.

reduziert. Es ist von Interesse, die Kurven zu bestimmen, für die bei gegebener Abbildung $U = 0$ wird. Dabei werden sich sehr mannigfaltige Verhältnisse ergeben; ich beschränke mich daher auf den Fall, wo die Gleichungen 2) des § 1 oder:

$$4)\qquad \begin{aligned} X_x &= Y_y \\ X_y &= -Y_x, \end{aligned}$$

zunächst für die Stelle $x, y$, erfüllt sind. Dann wird:

$$dS^2 = T\,ds^2,$$

falls:

$$T = X_x^2 + X_y^2$$

gesetzt wird. Der Differentialausdruck $U$ nimmt die Form:

$$U = ds^2 (A\,dx + B\,dy)$$

an, wenn die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} X_x Y_{xx} - Y_x X_{xx} - 2(X_y Y_{yx} - Y_y X_{xy}) - (X_x Y_{yy} - Y_x X_{yy}) &= 0 \\ X_y Y_{yy} - Y_y X_{yy} - 2(X_x Y_{xy} - Y_x X_{xy}) - (X_y Y_{xx} - Y_y X_{xx}) &= 0 \end{aligned}$$

bestehen. Führt man in dieselben die Gleichungen 4) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} X_x P - X_y Q &= 0 \\ X_y P + X_x Q &= 0, \end{aligned}$$

wo:

$$\begin{aligned} P &= Y_{xx} + 2\,X_{yx} - Y_{yy} \\ Q &= X_{yy} + 2\,Y_{xx} - X_{xx} \end{aligned}$$

gesetzt ist. Da nun $\Delta$ nicht Null ist, müssen also $P$ und $Q$ beide Null sein, d. h. es müssen die beiden Gleichungen:

$$5)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(Y_x + X_y) &= \frac{\partial}{\partial y}(Y_x - X_x) \\ \frac{\partial}{\partial y}(Y_x + X_y) &= \frac{\partial}{\partial x}(X_x - Y_y) \end{aligned}$$

an der betreffenden Stelle erfüllt sein. Damit aber verwandelt sich die Gleichung 3) in:

$$6) \qquad \frac{dS}{R} = \frac{ds}{r} + \frac{A\,dx + B\,dy}{T},$$

wo:

$$A = X_x Y_{xx} - Y_x X_{xx}$$
$$B = X_y Y_{yy} - Y_y X_{yy}$$

ist. Unter den Voraussetzungen 4), 5) gibt es also für eine solche Stelle nur eine einzige reelle durch:

$$A\,dx + B\,dy = 0$$

bestimmte Fortschreitungsrichtung derart, daß zwischen den Kontingenzwinkeln korrespondierender Kurven, deren Tangente in diese Richtung fällt:

$$d\varepsilon = \frac{ds}{r}, \quad dE = \frac{dS}{R}$$

die Beziehung stattfindet:

$$dE = d\varepsilon.$$

Bei der konformen Abbildung sind die Gleichungen 4) und mit ihnen die 5) identisch für alle Punkte des Gebietes erfüllt. Zugleich wird aber jetzt:

$$A = -X_x^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X_y}{X_x}\right)$$
$$B = -X_x^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{X_y}{X_x}\right),$$

wie sich unmittelbar aus 6) ergibt. Die Gleichung 6) geht damit über in:

$$7^{a}) \qquad \frac{dS}{R} = \frac{ds}{r} - d \operatorname{arctg}\left(\frac{X_y}{X_x}\right)$$

oder:

$$7^{b}) \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{r\sqrt{T}} - \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{d}{ds} \operatorname{arctg}\left(\frac{X_y}{X_x}\right).$$

Diese Gleichungen bestätigen den Satz, daß die Kontingenzwinkel der Kurven $c$:

$$X_y - c\, X_x = 0$$

und ihrer entsprechenden $C$ für entsprechende Stellen gleich sind, allgemeiner, daß für jede diese Kurven berührende Kurve und ihre entsprechende im Berührungspunkte:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r\sqrt{T}}$$

ist. Die Kurven $c$ gehen ersichtlich durch alle Punkte, wo:

$$f'(z) = 0$$

ist, falls die konforme Transformation durch:

$$Z = f(z)$$

ausgedrückt ist, d. h. durch diejenigen Punkte der ersten Ebene, denen die Windungspunkte der zweiten bei der Abbildung entsprechen.

Integriert man die Gleichung 7[a]), so folgt:

$$8)\qquad E - E_0 = \varepsilon - \varepsilon_0 - \Big| \operatorname{arctg}\left(\frac{X_y}{X_x}\right)\Big|_{x_0, y_0}^{x, y}.$$

Bezeichnet man also den Winkel zwischen den Tangenten im Anfangs- und Endpunkte eines stetig gekrümmten Bogenstückes $p\,p'$ mit $[p\,p']$ und analog mit $[P\,P']$ für den vermöge der konformen Abbildung entsprechenden Bogen $P\,P'$, so ist:

$$[P\,P'] - [p\,p'] = - \Big| \operatorname{arctg}\left(\frac{X_y}{X_x}\right)\Big|_{x_0, y_0}^{x, y}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß das Bogenstück durch keinen Punkt geführt ist, für den $f'(z) = 0$ ist. Die Werte der Arcustangenten sind dabei der stetigen Fortsetzung dieser Funktionen gemäß zu wählen.

Betrachtet man nun die Funktion:

$$\log(f'z) = \log(X_x - i\, X_y)$$
$$= \tfrac{1}{2}\log T - i \operatorname{arctg}\left(\frac{X_y}{X_x}\right)$$

so sind die Kurven $T = \text{const} = c_1^2$ die orthogonalen Trajektorien der Kurven:

$$X_y - c\,X_x = 0.$$

Bringt man die Differentialform:

$$A\,dx + B\,dy$$

in die Gestalt:

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\,dx - \frac{\partial T}{\partial y}\,dx\right),$$

so folgt aus 6):

$$9)\qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{c_1 r} - \frac{1}{2 c_1^3}\left\{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

wo:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 = 4\,(X_{xx}^2 + X_{xy}^2)\,(X_x^2 + X_y^2)$$

ist, und dies ist die Beziehung, welche zwischen den Krümmungshalbmessern der Kurven $T = c_1^2$ und ihren entsprechenden (allgemeiner für jede diese Kurven berührende Kurve und ihre entsprechende im Berührungspunkte) stattfindet.

Zu einer anderen Eigenschaft des Orthogonalsystems der Kurven $c$ und $T$ führt die folgende Betrachtung.

Es sei irgend ein Polygon gegeben, dessen Seiten sich nicht untereinander durchschneiden und von stetig gekrümmten Kurven gebildet sind, welches also einen einfach zusammenhängenden Teil der Ebene begrenzt. Befindet sich im Innern desselben kein Punkt, wo $f'(z) = 0$ ist (Stellen, wo $f'(z) = \infty$, sind schon durch die früheren Voraussetzungen ausgeschlossen), so wird diesem Polygon vermöge der konformen Abbildung ein zweites von demselben Charakter entsprechen. Zugleich ist aber das über die Begrenzung des ersten erstreckte Integral:

$$\int d \log f'(z) = 0$$

oder:

$$\int \tfrac{1}{2}\, d \log T - i \int d\, \operatorname{arctg}\left(\frac{X_y}{X_x}\right) = 0.$$

Da nun der erste Teil gleich Null ist, so liefert der zweite, falls die Ecken des ersten Polygons mit $p_1, p_2 \ldots, p_n$, die des zweiten mit $P_1, P_2, \ldots, P_n$ bezeichnet werden:

$$[P_1 P_2] + [P_2 P_3] + \cdots [P_n P_1]$$
$$= [p_1 p_2] + [p_2 p_3] + \cdots [p_n p_1],$$

falls die einzelnen Winkelgrößen mit ihren Vorzeichen berücksichtigt werden. Dieser Satz kann übrigens auch aus dem allgemeinen Gauß-Bonnetschen Satze über die Curvatura integra geschlossen werden (vgl. § 4), wie denn beide Sätze, der eben genannte und das Cauchysche Theorem zur gemeinsamen Quelle die Greensche Betrachtung haben. — Eine besonders einfache Form erhält derselbe durch Anwendung auf ein Viereck, von dem zwei gegenüberliegende Seiten $p_1 p_2$, $p_3 p_4$ durch Kurven $c$ gebildet werden, es folgt dann $[P_2 P_3] - [P_1 P_4] = [p_2 p_3] - [p_1 p_4]$.

## § 3.

## Die Kurvensysteme $c = \text{const}$ bei konformer Transformation der Ebene.

Nach § 2 hat bei der konformen Abbildung der Ebene das Kurvensystem $X_y - c X_x = 0$ [1]) die Eigenschaft, daß zwischen dem Krümmungsradius $r$ einer Kurve der ersten Ebene, welche eine Kurve des Systems berührt, und der entsprechenden Kurve vom Krümmungsradius $R$ die Beziehung:

$$\frac{\sqrt{T}}{R} = \frac{1}{r}$$

für den Berührungspunkt besteht. Die linke Seite der Gleichung:

$$X_y - c X_x = 0$$

genügt selbst der partiellen Differentialgleichung $\Delta_2 = 0$. Man kann nun umgekehrt nach denjenigen konformen Abbildungen fragen, bei denen das System dieser Kurven ein gegebenes ist.

---

[1]) Sie sind auch weiterhin als Kurven $c$ bezeichnet.

Es sei also $\psi(xy) = \text{const}$ ein System von Kurven dieser Art, dann müssen die Gleichungen:

$$1)\qquad \begin{aligned} X_x &= \lambda\varphi(\psi) \\ X_y &= \lambda \end{aligned}$$

bestehen, wo $\varphi$ eine Funktion von $\psi$ allein ist, und $\lambda$ eine unbekannte Funktion von $x, y$ sein wird. Man erhält aus 1) vermöge der Integrabilitätsbedingung für $X$ und der Bedingung $\Delta_2 X = 0$ die Gleichungen:

$$2)\qquad \begin{aligned} \lambda_y\varphi + \lambda\varphi'\psi_y - \lambda_x &= 0 \\ \lambda_x\varphi + \lambda\varphi'\psi_x + \lambda_y &= 0, \end{aligned}$$

wo $\varphi' = \frac{d\varphi}{d\psi}$ gesetzt ist. Setzt man:

$$\mu = \log\lambda,^{1})$$

so ist:

$$3)\qquad \begin{aligned} -\mu_y &= \varphi'\frac{\psi_x + \varphi\psi_y}{1+\varphi^2} \\ -\mu_x &= \varphi'\frac{\psi_x\varphi - \psi_y}{1+\varphi^2}, \end{aligned}$$

und die Integrabilitätsbedingung für 3) wird nun:

$$4)\qquad \left(\varphi'' - \frac{2\varphi\varphi'^2}{1+\varphi^2}\right)(\psi_x^2 + \psi_y^2) + \varphi'(\psi_{xx} + \psi_{yy}) = 0.$$

Da $\varphi$ nur von $\psi$ abhängig ist, muß die Gleichung:

$$5)\qquad \frac{\psi_{xx} + \psi_{yy}}{\psi_x^2 + \psi_x^2} = f'(\psi) = \frac{\Delta_2\psi}{\Delta\psi}$$

bestehen, wobei $f'(\psi)$ die Ableitung einer willkürlichen Funktion $f$ von $\psi$ bedeutet. Gleichung 5) ist zunächst erfüllt, wenn $\Delta_2\psi = 0$ ist. Alsdann ergibt sich aus 4):

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{2\varphi\varphi'}{1+\varphi^2},$$

[1]) Unter log wird der natürliche Logarithmus verstanden, da die Schreibart $l$ leicht zu Mißverständnissen führt.

oder:

$$\frac{\varphi'}{1+\varphi^2} = c_1: \quad \varphi = \operatorname{tg}(c_1\psi + c_2),$$

wo $c_1$ und $c_2$ reelle willkürliche Konstanten sind, und weiter:

$$\mu = -c_1\int(\psi_x\,dy - \psi_y\,dx) + \log\cos(c_1\psi + c_2)$$
$$\lambda = e^{-w}\cos(c_1\psi + c_2),$$

wenn $w = c_1\int(\psi_x\,dy - \psi_y\,dx)$ gesetzt ist. Hieraus ergibt sich nach 1) $X$ und schließlich:

$$Z = (X + Yi) = -i e^{ic_2}\int e^{ic_1\psi - w}\,dz$$

als die verlangte Abbildungsfunktion. Da nun $\psi$ der reelle Teil einer willkürlichen Funktion der komplexen Variabeln $z$:

$$f(z) = \psi + i\varphi$$

ist, so erhält man $w = c_1\varphi$, oder:

$$Z = -i e^{ic_2}\int e^{ic_1 f(z)}\,dz, \tag{6}$$

wo die Konstante vor dem Integral auch weggelassen werden kann, weil sie nur eine Drehung des Koordinatensystems bedeutet.

Aber auch die Gleichung 5) läßt sich vollständig lösen. Setzt man:

$$\xi = x + yi, \quad \eta = x - yi,$$

so geht 5) über in:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}f'(\psi).$$

Ein erstes Integral ist:

$$\log\frac{\partial\psi}{\partial\eta} = f(\psi) + \log V'.$$

wo $V$ eine willkürliche Funktion von $\eta$, $V'$ ihre Ableitung bedeutet. Setzt man noch $f(\psi) = \log F(\psi)$, so erhält man:

$$\frac{\partial \psi}{F(\psi)} = d\eta \cdot V'$$

oder:

$$\psi = \Theta(U(x + iy) + V(x - iy)),$$

wo $\Theta$ eine willkürliche Funktion ihres Argumentes bedeutet; damit ein reeller Wert für $\int \frac{\partial \psi}{F(\psi)}$ entsteht, müssen $U$ und $V$ komplex konjugierte Funktionen der Argumente $x + yi$, $x - yi$ bedeuten. In der Tat wird dann auch:

$$\frac{\Delta_2 \psi}{\psi_x^2 + \psi_y^2} = \frac{\Theta''}{\Theta'^2}.$$

so daß die rechte Seite eine Funktion von $\psi$ allein wird. Hieraus ergibt sich, was übrigens zu erwarten war, daß für die Kurven $\psi = \text{const}$ jede reelle Funktion des reellen Teils einer Funktion der komplexen Variabeln $z$ gleich einer Konstanten zu setzen ist.

Einige einfache Beispiele mögen dies veranschaulichen.

Sollen die Kurven $c$ ein System von Parallelen bilden, so ist $\psi = \alpha x + \beta y$ zu setzen. Dies ist der reelle Teil der Funktion:

$$f(z) = (x + yi)(\alpha - \beta i),$$

demnach ist:

$$Z = \int e^{c_1 z (\alpha + \beta i)} \, dz$$

die gesuchte Abbildungsfunktion.

Das System gleichseitiger Hyperbeln:

$$\psi = x^2 - y^2 + 2cxy + 2\alpha x + 2\beta y = \text{const}$$

ist das einzige System von eigentlichen Kegelschnitten, welches der Gleichung $\Delta_2 \psi = 0$ genügt: dem entspricht die Funktion:

$$f(z) = z^2(1 - ic) + 2z(\alpha - i\beta)$$

und hieraus folgt:

$$Z = \int e^{[2z(\alpha i + \beta) + z^2(c + i)] c_1} \, dz.$$

Um auch ein Beispiel für den Fall der Gleichung 5) anzuführen, setze man:

$$f(z) = X + Yi,$$

und wähle:

$$\psi = \frac{X_y}{X_x}.$$

Dann wird:

$$\frac{\Delta_2 \psi}{\Delta \psi} = \frac{2\psi}{1+\psi^2}$$

oder:

$$\frac{\varphi'}{1+\varphi^2} = \frac{c_1}{1+\psi^2}; \quad \varphi = \operatorname{tg}(c_1 \operatorname{arctg} \psi + c_2).$$

Bestimmt man jetzt aus 3) den Wert von $\lambda$, so erhält man als Abbildungsfunktion:

$$Z = \int (f'(z))^{-c_1} dz.$$

Ist insbesondere $f(z) = \frac{1}{n} z^n$, so wird für $z = \varrho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$:

$$\psi = -\operatorname{tg}(n-1)\varphi;$$

die Kurven $\psi = \text{const}$ bilden hier ein Büschel von durch den Nullpunkt der Koordinaten gehenden Geraden, denen nach § 1 ein solches Büschel in der zweiten Ebene entspricht.

Setzt man dagegen:

$$\psi = X_y^2 + X_x^2,$$

wobei $X$ wieder in der eben angegebenen Weise zu $f(z)$ gehört, so ist:

$$\frac{\Delta_2 \psi}{\Delta \psi} = \frac{1}{\psi}$$

und man erhält:

$$Z = -i\, e^{ic_2} \int (f' z)^{2ic_1} dz.$$

Setzt man z. B. $f(z) = \frac{1}{n} z^n$, so werden die Kurven $\psi = \text{const}$ konzentrische Kreise, denen dann in der zweiten Ebene logarithmische Spiralen entsprechen.

## § 4.

## Konforme Transformation einer Fläche in eine andere.

Sind zwei Flächen irgendwie durch gleiche Werte der unabhängigen Parameter $u, v$ aufeinander abgebildet, und die Quadrate ihrer Längenelemente:

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$
$$ds_1^2 = e_1\,du^2 + 2f_1\,du\,dv + g_1\,dv^2;$$

setzt man ferner:

$$\sqrt{eg - f^2} = H, \quad \sqrt{e_1 g_1 = f_1^2} = H_1,$$

so ist bekanntlich:

$$\gamma = \frac{H(du\,dv^2 - dv\,du^2)}{ds^3} + \frac{P}{ds^3},\text{[1]}$$

wo $P$ eine Differentialform dritten Grades in $du$, $dv$, die geodätische Krümmung irgend einer auf der ersten Fläche gezogenen Kurve. Hieraus folgt:

$$\text{1)} \qquad \gamma\frac{ds^3}{H} - \gamma_1\frac{ds_1^3}{H_1} = \frac{P}{H} - \frac{P_1}{H_1};$$

d. h. die Differenz linker Hand ist nur von den ersten Differentialen abhängig.[2] Nimmt man nun an, daß die Flächen konform aufeinander abgebildet sind, und ist etwa:

---

[1]) $P$ hat den Wert:

$$\frac{1}{2H}\begin{vmatrix} e\,du + f\,dv & 2a\,du^2 + 4a'\,du\,dv + 2a''\,dv^2 \\ f\,du + g\,dv & 2b\,du^2 + 4b'\,du\,dv + 2b''\,dv^2 \end{vmatrix},$$

wo:

$$2a = e_u, \qquad 4a' = 2e_v, \qquad 2a'' = 2f_v - g_u$$
$$2b = 2f_u - e_v, \qquad 4b' = 2g_u, \qquad 2b'' = g_v$$

zu setzen ist.

[2]) Diese Bemerkung, die für alle in dieser Arbeit enthaltenen Betrachtungen wesentlich ist, benutzt, wie ich sehe, auch schon Herr Mehmke, allerdings in ganz anderer Richtung, in seiner Note „Über die geodätische Krümmung der auf einer Fläche gezogenen Kurven und

$$2) \qquad \begin{aligned} ds^2 &= e(du^2 + dv^2) \\ ds_1^2 &= \lambda e(du^2 + dv^2). \end{aligned}$$

so ergibt sich aus 2):

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2}\frac{e}{\lambda\sqrt{\lambda}\,ds^3}\begin{vmatrix} du, & \lambda_u(du^2 - dv^2) + 2\lambda_v\,du\,dv \\ dv, & \lambda_v(dv^2 - du^2) + 2\lambda_u\,du\,dv \end{vmatrix}$$

oder:

$$3) \qquad \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2\lambda\sqrt{\lambda}}\frac{(\lambda_u\,dv - \lambda_v\,du)}{ds} \\ \gamma_1\,ds_1 - \gamma\,ds &= \frac{1}{2\lambda}(\lambda_u\,dv - \lambda_v\,du). \end{aligned}$$

Für die Kurvenschar $c$, welche der Differentialgleichung:

$$\lambda_u\,dv - \lambda_v\,du = 0$$

genügt, und die ihr entsprechende $c_1$ gelten ganz ähnliche Eigenschaften wie in § 1. Diese Kurven haben in entsprechenden Punkten gleiche geodätische Kontingenzwinkel, und jede Kurve der ersten Fläche, welche eine $c$ berührt, geht in eine die Kurve $c_1$ der zweiten Fläche dergestalt berührende über, daß für den Berührungspunkt die geodätischen Kontingenzwinkel erhalten bleiben, u. s. w.

Die Kurven $c$ lassen sich im allgemeinen nicht durch Quadratur bestimmen;[1]) dagegen sind ihre orthogonalen Tra-

---

ihre Änderung bei beliebiger Transformation" (auch Berührungstransformation). Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 37, p. 188, 1892. Man vergleiche auch die anderweitigen Arbeiten dieses Autors:

„Über zwei die Krümmung von Kurven und das Gaußsche Krümmungsmaß von Flächen betreffende charakteristische Eigenschaften der linearen Punkttransformation", ebenda, Bd. 36, p. 206, 1891;

„Untersuchungen über die auf die Krümmung von Kurven und Flächen bezüglichen Eigenschaften der Berührungstransformationen", ebenda, Bd. 38, p. 7, 1893, sowie meine Arbeit „Zur Theorie der Krümmung der Flächen". Math. Annalen, Bd. 39, p. 179, 1891.

[1]) Einfache auf Quadraturen führende Fälle sind z. B.:

$$\lambda = UV, \quad \lambda = U + V, \quad \lambda = \frac{U - V}{U + V} \text{ u. s. w.,}$$

wo $U, V$ Funktionen von $u, v$ allein sind.

jektorien unmittelbar gegeben durch $\lambda = \text{const.}$ und in entsprechenden Punkten dieser Trajektorien auf den beiden Flächen findet für sie berührende entsprechende Kurven zwischen den geodätischen Krümmungen die Beziehung:

$$\gamma_1 \sqrt{\lambda} - \gamma = \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\lambda_u^2 + \lambda_v^2}$$

statt.

Der Ausdruck:

$$\frac{\lambda_u \, dv - \lambda_v \, du}{\lambda}$$

wird ein vollständiges Differential, wenn:

$$\Delta_2 \log \lambda = 0 \tag{4}$$

ist, wo $\Delta_2$ der zweite Differentialparameter:

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

ist. Tritt an Stelle des speziellen Längenelementes 2):

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

so ergiebt sich für die Differenz der geodätischen Kontingenzwinkel:

$$d\varepsilon = \gamma\,ds, \qquad d\varepsilon_1 = \gamma_1\,ds_1,$$

5)
$$d\varepsilon_1 - d\varepsilon = \frac{1}{2H}\left\{\left(g\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} - f\frac{\partial \log \lambda}{\partial v}\right) dv - \left(e\frac{\partial \log \lambda}{\partial v} - f\frac{\partial \log \lambda}{\partial u}\right) du\right\}$$

und hier ist, wie übrigens aus 4) schon zu ersehen, die rechte Seite ein vollständiges Differential, wenn:

$$\Delta_2 \log \lambda = 0 \tag{6}$$

ist, wobei jetzt $\Delta_2$ den zweiten Beltramischen Differentialparameter in Bezug auf das allgemeine Längenelement bedeutet. Aus der bekannten Formel für das Krümmungsmaß $k$:

$$2Hk = \frac{\partial}{\partial v}(e(2f_u - e_v) - fe_u) - \frac{\partial}{\partial u}(eg_u - fe_v)$$

erhält man, wenn man $e, f, g$, durch $\lambda e, \lambda f, \lambda g$ ersetzt, die Beziehung zwischen den Krümmungsmaßen $k$ und $k_1$:

7) $$\lambda k_1 - k = -\tfrac{1}{2}\Delta_2 \log \lambda.$$

Der Ausdruck $d\varepsilon_1 - d\varepsilon$ ist daher nur dann ein vollständiges Differential, wenn zwischen den Krümmungsmaßen in korrespondierenden Punkten die Gleichung:

8) $$\lambda k_1 - k = 0$$ [1]

besteht.

Genügt also der Modul $\lambda$ der Bedingung 6), so ist für je zwei entsprechende Kurvenstücke mit den Bogenelementen $ds$, $ds_1$:

9) $$\begin{aligned} d\varepsilon_1 - d\varepsilon &= d\Omega \\ \sqrt{k_1}\,ds_1 &= \sqrt{k}\,ds \\ \int k_1\,d\omega_1 &= \int k\,d\omega, \end{aligned}$$

wo $d\omega$, $d\omega_1$ korrespondierende Flächenelemente sind; d. h. entsprechende Flächenstücke haben gleiche Curvatura integra. Diese letzteren Sätze bilden eine wesentliche Erweiterung der entsprechenden für die Ebene, welch letztere aus denselben für $k = k_1 = 0$, d. h. wo beide Flächen developpabel sind, hervorgehen. Niemals lassen sich dagegen z. B. zwei Flächen konstanter Krümmung derart aufeinander beziehen, daß $d\varepsilon_1 - d\varepsilon$ ein totales Differential wird, den einzigen

[1]) $k$ und $k_1$ müssen daher stets von gleichen Zeichen sein.

Bringt man Formel 5) für eine geschlossene Kurve der ersten Fläche zur Anwendung, die ein „Elementarflächenstück" begrenzt und entspricht ihr wieder eine solche Kurve der zweiten Fläche, so ergibt sich durch Anwendung des Greenschen Satzes für die Summe aller Kontingenzwinkel:

$$E_1 - E = \tfrac{1}{2}\int d\omega\,\Delta_2 \log \lambda;$$

dieser Satz aber geht aus dem Gauß-Bonnetschen Satze hervor, sowie man die Formel 7) benutzt.

Fall ausgenommen, wo $\lambda$ selbst eine Konstante ist, womit die Beziehung auf die Ähnlichkeit resp. Kongruenz hinauskommt.

Um ein Beispiel für den unter 8), 9) betrachteten Fall zu geben, setze man:

$$\begin{aligned} \varphi(u+iv) &= U+iV \\ \underline{\varphi}(u-iv) &= U-iV, \end{aligned} \tag{10}$$

wo $\underline{\varphi}$ die komplex konjugierte Funktion zu $\varphi$ ist, und nehme an, daß diese Formeln sich eindeutig so umkehren lassen, daß:

$$\begin{aligned} u &= \mu(U,V) = \mu \\ v &= \nu(U,V) = \nu \end{aligned}$$

wird. Das Quadrat des Längenelementes:

$$ds_1^2 = e(\mu,\nu)(dU^2 + dV^2)$$

geht jetzt durch die Transformation 10) über in:

$$ds_1^2 = e(u,v)(du^2 + dv^2)\,\varphi'\,\underline{\varphi}'$$

und die beiden Flächen mit den Quadraten der Längenelemente:

$$\begin{aligned} ds^2 &= e(du^2 + dv^2) \\ ds_1^2 &= \varphi'\,\underline{\varphi}'\,e(du^2 + dv^2) \end{aligned}$$

stehen jetzt in konformer Beziehung, so daß $\lambda = \varphi'\,\varphi'$ ist. Dabei ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\log \varphi'\,\underline{\varphi}') &= \frac{\partial}{\partial v}\operatorname{arctg}\left(\frac{U_u}{U_v}\right) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}(\log \varphi'\,\underline{\varphi}') &= -\frac{\partial}{\partial u}\operatorname{arctg}\left(\frac{U_u}{U_v}\right), \end{aligned}$$

also:

$$d\varepsilon_1 - d\varepsilon = d\operatorname{arctg}\left(\frac{U_u}{U_v}\right),$$

wie nach § (2) zu erwarten war.

Zur Auffindung der Kurven $c$ im allgemeinen Falle, zu dem wir zurückkehren, genügt es übrigens, einen integrierenden Faktor $\mu$ des Differentialausdruckes auf der rechten Seite von 5) zu bestimmen. Dieser muß den Gleichungen:

$$11)\quad \begin{aligned} \mu\left(g\frac{\partial \log\lambda}{\partial u} - f\frac{\partial\log\lambda}{\partial v}\right) &= H\frac{\partial\log\lambda_1}{\partial v} \\ \mu\left(e\frac{\partial\log\lambda}{\partial v} - f\frac{\partial\log\lambda}{\partial u}\right) &= -H\frac{\partial\log\lambda_1}{\partial u} \end{aligned}$$

genügen. Dies gibt die Gleichung:

$$12)\qquad H\Delta(\log\lambda,\ \log\mu) + \Delta_2\log\lambda = 0,$$

wo $\Delta$ der Beltramische Zwischenparameter ist. Aus den Gleichungen 11) folgt aber auch:

$$H\frac{\partial\log\lambda}{\partial u} = \frac{e\dfrac{\partial\log\lambda_1}{\partial v} - f\dfrac{\partial\log\lambda_1}{\partial u}}{\mu}$$

$$-H\frac{\partial\log\lambda}{\partial v} = \frac{g\dfrac{\partial\log\lambda_1}{\partial u} - f\dfrac{\partial\log\lambda_1}{\partial v}}{\mu}$$

oder, wenn man $\dfrac{1}{\mu} = \mu_1$ setzt:

$$H(\Delta\log\mu_1,\ \log\lambda_1) + \Delta_2\log\lambda_1 = 0.$$

Dies ist die Bedingung für den integrierenden Faktor $\mu_1$, der für die konforme Beziehung der beiden Flächen mit den Quadraten des Längenelementes:

$$\begin{aligned} ds^2 &= e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 \\ ds_2^2 &= \lambda_1\,ds^2 \end{aligned}$$

zu suchen ist, und dieser Faktor ist ohne weiteres bekannt, sobald man $\mu$ aus der Gleichung 12) gefunden hat.

## § 5.

### Konforme Raumtransformation einer Kurve.

Es seien:

$$X_i = \varphi_i(x_1\, x_2\, x_3); \qquad i = 1, 2, 3$$

drei eindeutige reelle etc.... Funktionen, welche in einem gewissen Gebiete $x$ eine eindeutige Umkehrung zulassen; ihre daselbst nicht verschwindende Funktionaldeterminante sei $\Delta$. Jede Kurve des Gebietes $x$ wird dann in eine Kurve des Gebietes $X$ transformiert werden. Nun ist:

$$d\,X_i = \sum \varphi_{i,k}\, d\,x_k$$
$$d^2\,X_i = \sum \varphi_{i,kl}\, d\,x_k\, d\,x_l,$$

wo die Differentiale nach irgend einer unabhängigen Variabeln genommen sind. Dabei ist $\varphi_{i,k} = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}, \ldots$ so daß die hinter dem Komma stehenden Indices Differentiationen nach den betreffenden Variabeln bedeuten; die Summation bezieht sich auf diese letzteren Indices. Setzt man noch:

$$\sigma_i = \sum \varphi_{i,kl}\, d\,x_k\, d\,x_l,$$

führt man zugleich für die Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

allgemein die abkürzende Beziehung:

$$(A\,B\,C)$$

ein, so wird:

$$1) \qquad \Delta\,(d\,x\,d^2\,x\,a) = (d\,X\,d^2\,X\,A) - (d\,X\,\sigma\,A).$$

Dabei sind die $a_1\, a_2\, a_3$ oder $a_i$ beliebige Größen (Funktionen der $x_i$) und:

$$A_i = \sum a_k\, \varphi_{i,k}.$$

Setzt man noch:

$$a_i = k \cos \alpha_i$$

$$A_i = K \cos A_i$$

$$\delta = |(d x_2 d^2 x_3 - d x_3 d^2 x_2)^2 + (d x_3 d^2 x_1 - d x_1 d^2 x_3)^2 + (d x_1 d^2 x_2 - d x_2 d^2 x_1)^2|^{\frac{1}{2}}$$

und bezeichnet man das Bogenelement einer Kurve im $x$ Gebiete mit $ds$, ihren Krümmungshalbmesser mit $r$, so ist:

$$d s^3 = r \delta;$$

führt man ferner die analogen Bezeichnungen mit großen Buchstaben für das Gebiet der $X$ ein; bezeichnet man endlich mit $\vartheta$ den Winkel zwischen der Binormale der ersten Kurve und der Richtung $\cos \alpha_1$, $\cos \alpha_2$, $\cos \alpha_3$ und gibt dem Winkel $\Theta$ die analoge Bedeutung für die entsprechende Kurve, so hat man nach 1):

$$\text{2)} \qquad k \Delta \frac{d s^3}{r} \cos \vartheta = K \frac{d S^2}{R} \cos \Theta - U,$$

wo $U$ der Differentialausdruck dritten Grades:

$$U = (d X \sigma A)$$

ist. Für je zwei korrespondierende Kurven ist daher die Differenz der beiden $r$ und $R$ enthaltenden Glieder nur abhängig von den ersten Differentialen, d. h. der Tangentenrichtung der gewählten Kurve. Die elementaren Komplexkegel $U = 0$ sind Kegel dritten Grades, und jede Komplexkurve im Sinne von Lie, welche zu diesen Kegeln gehört, hat die Eigenschaft, daß für sie und ihre entsprechende die Relation besteht:

$$k \Delta \frac{d s^3}{r} \cos \vartheta = K \frac{d S^3}{R} \cos \Theta.$$

Besondere Vereinfachungen treten auch hier ein, wenn man eine konforme Transformation des Raumes betrachtet, d. h.:

$$X_i = \frac{x_i}{\varrho^2}; \quad \sum x_i^2 = \varrho^2$$

setzt. In diesem Falle erhält man die Gleichung 2) am einfachsten durch Differentiation der Identität:

$$X_i \sigma = x_i; \quad \sigma = \varrho^2;$$

nämlich aus:

$$\sigma\, d X_i + d\,\sigma\, X_i = d\, x_i$$
$$\sigma\, d^2 X_i + 2\, d\,\sigma\, d\, X_i + d^2\,\sigma\, X_i = d^2\, x_i.$$

Es ergibt sich so leicht:

$$3)\qquad (-d\,x\, d^2\, x\, a) = \sigma^2\,(d\,X\, d^2\, X\, A) + 2\,\frac{d\,s^2}{\sigma}\,(d\,x\,x\,a).$$

Setzt man:

$$4)\qquad \begin{aligned} a_i &= k \cos \alpha_i \\ A_i &= a_i - 2\,\frac{x_i}{\sigma} \sum a_i\, x_i = K \cos A_i, \end{aligned}$$

so wird:

$$k^2 = K^2; \quad k = K,$$

und aus 3) folgt nunmehr:

$$5)\qquad -\frac{d\,s}{r} \cos \vartheta = \frac{d\,S}{R} \cos \Theta + \frac{2\,T}{\varrho^2\, k},$$

wo mit $T$ die Determinante:

$$T = \begin{vmatrix} d\,x_1 & d\,x_2 & d\,x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (d\,x\,x\,a)$$

bezeichnet ist. Je nach Wahl der willkürlichen Größen $a_i$ erhält man so verschiedene Folgerungen aus der allgemeinen Gleichung 5).

Da nach 4):

$$\frac{\cos \alpha_i - \cos A_i}{2} = \frac{x_i}{\sigma} \sum x_i . \cos \alpha_i .$$

so liegen die beiden Richtungen $\cos a_i$, $\cos A_i$ $(i=1,2,3)$, gegen welche die Winkel der Binormalen entsprechender Kurven zu nehmen sind, in einer Ebene mit dem Radius vector $\varrho$, und letzterer halbiert den Winkel zwischen $\cos a_i$ und $-\cos A_i$.

Wählt man nun insbesondere $a_i = x_i$, so wird $\cos a_i = -\cos A_i (i=1,2,3)$, und es folgt, da jetzt $T=0$,

$$-\frac{ds}{r}\cos\vartheta = dS\frac{\cos\Theta}{R}.$$

Bezeichnet man daher die Richtung der Binormalen entsprechender Kurven mit $b$ resp. $B$, so ist für zwei solche Kurven immer:

$$\frac{\varrho^2}{r}\cos(\varrho, b) = \frac{\cos(\varrho, B)}{R}.$$

Setzt man dagegen:

$$\begin{aligned} a_1 &= \varphi_2\psi_3 - \varphi_3\psi_2 \\ a_2 &= \varphi_3\psi_1 - \varphi_1\psi_3 \\ a_3 &= \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1, \end{aligned} \tag{6}$$

wo $\varphi_i$, $\psi_i$ irgendwelche Funktionen von $x$ sind, so ist:

$$T = \begin{vmatrix} \sum dx_i\varphi_i & \sum dx_i\psi_i \\ \sum x_i\varphi_i & \sum x_i\psi_i \end{vmatrix},$$

wie man leicht durch Multiplikation von $T$ mit der Determinante $(\varphi\psi\beta)$ erhält. Nimmt man nun $\varphi_i = x_i$ $(i=1,2,3)$, so wird wegen $\sum a_i x_i = 0$ jetzt $\cos a_i = \cos A_i$. Ist endlich $\psi$ eine homogene Funktion von der Ordnung Null, deren partielle Differentialquotienten die $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ sind, so wird:

$$T = -d\psi\sum x_i\varphi_i$$

zugleich steht die Richtung $\cos a_i$ senkrecht auf dem Radius vector $\varrho$ und der Normalen der Kegelfläche $\psi = \text{const.}$ Einer

jeden Kurve entspricht vermöge der konformen Abbildung eine zweite derart, daß zwischen den Kosinus, welche die Binormalen mit der zum Radius vector senkrecht stehenden Tangente $t$ derjenigen Kegelfläche, auf der die Kurve liegt, die Beziehung:

$$-\frac{ds}{r}\cos(t,b) = \frac{dS}{R}\cos(t,B)$$

besteht; dabei ist natürlich:

$$\varrho^2\, dS = ds.$$

Ähnliche Sätze kann man auf dieselbe Weise erhalten. Dabei handelt es sich um die Frage, wann $T$ bis auf einen Faktor ein vollständiges Differential wird.

Setzt man:

$$T = \sum Q_i\, d\,x_i = (d\,x\,x\,\varphi),$$

wobei die $\varphi_i$ beliebige Funktionen von $x_1, x_2, x_3$ sind, so muß bekanntlich:

$$Q_1\left(\frac{\partial Q_2}{\partial x_3} - \frac{\partial Q_3}{\partial x_2}\right) + Q_2\left(\frac{\partial Q_3}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial x_3}\right) + Q_3\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial x_1}\right)$$

identisch verschwinden. Eine einfache Umformung liefert dafür die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \sum x_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} & \sum x_i \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} & \sum x_i \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_i} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

welche identisch bestehen muß. Diese Bedingung ist ersichtlich erfüllt, wenn die drei Funktionen $\varphi$ homogenen Funktionen gleicher Ordnung von $x_1\,x_2\,x_3$ proportional sind.

Allgemein aber gilt folgender Satz:

Der Ausdruck $T$ kann dann und nur dann auf die Form $\mu\, d\, V$ gebracht werden, wenn:

$$\varphi_i = x_i A + B \Omega_i$$

ist, wo $A$, $B$ willkürliche Funktionen der $x$ sind, und die $\Omega_i$ willkürliche Funktionen von der Ordnung Null bedeuten. Dies läßt sich auf folgendem Wege zeigen.

Jene Identität verlangt, daß die 3 Funktionen $\varphi$ der Bedingung:

$$7) \qquad \sum x_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = \lambda x_k + \mu \varphi_k, \quad k = 1, 2, 3$$

genügen, wo $\lambda, \mu$ irgendwelche Funktionen der $x$ sind. Diese partielle Differentialgleichung oder vielmehr die folgende:

$$\sum x_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + (\lambda x_k + \mu \varphi_k) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi_k} = 0,$$

wobei $\Theta(x_1, x_2, x_3, \varphi_k) = 0$ gesetzt ist, liefert das simultane System:

$$d x_1 : d x_2 : d x_3 : d \varphi_k = x_1 : x_2 : x_3 : \lambda x_k + \mu \varphi_k,$$

von dem zwei Integrale:

$$8) \qquad \frac{x_1}{x_3} = c_1, \quad \frac{x_2}{x_3} = c_2$$

bekannt sind. Man findet für $k = 1$:

$$\frac{d \varphi_1}{d x_3} = \frac{\lambda x_1 + \mu \varphi_1}{x_3} = \underline{\lambda} c_1 + \underline{\mu} \frac{\varphi_1}{x_3},$$

wo $\underline{\lambda}, \underline{\mu}$ aus $\lambda, \mu$ dadurch hervorgehen, daß man vermöge 8) $x_1$ und $x_2$ durch die Konstanten $c_1, c_2$ und $x_3$ ersetzt. Integriert man die letzte Gleichung durch eine Quadratur, so folgt:

$$\underline{B} \varphi_1 = c_1 \underline{A} + c_3,$$

mithin ist das Integral von 7) für $k = 1$:

$$B \varphi_1 = \frac{x_1}{x_3} A + \Omega_1 \left( \frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right),$$

wo $\Omega_1$ eine willkürliche Funktion ihrer Argumente, und die Konstanten $c_1$ und $c_2$ in $B$ und $A$ wieder vermöge 8) zu entfernen sind. Ebenso wird:

$$B\varphi_2 = \frac{x_2}{x_3} A + \Omega_2$$

$$B\varphi_3 = A + \Omega_3,$$

so daß allgemein:

$$\varphi_i = x_i A_1 + B_1 \Omega_i \tag{9}$$

gesetzt werden kann. Der Differentialausdruck $T$ kann daher nur dann durch Multiplikation mit einem integrierenden Faktor die Gestalt eines totalen Differentials annehmen, wenn er, abgesehen von einem willkürlichen Faktor, in die Form:

$$(d x\, x\, \Omega) \tag{10}$$

gebracht werden kann. Daß dies auch hinreichend ist, geht aus der obigen Betrachtung hervor,[1]) läßt sich aber auch direkt zeigen. Setzt man nämlich:

$$x_1 = x_3 \xi$$

$$x_2 = x_3 \eta,$$

so entsteht aus 10), abgesehen von einem Faktor:

$$\begin{vmatrix} d\xi & d\eta & 0 \\ \xi & \eta & 1 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \end{vmatrix}$$

und diese Differentialform läßt sich, da sie nur von zwei Variabeln abhängt, immer mittels eines integrierenden Faktors als vollständiges Differential ansehen.

---

[1]) Man erkennt unmittelbar, daß durch 9) die Integrabilitätsbedingung für $T$ erfüllt ist.

Aus den Gleichungen:

$$\mu(x_2 \varphi_3 - x_3 \varphi_2) = \frac{\partial \Omega}{\partial x_1}$$

$$\mu(x_3 \varphi_1 - x_1 \varphi_3) = \frac{\partial \Omega}{\partial x_2}$$

$$\mu(x_1 \varphi_2 - x_2 \varphi_1) = \frac{\partial \Omega}{\partial x_3},$$

welche jetzt bestehen müssen, folgt übrigens durch Summation:

$$\sum x_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 0,$$

so daß das Integral von $T = 0$ die Form $\Omega = \text{const}$ erhält, wo $\Omega$ eine homogene Funktion der Ordnung Null ist, welche eine Kegelfläche bedeutet. Auch der spezielle Ansatz 6) ist hierin enthalten. Setzt man nämlich in 9):

$$\Omega_1 = \Theta_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} - \Theta_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$$

$$\Omega_2 = \Theta_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \Theta_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_3}$$

$$\Omega_3 = \Theta_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \Theta_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

wobei $\psi$, $\Theta_1$, $\Theta_2$, $\Theta_3$ homogene Funktionen der Ordnung Null sind, so ist nach 9):

$$\sum \varphi_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0;$$

und zugleich kann man wieder drei Funktionen $f_1, f_2, f_3$ willkürlich so annehmen, daß:

$$\sum \varphi_i f_i = 0$$

ist; man hat nur die willkürliche Funktion $A_1$ der Gleichung:

$$A_1 \sum x_i f_i + B_1 \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \Theta_1 & \Theta_2 & \Theta_3 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0$$

gemäß zu wählen.

Zieht man noch dritte Differentiale bei der Transformation in Betracht, so ergeben sich im allgemeinen keine einfachen Beziehungen mehr. Bei der allgemeinen linearen Transformation ist natürlich:

$$(d\,x\,d^2x\,d^3x)$$

eine Invariante, und dies gilt für jede beliebige Zahl von Variabeln. Dies läßt sich z. B. für 3 Variabeln auf folgendem Wege zeigen.

Setzt man:

$$X_i = \sum \frac{a_{ik}x_k + d_i}{t}, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$t = \sum a_{4k}\,x_k + d_4,$$

so wird:

$$d\,X_i = \sum \frac{(a_{ik} - X_i\,a_{4k})}{t}\,d\,x_k$$

$$d^2X_i = \sum \frac{(a_{ik} - X_i\,a_{4k})}{t}\,d^2x_k - 2\,d\,X_i\frac{d\,t}{t}$$

$$d^3X_i = \sum \frac{(a_{ik} - X_i\,a_{4k})}{t}\,d^3x_k - 3\,d\,X_i\frac{d^2t}{t}$$

$$- 2\,d^2X_i\frac{d\,t}{t} + 2\,d\,X_i\frac{d\,t^2}{t^2}$$

und hieraus folgt unmittelbar, indem man die rechts stehenden Differentiale der $X_i$ auf die linke Seite setzt:

$$(d\,X\,d^2X\,d^3X) = (d\,x\,d^2x\,d^3x)\frac{\varDelta}{t^4},$$

wo $\varDelta$ die Determinante der Koeffizienten der vier linearen Formen:

$$\sum a_{sk}\,x_k + d_s, \quad s = 1, 2, 3, 4$$

ist. Hieraus folgt, daß bei jeder projektiven Transformation einer Kurve die invariante Beziehung:

$$\frac{dS^6}{R^2 T} = \frac{ds^6}{r^2 \tau} \frac{\Delta}{t^4}$$

besteht, wo $dS$, $ds$ die Bogenelemente, $R, r$ die Krümmungshalbmesser, $T, \tau$ die Torsionsradien bedeuten.

## § 6.

### Konforme Raumtransformation einer Fläche.

Ich füge endlich die Formeln für die Transformation einer Fläche vermöge der konformen Raumtransformation:[1])

$$X_i = \frac{x_i}{\varrho^2}, \quad \varrho^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

hinzu. Sind die $x_i$ von zwei Parametern $u, v$ abhängig, so erhält man:

$$\frac{\partial X_i}{\partial u} = \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{1}{\varrho^2} - \frac{2 x_i}{\varrho^3} \frac{\partial \varrho}{\partial u}$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial v} = \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{1}{\varrho^2} - \frac{2 x_i}{\varrho^3} \frac{\partial \varrho}{\partial v}$$

1) $$\frac{\partial^2 X_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} \left( \frac{1}{\varrho^2} - \frac{2 x_1^2}{\varrho^4} \right) - 2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial u \partial v} \frac{x_1 x_2}{\varrho^4} - 2 \frac{\partial^2 x_3}{\partial u \partial v} \frac{x_1 x_3}{\varrho^4}$$

$$- 2 \frac{x_1 f}{\varrho^4} - \frac{2}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial u} \frac{\partial X_1}{\partial v} - \frac{2}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial v} \frac{\partial X_1}{\partial u}$$

nebst ähnlichen Ausdrücken für die anderen zweiten partiellen Differentialquotienten. Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$(X_{uu} X_u X_v) = \Delta (x_{uu} x_u x_v) - \frac{2e}{\varrho^8} (x x_u x_v)$$

2) $$(X_{uv} X_u X_v) = \Delta (x_{uv} x_u x_v) - \frac{2f}{\varrho^8} (x x_u x_v)$$

$$(X_{vv} X_u X_v) = \Delta (x_{vv} x_u x_v) - \frac{2g}{\varrho^8} (x x_u x_v).$$

[1]) Einige der in diesem Paragraphen enthaltenen Betrachtungen sind vermutlich längst bekannt; ohne dieselben würde aber diese Arbeit keinen Abschluß erhalten haben.

Sind $p_1, p_2, p_3$ die Richtungskosinus der Normalen der ersten Fläche $e, f, g$, $E, F, G$ die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung derselben,[1] $P_1, P_2, P_3$, $e_1, f_1, g_1$, $E_1, F_1, G_1$ die entsprechenden Größen für die transformierte Fläche, so ist:

$$\varrho^4 e_1 = e, \quad \varrho^4 f_1 = f \quad \varrho^4 g_1 = g$$

$$(p\, x_u\, x_v) = \sqrt{eg - f^2}; \quad (P\, X_u\, X_v) = \sqrt{e' g' - f'^2} = \frac{1}{\varrho^4}\sqrt{eg - f^2};$$

$$(x\, x_u\, x_v) = \sum p_i x_i \sqrt{eg - f^2}.$$

Zur Abkürzung mag:

$$\sigma = \sum p_i x_i$$

gesetzt werden. Nun erhält man:

$$(x\, x_u\, x_v)^2 = \varrho^2 (eg - f^2 - t),$$

wo:

$$t = e\varrho_v^2 - f\, 2\, \varrho_u \varrho_v + g\varrho_u^2; \tag{3}$$

daher wird:

$$\sigma = \varrho \sqrt{1 - \Delta(\varrho)},$$

wo $\Delta$ der erste Differentialparameter ist; $\sigma$ ist jedoch mit dem Vorzeichen von $\sum p_i x_i$ zu nehmen. Man hat nun aus 2):

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{E}{\varrho^2} - \frac{2e\sigma}{\varrho^4} \\ F_1 &= -\frac{F}{\varrho^2} - \frac{2f\sigma}{\varrho^4} \\ G_1 &= -\frac{G}{\varrho^2} - \frac{2g\sigma}{\varrho^4}. \end{aligned} \tag{4}$$

Ich bestimme ferner die Richtungskosinus der Normale der transformierten Fläche. Für Größen $Q_1, Q_2, Q_3$, die nur

[1] Dabei ist:
$$p_1 \sqrt{eg - f^2} = \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial u}; \quad E = \sum p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} \text{ etc. } \ldots$$

um einen positiven Faktor von den $P_1, P_2, P_3$ verschieden sind, erhält man leicht aus 1) die Gleichungen:

$$\sum Q_i x_i = \sigma \sqrt{eg - f^2}$$

$$\sum Q_i \frac{\partial x_i}{\partial u} = 2 \frac{\varrho_u}{\varrho} \sigma \sqrt{eg - f^2}$$

$$\sum Q_i \frac{\partial x_i}{\partial v} = 2 \frac{\varrho_v}{\varrho} \sigma \sqrt{eg - f^2},$$

und durch deren Auflösung:

$$Q_i \sqrt{eg - f^2} = -\frac{2\sigma}{\varrho} \left\{ \varrho_u \left( f \frac{\partial x_i}{\partial v} - g \frac{\partial x_i}{\partial u} \right) - \varrho_v \left( e \frac{\partial x_i}{\partial v} - f \frac{\partial x_i}{\partial u} \right) \right\}$$
$$+ p_i (eg - f^2 - 2t);$$

hieraus folgt:

$$Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = (eg - f^2),$$

mithin:

$$5)\quad (eg - f^2) P_i = -\frac{2\sigma}{\varrho} \left\{ \varrho_u \left( f \frac{\partial x_i}{\partial v} - g \frac{\partial x_i}{\partial u} \right) - \varrho_v \left( e \frac{\partial x_i}{\partial v} - f \frac{\partial x_i}{\partial u} \right) \right\}$$
$$+ p_i (eg - f^2 - 2t).$$

Hiermit sind die Kosinus der Normale der transformierten Fläche in der Form:

$$P_i = \varkappa p_i + \lambda \frac{\partial x_i}{\partial u} + \mu \frac{\partial x_i}{\partial v}$$

dargestellt, welche eine unmittelbare Beziehung der Lage derselben gegen die Normale der ursprünglichen Fläche liefert. Für den Winkel $\omega$ zwischen den beiden Normalen folgt nach 5):

$$\cos \omega = 1 - 2 \Delta(\varrho);$$

die Kurven $\Delta(\varrho) = \text{const}$ sind daher auf der gegebenen Fläche dadurch ausgezeichnet, daß der Winkel entsprechender Normalen konstant bleibt.

Auch folgt aus 5):

$$\sum P_i x_i = \sum p_i x_i,$$

oder:

$$\sum P_i X_i = \sum \frac{p_i x_i}{\varrho^2},$$

wie man übrigens auch unmittelbar aus 4) finden kann, wenn man die transformierte Fläche zur ursprünglichen macht; diese Formel zeigt, daß der Kosinus des Winkels der Flächennormalen mit dem Radius vector bei der Transformation ungeändert bleibt, wie übrigens zu erwarten war.

Es ergibt sich ferner aus 4):

$$\frac{E_1 du^2 + 2 F_1 du dv + G_1 dv^2}{e_1 du^2 + 2 f_1 du dv + g_1 dv^2} = -\varrho^2 \frac{(E du^2 + 2 F du dv + G dv^2)}{e du^2 + 2 f du dv + g dv^2} - 2\sigma.$$

Bezeichnet man nun den Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes für irgend eine auf der ursprünglichen Fläche gemessene Richtung durch $r$, die entsprechende durch $R$, so folgt:

$$\frac{1}{R} = -\frac{\varrho^2}{r} - 2\sigma.$$

Insbesondere wird aber für irgend zwei von demselben Punkte ausgehende Richtungen:

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} = -\varrho^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Man kann also sagen: Die Differenz der Krümmungen zweier zu einem Punkt der Fläche gehörigen Normalschnitte bleibt bis auf den Faktor $-\varrho^2$ durch die Transformation ungeändert.

Ist $\sigma = 0$, so erhält man:

$$\frac{1}{R} = -\frac{\varrho^2}{r}$$

d. h. die Krümmungen der Normalschnitte bleiben bis auf den Vektor $-\varrho^2$ ungeändert in allen Punkten, in denen die Fläche von ihrem zum Zentrum der Inversion gehörigen Tangentenkegel berührt wird.

Ist dagegen $r = \infty$, also die Richtung auf der gegebenen Fläche die einer Haupttangente, so wird:

$$\frac{1}{R} = -2\sigma$$

oder: Bei der konformen Transformation gehören zu den beiden Haupttangentenrichtungen eines Flächenpunktes Normalschnitte mit gleicher Krümmung $-2\sigma$.[1])

Auch die Formeln:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = -\varrho^2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) - 4\sigma$$

$$\frac{1}{R R_1} = \frac{\varrho^4}{r r_1} + 2\sigma\varrho^2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) + 4\sigma^2$$

welche sich auf die mittlere Krümmung und das Krümmungsmaß beziehen, mögen erwähnt werden, deren Verwendung für Minimalflächen ersichtlich ist.

Endlich gilt für beliebige Größen $a_1\, a_2\, a_3$ die invariante Beziehung:

$$\begin{vmatrix} E' & F' & G' \\ e' & f' & g' \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\varrho}\sigma \begin{vmatrix} E & F & G \\ e & f & g \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Bedeuten daher $a_1, a_2, a_3$ homogene Differentialformen gleicher Ordnung in $du, dv$, so hat man den Satz:

Das System der Kurven:

$$\begin{vmatrix} E & F & G \\ e & f & g \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

[1]) Man vgl. die konforme Transformation der Regelflächen, insbesondere die der Flächen zweiten Grades, u. s. w.

ist invariant bei der konformen Transformation. Ein ganz spezieller Fall davon ist die Invarianz der Krümmungslinien, und zwischen den Radien $T, T_1$ der geodätischen Torsion einer Kurve und ihrer Transformierten besteht also allgemein die Beziehung:

$$\frac{1}{T_1} = - \varrho^2 \frac{1}{T}.$$

---

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 4. Mai 1907.

Herr Wilhelm Konrad Röntgen hält einen Vortrag: „Über die Leitung der Elektrizität in Kalkspat und über den Einfluß der X-Strahlen darauf.“

Der Vortrag wird an anderer Stelle veröffentlicht werden.

Längere Zeit zurückliegende Beobachtungen über den Einfluß von X-Strahlen auf das Verhalten verschiedener sogenannter Isolatoren zwischen anliegenden plattenförmigen Elektroden, denen ein Spannungsunterschied erteilt wurde, veranlaßten den Vortragenden unter Mitwirkung des Herrn Dr. Joffé zu untersuchen, inwieweit von einem elektrischen Leitungsvermögen dieser Körper gesprochen werden kann. — Diese im Jahre 1904 angefangene Untersuchung erstreckte sich zunächst auf Kalkspat, und sie ergab u. a.: 1. Die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes für die Bewegung der Elektrizität in diesem Körper; 2. die Existenz einer unter Umständen nach Tausenden von Volt zählenden Polarisationsspannung; 3. als Sitz dieser Polarisation nicht das ganze Innere, sondern lediglich die Stelle des Kristalls, die unmittelbar unter der Kathode liegt; 4. die Berechtigung, von einem meßbaren Leitungsvermögen einer Kalkspatplatte sprechen zu dürfen; 5. einen sehr großen Einfluß der Temperatur auf dieses Leitungsvermögen; dasselbe steigt zwischen $0^0$ und $100^0$ um nahezu $11^0/_0$ des jemaligen Betrages, wenn die Temperatur um $1^0$ zunimmt.

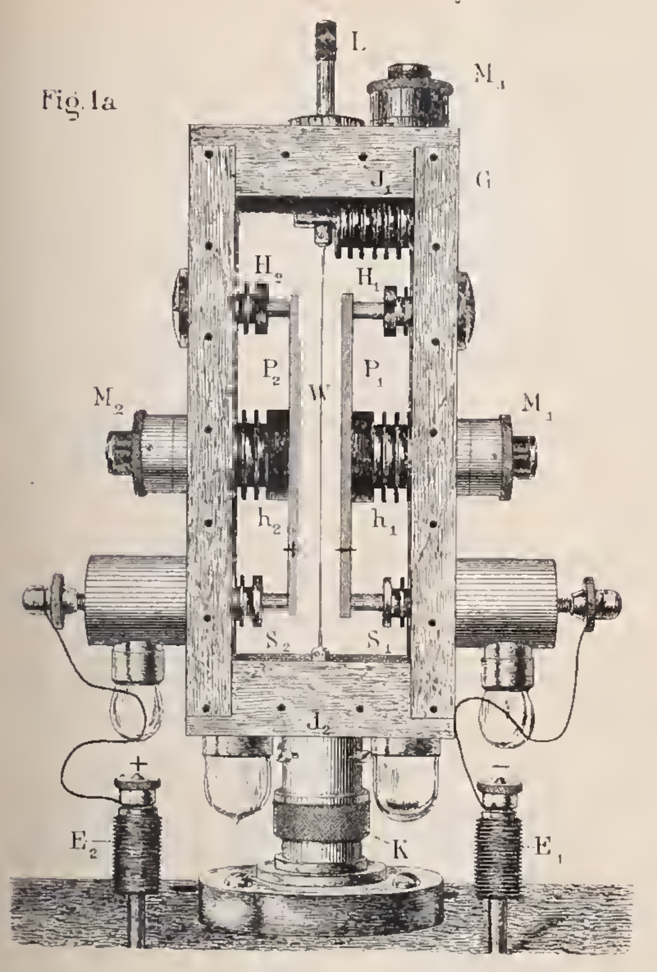
Nachdem diese und andere Ergebnisse gewonnen waren, glaubte der Vortragende als Resultat früherer Beobachtungen

mitteilen zu dürfen, daß das elektrische Leitungsvermögen des Kalkspats durch Bestrahlung mit X-Strahlen beträchtlich — z. B. auf das 100 bis 200 fache des Anfangswertes — erhöht werden kann. Diese Wirkung der X-Strahlen äußert sich aber erst im Laufe der Zeit, so daß bei gewöhnlicher Temperatur manche Tage nach der Bestrahlung vergehen müssen, bis der Kalkspat das Maximum seines Leitungsvermögens erhalten hat. Durch Erwärmen kann dieser Prozess beschleunigt werden. — Ein Rückgang des Leitungsvermögens auf den Wert vor der Bestrahlung kann rasch durch intensives Erhitzen, langsamer durch mäßiges Erwärmen des Kristalls bewirkt werden und findet auch höchst wahrscheinlich bei gewöhnlicher Temperatur, aber erst im Verlauf von einer sehr langen Zeit (wohl von vielen Jahrhunderten), statt.

---

Vorderansicht des Saitenelektrometers
Vorder- u. Rückwand entfernt. Masst. 1/2 nat. Grösse.

Fig. 1a




Gesamtansicht des Saitenelektrometers.

Fig. 1b

O
+
$E_2$
D
−
$E_1$
B

Fig. 5.

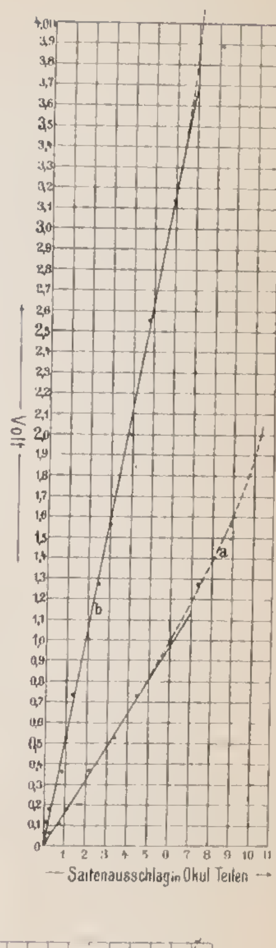



Fig. 2.

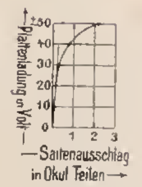



Fig. 4.

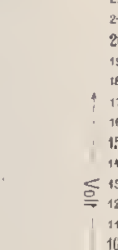



Fig. 6.

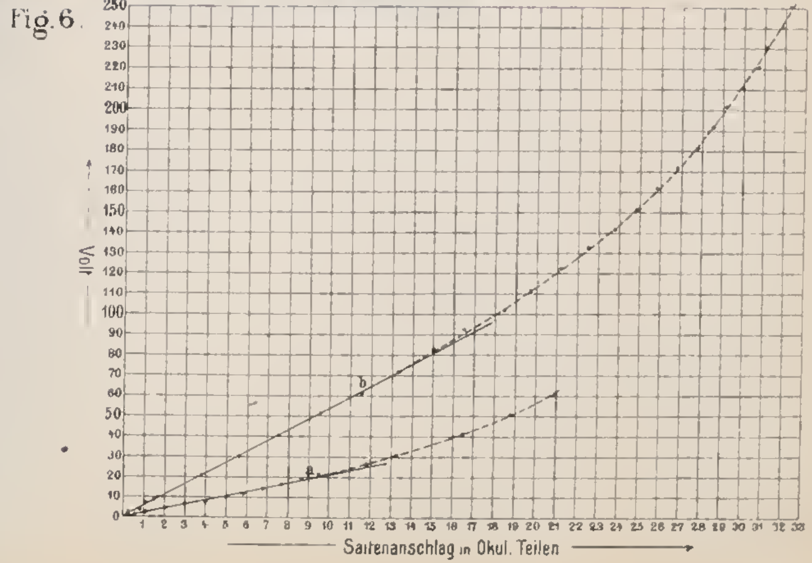



Fig. 3.

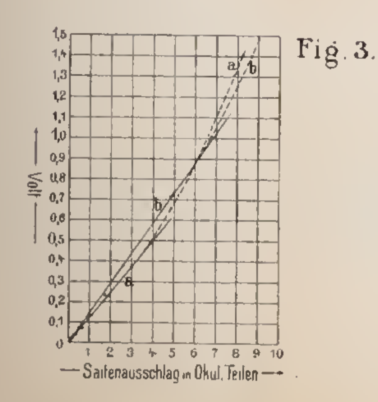
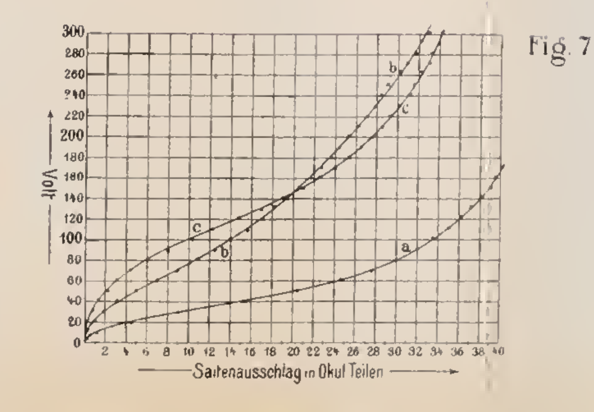



Fig. 7.






Lith Hub Köhler, Mchn



# Sitzungsberichte

der

# Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

## Mathematisch-physikalische Klasse.

### Sitzung vom 8. Juni 1907.

1. Herr Karl Goebel trug die Resultate einer Reihe experimentell-morphologischer Untersuchungen vor.

Diese bezogen sich 1. auf den Generationswechsel der Farne. Das Prothallium und die an ihm infolge der Befruchtung entstehende Farnpflanze werden gewöhnlich als scharf voneinander unterschiedene „Generationen" betrachtet. Es zeigte sich jedoch, daß an isolierten Blättern junger Farnpflanzen mit vollständiger Überspringung der Sporenbildung Prothallien entstehen können oder Mittelbildungen zwischen solchen und Blättern oder endlich neue Farnpflanzen. Diese Tatsachen zeigen, daß die Prothallien wesentlich nur eine rudimentäre Ausbildung des Farnkrautes selbst darstellen.

2. Die Bedingungen der Wurzelbildung. Für diese sind nicht nur, wie vielfach angenommen wurde, nur äußere, sondern auch innere Bedingungen maßgebend. An den unverletzten oberirdischen Stammteilen der Gartenbohne z. B. läßt sich auch wenn sie verdunkelt und feucht gehalten werden, keine Wurzelbildung hervorrufen, wohl aber dann, wenn die Verbindung mit dem Wurzelsystem unterbrochen ist. Daß dieses die Wurzel-

bildung am Sproß verhindert, wenn es selbst in Wachstum begriffen ist, wurde auch dadurch gezeigt, daß die Wurzelbildung am Sproß bei unverletztem Wurzelsystem dann erzielt werden konnte, wenn das letztere auf 5° abgekühlt oder durch verminderte Wasserzufuhr inaktiviert wurde.

3. Die Blattbildung amphibischer Pflanzen. Manche Pflanzen, die sowohl als Wasserpflanzen wie als Landpflanzen leben können, besitzen zweierlei verschiedene Blattformen, „Landblätter“ und „Wasserblätter“. Der Vortragende zeigte, daß hier nicht eine direkte Wirkung der Umgebung auf die Pflanze vorliegt, sondern daß die relative Menge organischer Substanzen darüber entscheidet, welche Blattform entstehen soll. Es konnte die Landform auch im Wasser erzielt werden, speziell dann wenn durch Zusatz geringer Mengen von Kupfersulfat eine Beschleunigung der Stoffwechseltätigkeit hervorgerufen wird.

2. Herr Siegmund Günther legt eine Abhandlung: „Ein Naturmodell der Dünenbildung“ vor.

Gegen die durchgehende Annahme, kontinentale Dünen müßten stets in der Form von „Barchanen“, Sandhaufen mit einer die Leeseite einnehmenden Höhlung, auftreten, sprechen gewisse außerordentlich regelmäßige Gebilde in der kalifornischen Wüste. Diese Ausnahme von der Norm hängt möglicherweise mit der Entstehung des merkwürdigen, vom Wasser des Coloradoflusses gespeisten Salton Lake zusammen, dessen Bildung auf das benachbarte Landschaftsbild einen tiefgehenden Einfluß ausgeübt hat.

3. Herr Wilhelm Konrad Röntgen überreicht eine Arbeit von Herrn Arnold Sommerfeld, Professor für theoretische Physik an der Universität, „Über die Bewegung der Elektronen“.

Die Arbeit befaßt sich nicht mit der heutzutage besonders dringlichen Frage: Wie sind die physikalischen Grundlagen der Elektronentheorie zu gestalten, um sie mit gewissen prinzipiellen Erfahrungen auf elektrischem und optischem Gebiete

in Einklang zu bringen? Vielmehr handelt es sich hier lediglich um die mathematischen Folgerungen derjenigen Anschauung von der Natur der Elektronen, die sich ursprünglich als die einfachste dargeboten hat: eine unveränderliche, den Raum gleichmäßig erfüllende, kugelförmig begrenzte Ladungsverteilung. Es waren nämlich zu Anfang des Jahres von Herrn Lindemann Einwände gegen die mathematische Zulässigkeit der Theorie erhoben worden, welche insbesondere das interessanteste Ergebnis der Elektronentheorie, die Aussicht auf eine elektromagnetische Begründung der Mechanik, in Frage zogen. Unter anderem ergab sich, daß die gleichförmige Bewegung des Elektrons nicht ohne äußeren Kraftaufwand bestehen könne.

Demgegenüber glaubt Verfasser durch Ausrechnung eines Zahlenbeispiels zeigen zu können, daß jener äussere Kraftaufwand nach den Formeln des genannten Autors einen so enormen Betrag haben müßte, wie er von der Erfahrung sicher nicht bestätigt wird. Verf. sieht den Grund für diesen Widerspruch teils in einer physikalisch ungerechtfertigten Wahl des Anfangszustandes für das Potential des bewegten Elektrons, teils in der weiteren mathematischen Behandlung dieses Potentials. Den Einwänden, welche von derselben Seite gegen frühere Untersuchungen des Verf. erhoben worden sind, glaubt Verf. in vollem Umfange begegnen zu können.



# Experimentell-morphologische Mitteilungen.

Von **Karl Goebel.**

(*Eingelaufen 8. Juni.*)

## I. Künstlich hervorgerufene Aposporie bei Farnen.

Als vor 30 Jahren die Mitteilungen von Pringsheim[1]) und Stahl erschienen, welche zeigten, daß aus Moossporogonien Protonema durch Auswachsen von nicht zur Sporenbildung verwendeten Zellen hervorgehen kann, lag die Frage nahe, ob bei Pteridophyten nicht ein analoger Vorgang zu erzielen sei. Versuche, welche ich in jener Zeit in Würzburg anstellte, blieben aber erfolglos, und ebenso ist es wahrscheinlich auch anderen ergangen. Später lernte man auch bei Pteridophyten die Tatsache der Aposporie kennen, die bei manchen Farnen unter Unterdrückung der Sporenbildung regelmäßig auftritt, so z. B. bei Athyrium filix femina f. clarissima. Erscheint hier die Überspringung der Sporenbildung als eine durch „innere" Ursachen bedingte, so zeigen andere Fälle wie der vor kurzem für ein Exemplar von Asplenium dimorphum beschriebene,[2]) daß sie bei einer sonst normalen Farnpflanze offenbar „induziert" werden kann. Denn hier zeigte sie sich

---

[1]) Pringsheim, „Über die Sprossung der Moosfrüchte und den Generationswechsel der Thallophyten". Jahrbücher für wissenschaftliche Botanik XI, 1 (1878) (Ges. Abhandl. II, p. 265). — E. Stahl, „Über künstlich hervorgerufene Protonemabildung an dem Sporogonium der Laubmoose". Bot. Zeitung 1876, p. 619.

[2]) Goebel, Aposporie bei Asplenium dimorphum. Flora, Bd. 95 (Erg.-Bd. z. Jahrg. 1905), p. 239.

an einer während mehrerer Jahre beobachteten Pflanze nur einmal an einem Blatte — hier aber sehr reichlich —, später nicht mehr; auch an einer aus einer Adventivknospe gezogenen Tochterpflanze des vorerwähnten Exemplares trat bis jetzt keine Aposporie ein; sie bildete nach den sterilen Blättern normale Sporophylle. Die Erscheinung künstlich hervorzurufen gelang aber auch bei dieser Pflanze nicht. So gelangte man zu der Ansicht, welche Bower[1]) folgendermaßen ausgesprochen hat: 'Both apogamy and apospory are decidedly rare phenomena: that they appear for the most part in plants of variable species and under conditions of cultivation which are not those normal to the plants. Moreover, attempts to induce apospory though successful in certain Mosses, have been entirely without results in ferns.'

Ein solches negatives Resultat konnte indes von einer weiteren Verfolgung der Frage nicht abhalten. Es wäre z. B. möglich, daß die Sporenbildung übersprungen werden könnte, zwar nicht an allen Blättern, aber an solchen, die in ihrer Beschaffenheit von der „normalen“ abweichen.

Aus zwei Gründen schienen mir die ersten Blätter der Keimpflanzen des Sporophyten zu solchen Versuchen besonders geeignet. Einmal hatte sich früher gezeigt, daß solche Primärblätter bei einer andern zu den Pteridophyten gehörigen Pflanze, bei Lycopodium inundatum durch ihre Regenerationsfähigkeit von den Blättern der älteren Pflanze abweichen,[2]) also eine andere „innere“ Beschaffenheit besitzen, als diese. Ein zweiter Grund war die Beobachtung, daß an einer apogam entstandenen Keimpflanze von Trichomanes Kraussii das erste Blatt zu einem Prothallium auswuchs.[3]) Dies legte die Annahme nahe, daß vielleicht Keimpflanzen speziell bei apogamen Farnen plastischer seien als ältere. Ich veranlaßte deshalb Fräulein H. Vesselovska zunächst zu Versuchen

[1]) Bower, Annals of botany, Vol. IV (1890), p. 368.

[2]) Goebel, „Über Prothallien und Keimpflanzen von Lycopodium inundatum“. Bot. Zeitung 1887, Nr. 12,

[3]) Vgl. die oben erwähnte Abhandlung über Asplenium dimorphum.

mit Primärblättern von apogam entstandenen Notochlaena-Keimpflanzen, und als diese ein positives Resultat ergeben hatten, auch zu solchen mit den Primärblättern eines normalen Farns, dessen Keimpflanzen gerade zur Hand waren, der Gymnogramme farinifera. Das dabei erhaltene Resultat, betreffs dessen ich auf die vorläufige Mitteilung[1]) und die spätere ausführliche Arbeit von H. Vesselovska verweise, war so interessant, daß es geboten schien, die Frage weiter zu verfolgen.

Es sei deshalb im folgenden über die bis jetzt von mir ausgeführten Versuche berichtet. Es wurden dabei verwendet die Primärblätter von

Aneimia Dregeana
Alsophila van Geertii
Ceratopteris thalictroides
Gymnogramme chrysophylla.
Polypodium aureum
Pteris longifolia

Außerdem standen mir nur noch Keimpflanzen von Marsilia Drummondii und zwei Adiantum-Arten zur Verfügung. diese ergaben ein negatives Resultat, alle anderen untersuchten Farne ein positives. Es ist möglich, daß die Adiantumblätter an sich auch regenerationsfähig sind, und nur absterben, ehe die Wachstumsvorgänge, die bei anderen beobachtet wurden, eingeleitet werden.

Das Verfahren bestand darin, daß die Primärblätter von der Pflanze getrennt und teils auf Torf teils auf sterilisierten Lehm ausgelegt wurden. Dabei ging eine größere Anzahl der Blätter zugrunde, andere aber zeigten das merkwürdige, im folgenden näher zu schildernde Verhalten.

Es traten nämlich Regenerationserscheinungen verschiedener Art auf. Entweder bildeten sich an den Blättern neue Pflanzen, oder es entstanden an ihnen Prothallien, mehrfach auch Gebilde, die nach ihrem Baue sich als Mittelbildungen zwischen Prothallien und Blättern erwiesen. Während sie im

[1]) Berichte der Deutschen Botan. Gesellschaft 1907, Bd. XXV, p. 85.

ersteren Falle also ein weiteres Beispiel bieten für den Satz, daß Keimpflanzen vielfach ein größeres Regenerationsvermögen aufweisen als ältere Pflanzen,[1]) stellt der zweite eine künstlich hervorgerufene Aposporie dar. Die beiden Fälle können an den verschiedenen Blättern eines und desselben Farns auftreten und sind, wie erwähnt, durch Übergangsglieder miteinander verbunden. Im folgenden seien die beobachteten Tatsachen kurz geschildert.

## 1. Polypodium aureum.

Diese Pflanze stelle ich voraus, weil ich an ihren Primärblättern bis jetzt nur das Auftreten von Adventivsprossen nicht aber auch das von Prothallien beobachtet habe. P. aureum gehört zu den Farnen, an deren Blättern normal nie Sprosse

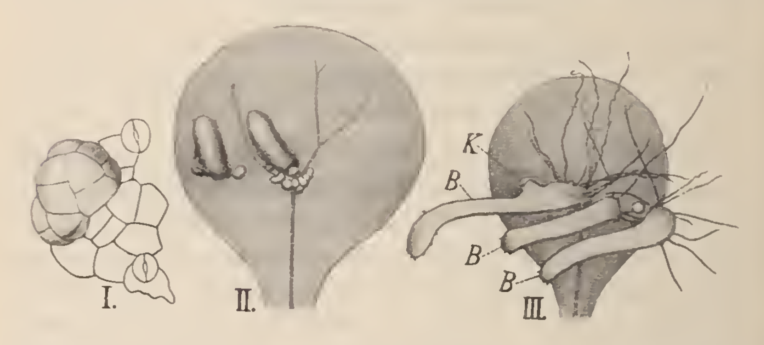



Fig. 1. Regenerationserscheinungen an abgeschnittenen Primärblättern von Polypodium aureum. I. Einer der Zellhöcker der Blattunterseite im jugendlichen Zustand stark vergr. II. Blatt mit Adventivsprossungen, an zweien davon je ein Blatt wahrnehmbar. III. Primärblatt mit älteren Adventivbildungen, an denen ausser dem ersten Blatte (*B*) auch die Stammknospe *K* schon wahrnehmbar ist. II. und III. schwächer vergr. als I.

auftreten, während solche bekanntlich bei einer großen Anzahl anderer Farne sich vorfinden.[2]) An abgeschnittenen Primärblättern treten nach einiger Zeit auf der Blattunterseite eine oft sehr beträchtliche Zahl von Zellhöckern auf, vielfach gruppenweise (Fig. 1, II), aber ohne irgendwelche bestimmte An-

---

[1]) Goebel, „Über Regeneration im Pflanzenreich". Biolog. Zentralblatt, XXII. Bd. (1902), p. 486.

[2]) Vergl. W. Kupper, „Über Knospenbildung an Farnblättern". Flora, Bd. 96 (1906). p. 337.

ordnung. Die Höcker fanden sich teils über den Leitbündeln, teils zwischen ihnen. Ihre Spitze wuchs zu einem Blatte aus, während in dem unteren Teil des Höckers ein Sproß-vegetationspunkt auftrat und an der Basis eine größere Anzahl von Rhizoiden sich bildete, an gekrümmten Höckern speziell auf deren konvexer Seite.

Die Organbildung an diesen Höckern habe ich nicht näher untersucht. Man findet vielzellige Höcker, an denen noch keine Differenzierung aufgetreten ist. Es ist mir sehr wahrscheinlich, daß das erste Blatt und der Stammscheitel unabhängig voneinander auftreten. Wurzeln bilden sich erst spät, ihre Stelle wird zunächst versehen von den Rhizoiden, welche beträchtliche Länge erreichen und teilweise verzweigt sind.

## 2. Alsophila van Geertii.[1])

An einem Blatte erschien schon 8 Tage nach der Aussaat nahe der Basis des Blattstiels ein Zellhöcker (*p* Fig. 2, I), welcher später einem Adventivsproß den Ursprung gab.

Die anderen Blätter zeigten fast sämtlich Aussprossungen am Rande (Fig. 2, II, III, IV, Fig. 3). Die Zellen waren hier dicht mit Stärke gefüllt und gingen in den meristematischen Zustand über. Meist entstanden dabei mehrschichtige Zellkörper, welche in dem Aussehen ihrer Zellen mit Prothallien übereinstimmten, aber an einzelnen Stellen Spaltöffnungen trugen. Diese Sprossungen flachten sich dann später ab und wuchsen etwa wie ein Thallus einer schmalen Aneura weiter; wie ein solcher Aneurathallus hat auch die eben beschriebene prothalloide Bildung Rhizoiden. Welch beträchtliche Entwicklung sie erreichen kann, geht aus Fig. 7 hervor. Trotz des Umfangs, welchen die prothalloiden Bildungen hier erreicht haben, waren Sexualorgane an ihnen nicht aufgetreten.

In anderen Fällen treten, wie Fig. 2, IV zeigt, aus dem Blatte

---

[1]) Benützt wurden im hiesigen Botanischen Garten erzogene Keimpflanzen. Für die Richtigkeit der Bezeichnung vermag ich nicht einzustehen.

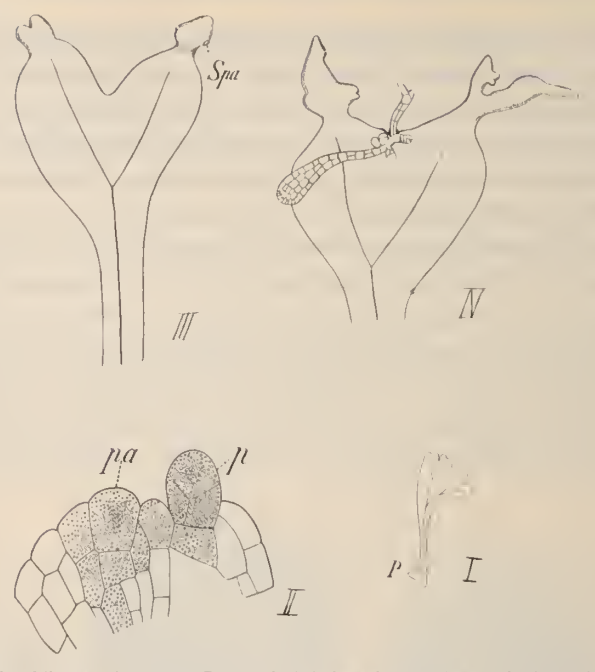



Fig. 2. Alsophila van Geertii I. Primärblatt (schwach vergr.) ausgelegt am 18. Februar; gezeichnet am 26. Februar. Es hat an seiner Basis die Anlage eines Adventivsprosses entwickelt, welche später zahlreiche Blätter entwickelte. II. Sprossung am Rand eines Primärblattes einen Monat nach der Aussaat. Die Zellen, welche ausgewachsen sind, dicht mit Stärke erfüllt. III. Blatt (schwächer vergr.), an dessen Ende sich grössere prothalloide Auswüchse ohne Intercellularräume, aber mit zwei Spaltöffnungen (Spa) entwickelt haben. IV. Dasselbe Blatt III, welches am 18. März gezeichnet worden war am 13. April. Ausser den zwei inzwischen weiter gewachsenen prothalloiden Sprossungen haben sich Prothallien auch in der Bucht zwischen den beiden Lappen des Primärblattes gebildet.

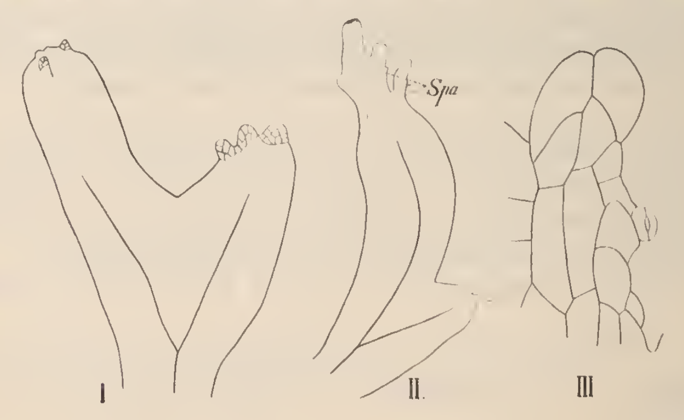



Fig. 3. Alsophila van Geertii I. Primärblatt dessen einer Lappen nach dem Abschneiden noch bedeutend sich vergrössert hat, mit noch wenigzelligen prothalloiden Auswüchsen
II. Primärblatt mit grösseren Auswüchsen, an diesen einzelne Spaltöffnungen.
III. Ein Stück des Auswuchses stärker vergr.

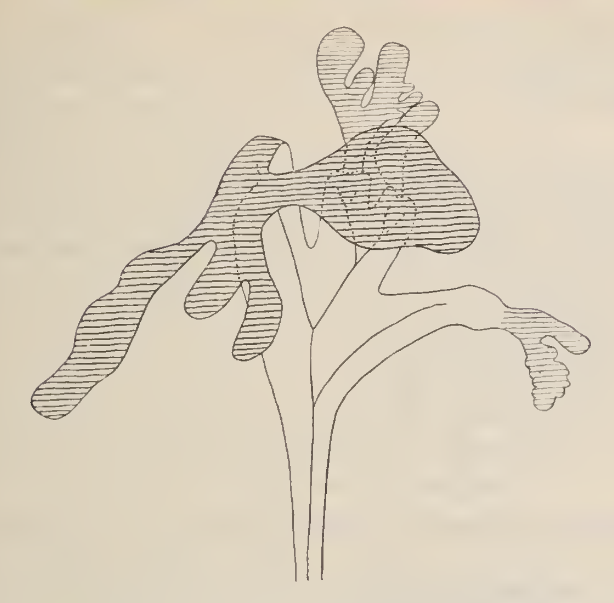


Fig. 4. Alsophila van Geertii. Primärblatt mit Ancura-ähnlichen, grossen, prothalloiden Auswüchsen (diese schraffiert, um sie vom ursprünglichen Blatte abzuheben).

resp. aus den an diesem entstandenen Zellen Zellreihen hervor, ganz wie bei der Keimung der Farnsporen, welche sich am Ende zu einer Zellfläche erweitern.

### 3. Gymnogramme chrysophylla.

Mit dem soeben beschriebenen Verhalten stimmt im wesentlichen überein das der Primärblätter von G. chrysophylla, wie aus den Abbildungen Fig. 5—7 hervorgehen wird. Auch hier entstanden teils typische Prothallien, teils Mittelbildungen zwischen solchen und Blättern, d. h. mehrschichtige am Rande wachsende Gebilde, welche im stande sind, Spaltöffnungen, ja

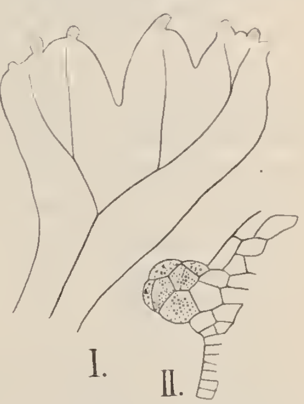



Fig. 5. Gymnogramme Chrysophylla. I. Primärblatt mit jungen prothalloiden Sprossungen, schwach vergr. II. Eine junge randbürtige prothalloide Sprossung stärker vergr.




Fig. 6. Gymnogr. chrysophylla. Primärblätter mit Sprossungen. (*Sp* Spaltöffnungen.)

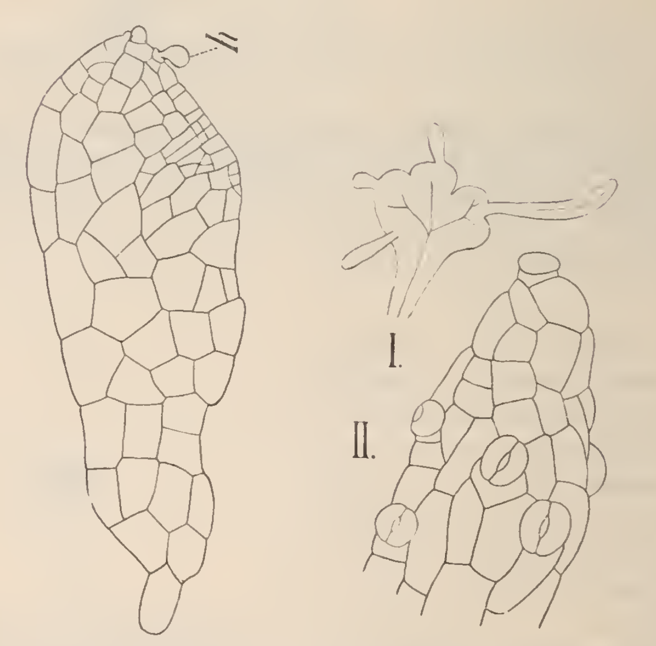



Fig. 7. Gymnogr. chrysophylla. I. Primärblatt mit Sprossungen. II. Oberer Teil der Sprossung rechts, stärker vergr. (etwas schief seitlich gesehen). III. Prothalloide Sprossung mit Haarpapille (das Gewebe ist im mittleren Teile mehrschichtig).

sogar Leitbündel zu entwickeln. So ist z. B. in Fig. 6 gezeichnet ein Blatt, aus dessen Fläche zwei prothalloide Bildungen hervorsprossen, von denen eine zwei Spaltöffnungen entwickelt hat (Sp. Fig. 6).

In Fig. 7, III ist eine andere derartige Blattsprossung gezeichnet, welche in ihrem mittleren Teile mehrschichtig war und am Rande zwei Papillen trug, wie sie nicht an Prothallien, wohl aber an jungen Blättern vorkommen. Endlich zeigt Fig. 7, I ein Primärblatt mit vier Sprossungen, von denen eine (rechts oben) ein Leitbündel in ihrem mittleren Teile entwickelt hat, das aber nicht ganz bis zur Basis hinuntergeht. Fig. 7, II zeigt die Oberansicht des oberen Teiles; man sieht, daß verhältnismäßig zahlreiche Spaltöffnungen vorhanden sind, welche ziemlich weit über die Oberfläche hervorragen.

Hier liegt also ein Gebilde vor, das wir als ein rudimentäres Blatt betrachten können. Daß es aus einem anderen Blatte hervorgesproßt ist, ist nichts so Sonderbares, wie es zunächst erscheinen könnte. Denn ganz dasselbe kommt — abgesehen von dem unten für Ceratopteris anzuführenden — normal bei Utricularia-Arten und bei Farnen vor, welche an ihren Blattspitzen Knospen entwickeln. Andererseits kommen auch hier ganz typische blattbürtige Prothallien vor.

### Pteris longifolia.

Hier traten nur Prothallien an den Primärblättern auf und zwar sowohl auf der Blattfläche (Ober- und Unterseite) als am Blattstiel (Fig. 8). Die Prothallien brachten es auch zur Bildung von Antheridien und Archegonien. Leider gingen die auf ein anderes Substrat übertragenen Prothallien zugrunde, neue Pflanzen entstanden an ihnen also nicht. Die Archegonien schienen nicht ganz normal zu sein, wenigstens waren die Halsteile abnorm stark grün, doch wurden sie nicht näher untersucht, um nicht die archegonientragenden Prothallien zerstören zu müssen. Das eine Prothallium hatte zwei gegliederte „Haare“ am Rande entwickelt, wie sie sonst den Prothallien nicht zukommen und die Zellen unter diesen Haaren

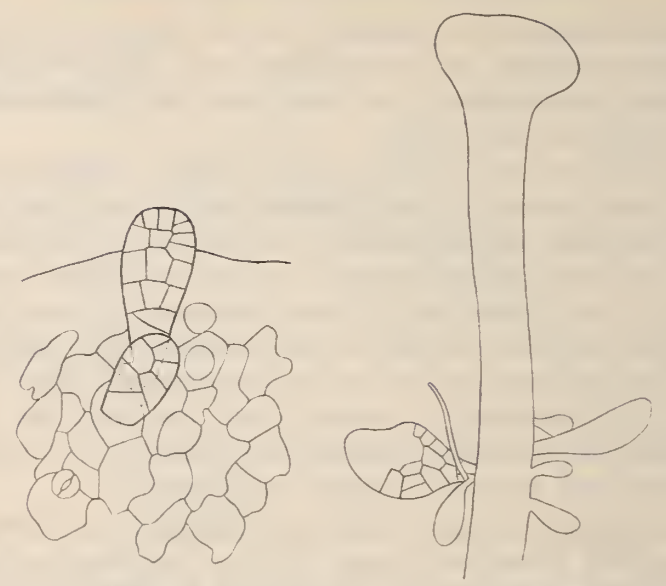


Fig. 8. Pteris longifolia. Links Stück der Blattfläche eines Primärblattes mit jungen Prothallien, stark vergr.; rechts Primärblatt, an dessen Stiel Prothallien ausgewachsen sind, schwach vergr.

glichen mehr den Epidermiszellen eines Blattes als den übrigen Prothalliumzellen.

Fig. 9. Ceratopteris thalictroides. Unterer Teil der Sprossachse einer Keimpflanze. *S* Saugorgan, *P* Prothallien, welche sich an der Basis der Keimpflanze gebildet haben.

### Ceratopteris thalictroides.

Bei diesem Farn wurde zunächst versucht, ob auch die Sproßachse von Keimpflanzen imstande sei, Prothallien hervorzubringen.

Es wurden deshalb an einer Anzahl von Stämmchen der Sproßvegetationspunkt und die Blätter entfernt.

An dem Stämmchen einer jungen Pflanze, welches am 23. April ausgelegt worden war, hatten sich am 5. Mai aus Oberflächenzellen nahe an dem noch deutlich erkennbaren „Fuß“ (dem Haustorium) drei Prothallien entwickelt (Fig. 9), ein größeres, schon flächen-

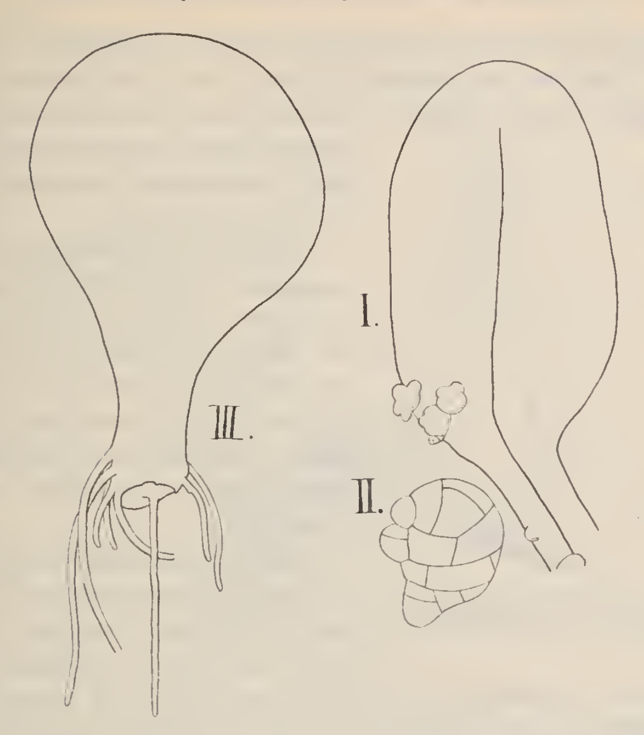



Fig. 10. Ceratopteris thalictroides. I. Blatt mit Zellkörpern. II. Ein solcher Zellkörper stärker vergrössert. III. Ein isoliertes Primärblatt mit Rhizoiden.

förmiges und zwei kleinere noch wenigzellige. Nimmt man ältere Keimpflanzen, so entwickeln sich am Stämmchen keine Prothallien, sondern es entsteht nahe der apikalen Schnittfläche ein Adventivsproß, der an Stelle des entfernten Vegetationspunktes tritt. Ceratopteris bildet bekanntlich nie Seitensprosse aus — wenigstens in den bis jetzt beobachteten Fällen —; die soeben angeführte Beobachtung zeigt, daß die Sproßachse durch Adventiv-Knospenbildung ihre weitere Existenz retten kann, wenn die Endknospe verloren gegangen ist.

Die Primärblätter von Ceratopteris zeigten interessante Regenerationserscheinungen.

Zunächst ist zu erwähnen, daß an den abgeschnittenen Blättern nicht selten Rhizoiden auftreten (Fig. 10. III). Solche

findet man allerdings gelegentlich auch an festsitzenden Blättern, aber wie es scheint nur dann, wenn die Wurzeln beschädigt oder zu Grunde gegangen sind. Bemerkenswert ist auch die starke Stärkeanhäufung in den Primärblättern, namentlich in deren unterem Teile.

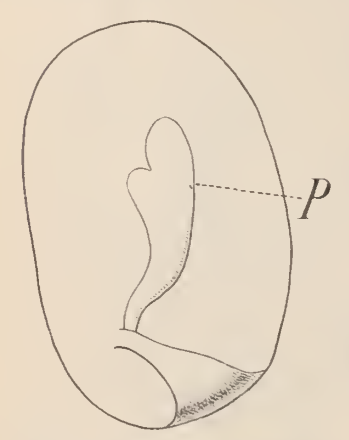


Fig. 11. Blatt, aus dessen Stiel ein Prothallium (*P*) hervorgesprosst ist.

Damit mag es vielleicht zusammenhängen, daß die Neubildungen vorzugsweise in der Basalregion der Blätter auftreten (Fig. 10 l, Fig. 11), indes sind sie keineswegs auf diesen Teil beschränkt, sie finden sich auch in der Mitte der Blätter und selbst nahe deren Spitze.

Die Neubildungen finden sich teils am Rande teils auf der Fläche der Primärblätter, und zwar sind beide Blattseiten zu ihrer Hervorbringung befähigt. Sie entstehen gewöhnlich in Gestalt von Zellkörpern, deren Zellen mit Prothalliumzellen übereinstimmen und Rhizoiden hervorbringen. Später wachsen diese Zellkörper aus entweder zu normalen Prothallien, oder zu Mittelbildungen zwischen solchen und Blättern. Solche Mittelbildungen finden sich an dem in Fig. 12 gezeichneten Blatte in verschiedener Ausbildung. Das mit 1 bezeichnete Gebilde gleicht äußerlich einem schmalen, lang gestielten Blatte, dessen oberer, der Spreite entsprechender Teil einschichtig ist, während der schmälere Teil mehr zylindrisch gestaltet und mehrschichtig ist. Der obere Teil zeigt nun dadurch eine gewisse Annäherung an den Blattbau, daß seine Zellen gewellte Wände haben (Fig. 12 rechts oben), ähnlich wie dies bei einer Blattepidermis der Fall ist.

Weiter geht schon die Annäherung in der mit 2 bezeichneten Sproßung, welche ebenso wie 3 schräg von der Seite gesehen erscheint und dadurch die Abflachung des oberen

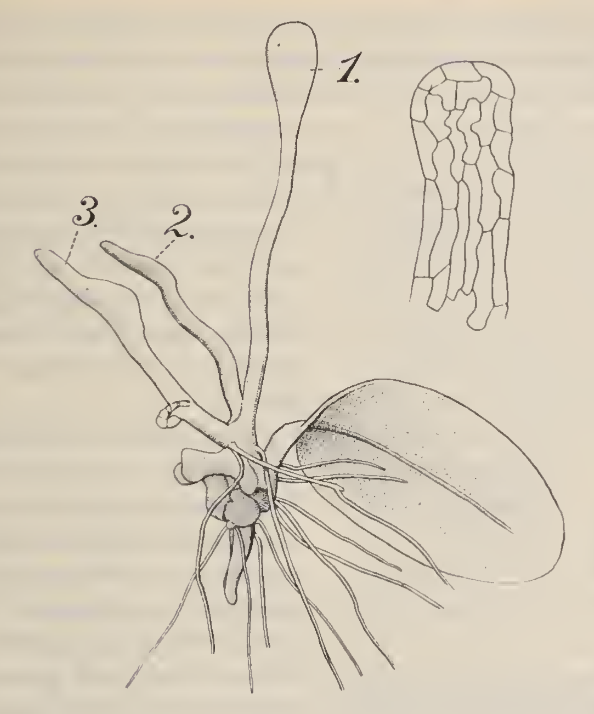



Fig. 12. Primärblatt, an welchem die Neubildungen schon bedeutend herangewachsen sind. Erklärung im Text. Oben rechts das Ende von 1 stärker vergrössert.

Teiles nicht deutlich erkennen läßt. Hier war der obere Teil zweischichtig und besaß, obwohl keine Interzellularräume vorhanden waren, eine Spaltöffnung, außerdem gleichfalls gewellte Zellen. 3 endlich besaß an einzelnen Stellen ein intercellularraumreiches Mesenchym, wie es in den Primärblättern auftritt, und mehrere Spaltöffnungen. Außerdem besaß es an seinem Stiele die Andeutung einer der Schuppen, welche am Stiel (und bei den Folgeblättern auch an der Spreite) der Ceratopterisblätter auftreten. Es lag hier also eine unzweifelhafte Mittelbildung zwischen Blatt und Prothallium vor. Wollte man je noch daran zweifeln, so sei verwiesen auf Fig. 13, welche zeigt, daß an diesen, mit Spaltöffnungen versehenen, Mittelbildungen auch Antheridien auftreten können.

Die in Fig. 12 mit 1—3 bezeichneten Gebilde entsprangen nicht etwa aus einer Sproßachse, sondern waren unabhängig voneinander. Um die Übergangsnatur noch deutlicher zu demonstrieren, wurde versucht, ob es gelänge, unzweifelhafte Blätter, die an einem Sproßvegetationspunkt entstanden sind, auf eine Stufe der Gewebegliederung herunterzudrücken, welche der bei jenen Übergangsbildungen beschriebenen entspricht.

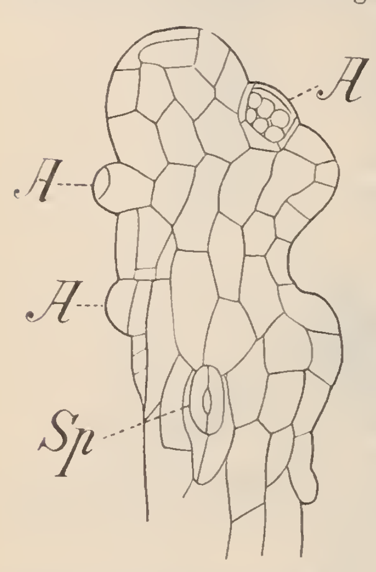


Fig. 13. Ceratopteris thalictroides. Mittelbildungen zwischen Blatt und Prothallium. *A* Antheridien, *Sp* Spaltöffnung.

Es gelang, Blätter hervorzurufen, bei denen die Entwicklung eines Leitbündels ganz oder teilweise unterblieben war, und solche, bei denen auch die Ausbildung des Mesophylls ganz oder teilweise gehemmt war. Indem ich betreffs dieser Versuche auf eine anderweitige Mitteilung verweise, führe ich nur an, daß diese reduzierten Blätter aus Anlagen von Primärblättern hervorhingen, und daß die Veranlassung zu ihrer Bildung in einer künstlich herbeigeführten starken Ernährungsstörung lag. Jedenfalls stimmten diese Gebilde in ihrem anatomischen Bau mit den oben beschriebenen Mittelbildungen zwischen Prothallien und Blättern überein.

An den Blättern von Aneimia Dregeana traten prothalloide Sprossungen nur in zwei Fällen auf. Sie fanden sich teils auf der Ober- teils auf der Unterseite des Blattes, waren aber nach 3 Monaten noch so wenig entwickelt, daß ihre Beschreibung hier unterbleiben kann. Endlich kommen zu den genannten Arten noch die von H. Vesselovska untersuchten G. farinifera und Notochlaena Marantae; die apogamen Pellaea- und Notochlaena-Arten sowie Trichomanes Kraussii reihen sich gleichfalls an.

Es unterliegt, da die untersuchten Arten ganz zufällig herausgegriffen waren, wohl keinem Zweifel, daß die Fähigkeit der Primärblätter, die beschriebenen merkwürdigen Regenerationserscheinungen hervorzubringen, eine bei Farnen weitverbreitete ist. Sie ist aber normal beschränkt auf die Primärblätter. Blätter bezw. Blattstücke älterer Pflanzen von Trichomanes radicans, Hymenophyllum dilatatum, Asplenium dimorphum und Lygodium scandens, welche ebenso behandelt wurden wie die Primärblätter, hielten sich zwar teilweise monatelang frisch, zeigten aber keine Regenerationserscheinungen; nur bei Trichomanes radicans traten an einzelnen Blattstücken Rhizoiden auf, teils aus den über einem Nerven liegenden Zellen teils aus Randzellen, seltener aus der Fläche entspringend, und zwar namentlich da, wo in der Nähe abgestorbene Zellen sich befanden, deren Zersetzungsprodukte vielleicht als Reiz für die Rhizoidenbildung dienten.

Indes wird es möglich sein, auch Blätter älterer Pflanzen so zu beeinflussen, daß sie ohne Sporenbildung Prothallien hervorbringen können. Sehen wir dies doch als Ausnahmeerscheinung bei einer Anzahl von Farnen eintreten, entweder konstant oder nur sprungweise, so bei dem oben erwähnten Asplenium dimorphum.

Wie bei den Prothallien dieser Pflanze ist es auch an den apospor entstandenen Prothallien, die an den Primärblättern entstanden, bis jetzt nicht gelungen, Keimpflanzen zu erzielen. Indes ist dies wohl nur den Kulturbedingungen zuzuschreiben. Werden diese günstig gewählt, so ist zu erwarten, daß an den Prothallien oder an den Mittelbildungen zwischen Prothallien und Blättern Keimpflanzen entstehen und zwar wahrscheinlich apogam.

Die beschriebenen Tatsachen zeigen, daß die Fähigkeit zur Aposporie offenbar bei den Farnen weit verbreitet ist. Wo sie bei älteren Pflanzen auftritt, verhalten sich also deren Blätter so wie die Primärblätter in den hier beschriebenen Versuchen. Wenn man teilweise Spitzenaposporie und Sorusaposporie unterschieden hat, je nachdem die apospor entstan-

denen Prothallien aus den Blattspitzen oder dem Sorus, speziell den Sporangienanlagen hervorgehen, so ist das schon deshalb kein prinzipieller Unterschied, weil beides bei ein und derselben Pflanze vorkommt. So z. B. bei dem von Bower genau untersuchten Athyrium filix femina f. clarissima. Bower hat nur Sorusaposporie beobachtet. Schneidet man aber Blätter, die noch keine Anzeichen von Sporangienbildung zeigen ab, so wachsen in überraschend kurzer Zeit die Spitzen zu Prothallien aus. Daß gewöhnlich nur die Sporangien das tun, dürfte darin begründet sein, daß die Aposporie um so leichter eintritt, je mehr das Gewebe noch embryonalen Charakter hat. Bei einem älteren Blatte sind aber die Sporangienanlagen die Stellen, welche embryonale Beschaffenheit besitzen, und der soeben gemachten Annahme entsprechend am leichtesten zu Prothallien auswachsen.

Drei Folgerungen scheinen sich mir aus den beobachteten Tatsachen vor allem zu ergeben. Die eine ist die, daß, wie schon früher hervorgehoben wurde, die Teile der Keimpflanze bezüglich ihres Regenerationsvermögens anders sich verhalten, als die älterer Pflanzen. Wir sahen, daß aus beliebigen Außenzellen des „Dauergewebes" dieser Keimpflanzen prothalloide Sprossungen hervorgehen können, eine Bestätigung des früher[1]) aufgestellten Satzes, „daß auch das Dauergewebe bei Keimpflanzen (das sich ja vom embryonalen Gewebe ableitet) ein anderes ist als später; das in ihm vorhandene „Keimplasma" ist ja von der, durch die anderen Organe bei älteren Pflanzen erfolgende Beeinflussung noch frei, es ist die „Inkrustation" noch eine geringere, die Rückkehr zum embryonalen Gewebe noch eine leichtere."

Es zeigte sich ferner, daß die Blätter der Keimpflanzen nicht stets dieselben Regenerate ergeben. Es können entstehen entweder Adventivsprosse oder Prothallien oder Mittelbildungen zwischen Blättern und Prothallien. Über die Ursache für diese Verschiedenheit läßt sich eine sicher begründete Ansicht nicht aussprechen. Aber es ist mir höchst wahrscheinlich, daß sie

---

[1]) Über Regeneration im Pflanzenreich p. 487 (Biol. Zentralbl., 1902).

begründet ist in der Verschiedenheit der Baustoffe, welche diesen Primärblättern für ihre Neubildungen zur Verfügung stehen. Sahen wir doch, daß auch an Stelle normaler Blätter sich solche erzielen lassen, welche in ihrem Bau mit den besprochenen Mittelbildungen übereinstimmen. Es verhält sich die Sache offenbar ähnlich, wie bei den früher beschriebenen Regenerationserscheinungen bei Metzgeria furcata. Hier kann am Thallus als Regenerat entweder ein Zellfaden oder sofort ein flächenförmig entwickelter Thallus auftreten.[1])

Endlich zeigen die angeführten Tatsachen, daß zwischen den zwei „Generationen" der Farne kein scharfer Unterschied vorhanden ist. Man hat einen solchen neuerdings in der Chromosomenzahl finden wollen und gewiß ist die Tatsache sehr wichtig, daß das Prothallium gewöhnlich die x — oder haploide, der Sporophyt die 2 x — oder diploide Generation darstellt. Indessen zeigen die neueren Beobachtungen von Strasburger und Farmer, daß es auch Prothallien mit nicht reduzierter Chromosomenzahl geben kann, daß also die Formverschiedenheiten zwischen beiden Generationen jedenfalls mit der Chromosomenzahl nicht zusammenhängen. Wie es sich mit der Reduktionsfrage betreffs der prothalloiden Sprossungen an Farn-Primärblättern verhält, ist bis jetzt nicht untersucht worden. Die Analogie mit den von Farmer und Digby[2]) neuerdings untersuchten aposporen Prothallien spricht dafür, daß eine Reduktion nicht stattfindet. Wenn Keimpflanzen an den Prothallien sich bilden, werden sie also wahrscheinlich apogam entstehen — es soll bei neuen Versuchsserien darauf besonders geachtet werden.

Zwischen einem Farnprothallium und einer Farnpflanze sind, von der Zellkernverschiedenheit abgesehen, keine größeren Differenzen vorhanden, als zwischen einem Moosprotonema und einer Moospflanze. Das zeigen schon die Mittelformen

[1]) Vgl. Rückschlagsbildungen und Sprossungen bei Metzgeria. Flora, 85. Bd. (1898), p. 69.

[2]) Farmer and Digby, studies in apospory and apogamy in ferns. Annals of botany, vol. XXI, April 1907.

und die Tatsache, daß an den Primärblättern entweder Pflanzen oder Prothallien entstehen können.

Man könnte die erwähnte Erscheinung natürlich auch phylogenetisch ausdeuten, und z. B. das Farnprothallium betrachten als ein rudimentäres, Sexualorgane tragendes Farnblatt, zumal ja die Entstehung eines Farnblattes wie neuere Untersuchungen gelehrt haben, und auch oben durch ein weiteres Beispiel belegt wurde, nicht notwendig an das Vorhandensein eines Sprossvegetationspunktes gebunden ist. Der Gametophyt würde dann eine Hemmungserscheinung darstellen, aber sonst dem Sporophyten „wesensgleich" sein. Mit solchen Spekulationen gerät man aber auf einen durchaus unsicheren Boden. Geratener als der Versuch, auf ihm ein neues Hypothesengebäude zu errichten, wird der sein, das Problem des Generationswechsels durch weitere experimentelle Untersuchungen zu fördern.

Schließlich sei noch auf eine andere Frage hingewiesen, für welche die angeführten Tatsachen von Interesse sind. Ich habe früher an Utricularia nachzuweisen versucht, daß die Unterschiede zwischen den Organkategorien Sproß und Blatt nur relative sind, und daß in den Knollen der Dioscoreen[1]) Gebilde vorliegen, die teils Sproß-, teils Wurzelcharakter haben. An den Primärblättern der Farne haben wir andererseits Mittelbildungen zwischen Blättern und Prothallien entstehen sehen, zudem zeigen die Erfahrungen bei einer ganzen Anzahl von Farnen, daß ein Blatt direkt aus einem andern hervorsprossen kann.

Allerdings gibt es Botaniker, welche der Ansicht sind, daß zwischen den Organkategorien Zwischen- oder Übergangsformen unmöglich seien. Mir scheint aber, daß man zu der letztgenannten Ansicht nur gelangen kann, wenn man sich den zu ihr nicht passenden Tatsachen verschließt.

[1]) Vgl. Flora, 93. Bd., p. 167 ff.

## 2. Über die Bedingungen der Wurzelregeneration bei einigen Pflanzen.

Neubildung von Wurzeln findet bekanntlich bei vielen Pflanzen statt an isolirten Pflanzenteilen, bei manchen auch an der unverletzten Pflanze, wenn die für die Wurzelbildung günstigen äußeren Bedingungen gegeben sind. Das Hauptinteresse beanspruchen die Pflanzen, bei denen, so lange die Pflanze unverletzt ist, auch bei günstigen äußeren Bedingungen eine Wurzelbildung an der Sproßachse nicht eintritt. Dies ist z. B. der Fall bei Vicia Faba und Phaseolus. Auch wenn man eines der Sproßinternodien verfinstert und feucht hält, treten an ihm gewöhnlich keine Wurzeln auf; wenn dies ausnahmsweise der Fall ist, so hat das nach dem weiter unten Anzuführenden offenbar seinen Grund darin, daß das eigentliche Wurzelsystem nicht mehr normal ist. Ist das letztere aber der Fall, so beruht das Unterbleiben der Wurzelbildung an oberirdischen Teilen offenbar auf einer vom Wurzelsystem ausgehenden Einwirkung, mit andern Worten, das Ausbleiben der Wurzelbildung ist korrelativ bedingt. Es wird also Wurzelbildung eintreten, wenn man entweder die Verbindung der Sproßachse mit dem Wurzelsystem unterbricht, oder dieses in einen Zustand versetzt, in welchem es seine hemmende Einwirkung auf die Wurzelbildung am Sproß nicht mehr ausüben kann. Daß ersteres entsprechend von mir früher bei Bryophyllum ausgeführten Versuchen geschehen kann durch eine Durchschneidung eines oder mehrerer Leitbündel, geht schon aus Versuchen von Mac Allum hervor. Aber auch der zweite Weg erwies sich als gangbar.

Es wurde der Versuch in doppelter Weise ausgeführt:

1. 12 gleichstarke Phaseoluspflanzen wurden in Töpfe gepflanzt und das Epikotyl mit Sphagnum und Kautschukpapier umgeben. 6 dieser in einem feuchten Gewächshaus stehenden Töpfe wurden begossen, 6 nicht. Nach $6^1/_2$ Wochen hatten die letzteren alle in das Sphagnum Wurzeln getrieben, bei den begossenen war dies nur an einer Pflanze der Fall. Diese

war durch ihre Schwächlichkeit den andern gegenüber ausgezeichnet, und diese hing offenbar damit zusammen, daß das Wurzelsystem dieser Pflanze nicht normal war.

2. An Wasserkulturen mit kräftigem, gesundem Wurzelsysteme wurde das Epikotyl in eine mit Wasser gefüllte Glasröhre gebracht und das Glas, welches die Nährlösung samt dem Wurzelsystem enthielt, dauernd auf etwa 5° abgekühlt. Die Pflanzen wuchsen unter diesen Bedingungen natürlich sehr langsam, welkten aber nicht. Sie bildeten alle am Epikotyl schließlich Wurzeln aus. Das Hauptwurzelsystem war durch die mehrere Wochen andauernde Abkühlung nicht etwa abgestorben. Es hatte zwar teilweise gelitten, wuchs aber, als die Pflanzen bei 15—20° weiter kultiviert wurden, kräftig weiter. In diesen Versuchen war das Wurzelsystem also inaktiviert worden und konnte deshalb die Wurzelbildung an der Sproßachse nicht verhindern.

Über die Art und Weise, wie diese korrelative Hemmung ausgeübt wird, läßt sich etwas Sicheres derzeit nicht aussagen; betreffs der Auffassung, welche mir die wahrscheinlichste scheint, möchte ich auf früher Gesagtes verweisen.

# Ein Naturmodell der Dünenbildung.

Von **Siegmund Günther.**

*(Eingelaufen 8. Juni.)*

Die Lehre von den Kontinentaldünen, die scheinbar in einem gewissen Gegensatze zu den weit länger bekannten und eingehender studierten Küstendünen stehen, ist erst in neuerer Zeit zum Gegenstande tiefer eindringender Betrachtung gemacht worden. F. v. Richthofen[1]) und N. A. Sokolów[2]) haben das Beobachtungsmaterial, welches überwiegend zentralasiatischen, zum geringeren Teile auch afrikanischen Gebieten entstammt, kritisch gesichtet und daraus Theorien abgeleitet, welche im wesentlichen auch von der gesamten Wissenschaft angenommen wurden, und zwar mit gutem Grunde. Fassen wir, minder belangreiche Momente außer acht lassend, die besonders hervortretenden Gesichtspunkte zusammen, so kann das wohl in einer These geschehen, welcher der folgende Wortlaut zu geben wäre: Dem für die Meeresküsten charakteristischen Dünentypus, dieses Wort im engeren Sinne genommen, steht im abflußlosen Steppen- und Wüstenlande der sogenannte Barchantypus gegenüber. Spricht doch Penck,[3]) auf eine große Anzahl beglaubigter Mitteilungen sich stützend, direkt den Satz aus:

[1]) v. Richthofen, Führer für Forschungsreisende. Hannover 1901, S. 432 ff.

[2]) Sokolów-Arzruni, Die Dünen; Bildung, Entwicklung und innerer Bau. Berlin 1894.

[3]) Penck, Morphologie der Erdoberfläche, 2. Teil. Stuttgart 1894. S. 38 ff.

„Die Grundform der Kontinentaldünen sind die Barchane, in der Sahara Siuf (Sing. Sif), in Südamerika Médanos genannt" (s. u.).

Die Verschiedenheit beider Typen läßt sich ohne viele Worte durch eine schematische Profilzeichnung kennzeichnen. In Fig. 1 ist ein Längsdurchschnitt durch eine normale Stranddüne, in Fig. 2 ein ebensolcher durch einen Barchan dargestellt. Man sieht, daß für die Luvseite keinerlei Abweichung obwaltet und daß in beiden Fällen auch der Steilabfall im Windschatten gleichmäßig vorhanden ist. Die Barchane weisen hier aber eine Nische auf, welche den gewöhnlichen Dünen fehlt. In Arabien gestalten sich, wie schon frühere Reiseschriftsteller berichteten, und wie Euting[1]) ganz besonders hervorgehoben hat, diese Ausschnitte ungemein großartig.



Fig. 1.

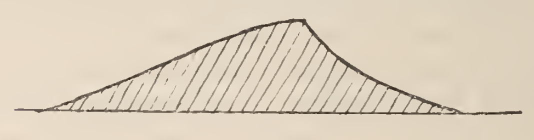


Fig. 2.

Man kann nun die Frage aufwerfen, ob die Barchane nicht nur in der Regel, sondern ausschließlich die den kontinentalen Steppen eigentümliche Form der Sandanwehung repräsentieren. Gewöhnlich scheint das letztere (s. o.) vorausgesetzt zu werden, aber einer der gründlichsten Kenner Innerasiens, Muschketow,[2]) drückt sich doch nach dieser Seite

---

[1]) Euting, Über eine Reise in Innerarabien. Verhandl. d. Gesellsch. f. Erdk. z. Berlin, 1886, S. 266 ff.

[2]) Muschketow-Merena, Die Kontinentalsanddünen oder Barchane. Deutsche Rundschau f. Geogr. u. Stat., 12. Jahrgang, S. 148.

hin etwas vorsichtiger aus, indem er den niedrigen Hufeisenhügel nur als „die verbreitetste und am meisten charakteristische Form für alle Wüsten bezeichnet". In dieser Fassung darf die Angabe gewiß als unbedingt zutreffend angesehen werden. Wenngleich über die Art der Entstehung einer wie immer beschaffenen Düne in der Hauptsache Übereinstimmung herrscht, so scheint die Frage, weshalb die Leeseite so auffallende Abweichungen aufweisen könne, doch noch nicht hinlänglich geklärt zu sein. Drei Ursachen müssen, wie feststeht, vorhanden sein: Eine großenteils konstante Windrichtung, ein den Sand fixierendes Hindernis und dieser Sand selbst, entstamme er nun dem Grunde einer größeren, nicht allzu weit entfernten Wasseransammlung oder einer benachbarten, dem Zerstörungsprozesse unterworfenen Gesteinsoberfläche. Weder das erste noch das zweite der drei hier aufgeführten Elemente vermag die Art und Größe der Leeböschung irgendwie maßgebend zu bestimmen; es muß folglich die Beschaffenheit des Sandes von ausschlaggebender Bedeutung sein.

Wenn die Sandkörner völlig trockene Partikeln von angenähert gleicher Größe und Gestalt sind, so muß sich auf der vom Winde abgekehrten Seite, wo jene fast ausschließlich nur von der Schwerkraft beeinflußt sind, die Profilkurve den Gesetzen anpassen, die für eine aus losen Teilchen zusammengesetzte Masse maßgebend sind. Es treten die gleichen Verhältnisse ein, wie sie auch für Stratovulkane bestehen, und jene Kurve erscheint als eine gegen außen konkav verlaufende Linie. Auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, als dessen Abszissenachse die Projektion der Windrichtung auf die Horizontalebene gewählt wird, erhält die Kurve nach Milne[1]) die Gleichung $x = a \times \log (by)$, unter $a$ und $b$ für den Einzelfall konstante Größen verstanden. Man hat es sonach mit einer logarithmischen

[1]) Milne, On the Form of Volcanos. Geolog. Magaz., (2.) 5. Band, S. 337 ff.; Further Notes on the Form of Volcanos. Ebenda, (2.) 6. Band. S. 506 ff.

Linie zu tun. Wie dann die trichterförmige Aushöhlung des Sandhügels zustande kommt, ist bekannt; es geht eben die Vergrößerung des sozusagen im Rohbau fertigen Barchans an den Rändern rascher als in der Mitte vor sich. Und da bei Wüstensand die oben skizzierten Bedingungen meistenteils erfüllt sind, so kann es nicht fehlen, daß der Barchantypus gewöhnlich in die Erscheinung tritt.

Gesetzt aber, die Flugsandmasse habe mehr eine derjenigen des Meeressandes ähnelnde Zusammensetzung, so werden uns in der Struktur jeder einzelnen Binnenlanddüne auch im großen und ganzen die nämlichen Bildungsgesetze begegnen, welche uns von den Küstendünen her geläufig sind. Der Abfall in Lee erscheint unregelmäßiger, bald konkav, bald auch konvex oder ganz geradlinig verlaufend. Zu der Schwere und den Reibungswiderständen tritt eben jetzt noch eine gewisse Adhäsion der Körner hinzu, und alsdann hört der Barchancharakter auf maßgebend zu sein. Daß es am Meeresufer sich so verhält, weiß jedermann; daß jedoch auch im Binnenlande sich ein völlig analoger Sachverhalt ergeben kann, dürfte minder bekannt sein, und es mögen deshalb zunächst der Erdstelle, welche uns dieses Phänomen in seltener Reinheit vor Augen führt, einige Worte gewidmet sein. Dieselbe gehört der für die physikalische Geographie überhaupt eine Fülle interessanter Probleme darbietenden Steppenregion von Südkalifornien an, dem sogenannten Mohave Desert zwischen Salton im Osten und San Bernardino im Westen. Auf der Karte ist der in Frage kommende Landstrich, der indessen kein wirkliches Tal darstellt, als Coahuilla Valley bezeichnet.

Dem diese Strecke mit der Southern Pacific Railway Befahrenden drängt sich der merkwürdige, oft sehr abrupt sich vollziehende Wechsel zwischen verschiedenartigen Landschaftsbildern als eine Signatur der bei aller Einförmigkeit doch niemals langweiligen Gegend auf. Zu den merkwürdigsten Gebieten gehört nun eine weite, fast ebene und nur sehr spärlich von aufgesetzten Erhöhungen durchschwärmte Fläche, welche in Hunderten und Tausenden von Exemplaren das aufweist, was

in unserer Überschrift als Naturmodell der Dünenbildung bezeichnet wurde. Wohin sich im Verlaufe mehrerer Fahrtstunden das Auge des im Bahnzuge sich befindenden Beobachters richtet, weit mehr jedoch auf der südlichen als auf der nördlichen Seite der Bahnlinie, liegen diese meist kleinen Dünen regellos verstreut, in ihren geometrischen Verhältnissen eine ganz unverkennbare Ähnlichkeit zur Schau tragend. Man möchte vielleicht einwenden, ein auf eiliger Bahnfahrt gewonnener Totaleindruck berechtige noch nicht dazu, die morphographischen Beziehungen mit einiger Sicherheit festzulegen. Allein abgesehen davon, daß in der südwestlichen Union die Fortbewegung der Züge

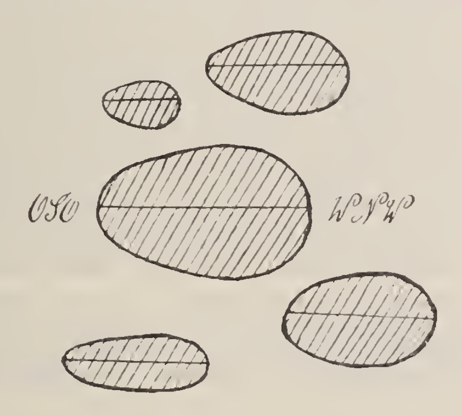



Fig. 3.

nichts weniger denn rapid ist, und daß die gute amerikanische Sitte, Aussichtswagen beizugeben, den Horizont des Reisenden ansehnlich erweitert, gewährt die Ausdehnung des Dünenbezirkes die bequeme Möglichkeit, die gemachten Wahrnehmungen immer wieder zu revidieren. So kann leicht die Gewähr dafür übernommen werden, daß die Aussagen über das Gesehene die vollste Zuverlässigkeit besitzen. In Fig. 3 wird ein Stück des Geländes wiedergegeben, so wie es aus der Vogelperspektive erblickt würde.

Durchweg ist die Luvseite jedes Dünenindividuums genau ebenso vollständig wie die Leeseite ausgebildet, indem nur der

Neigungswinkel auf der letzteren beträchtlich größer ist. Die elliptische Basis zeigt sich allenthalben konvex nach außen, und Einschnitte fehlen gänzlich. Da die Profillinien von Geraden nur wenig abweichen, so ruft jede einzelne Düne ganz und gar den Eindruck eines schiefen elliptischen Kegels hervor. Der Umstand, daß dessen Mantelfläche nicht glatt, sondern gerippt erscheint, muß noch zum Gegenstande einer besonderen Erörterung gemacht werden.

Was nun den Prozeß der Dünenbildung selbst anlangt, so hängt dieselbe selbstverständlich in erster Linie von dem Wehen eines konstanten Windes ab. Die großen Achsen der erwähnten Ovalkurven weisen eine Richtung von OSO gegen WNW auf, womit also, falls die gewöhnliche Vorstellung von der Entstehung isolierter Sandansammlungen der Wahrheit entspricht, die Windrichtung für mindestens einen großen Teil des Jahres gekennzeichnet wird. Und daß es sich in der Tat so verhält, darüber vergewissert uns einer der wenigen gewiegten Kenner dieser Landesteile, O. Loew,[1]) der die an Häufigkeit weitaus vorwiegenden Südostwinde als Ausläufer eines echten Monsuns anspricht. Es ist jedoch anzunehmen, daß diese Luftströmung die mitgeführte Feuchtigkeit da, wo sie das Coahuilla-Tal erreicht, bereits großenteils in heftigen Regengüssen abgegeben

---

[1]) Loew, Leutnant Wheelers Expedition durch das südliche Kalifornien im Jahre 1875. Petermanns Geogr. Mitteil., 1876, S. 410. „Es gibt jedenfalls nur wenige Gegenden auf der Erde, wo zwei gänzlich verschiedene Klimate durch eine einzige Bergkette getrennt werden, wie in Kalifornien, wo das gleichförmige Seeklima des Küstenstriches im markierten Kontrast zu dem Kontinental- und Wüstenklima der östlich von den riesigen, Mittel- und Südkalifornien durchziehenden Ketten liegenden Ländereien steht. . . . In bezug auf die Mohave-Wüste ist vor allem zu konstatieren, daß wir ein bedeutendes Vorherrschen der Südostwinde bemerkten; die Regelmäßigkeit, mit der dieser Wind blies, war uns schon nach kurzem Verweilen in jener Wüste aufgefallen. . . . Als ich später nach Fort Mohave kam, wurde diese Beobachtung auch vom dortigen Militärapotheker bestätigt, der dort seit drei Jahren meteorologische Beobachtungen angestellt hatte.“

hat,[1]) denn die Dünengegend muß als ein richtiges Trockengebiet gelten. Der Südostwind ist es also, dem die Verfrachtung der sich immer mehr verkleinernden Gesteinstrümmer und deren Aufschüttung zu kleinen Hügeln zuzuschreiben ist.

Wäre die Ebene absolut flach, so würde sie, wie das in Hochasien geschehen ist, mit gleichmäßigen Staubschichten überdeckt werden, und es würde sich eine äolische Formation von ganz anderem Wesen herausbilden, als dies tatsächlich der Fall gewesen ist. Die Ebene ist aber besetzt mit einer unzähligen Menge kleiner und kleinster Hindernisse der Luftbewegung, mit gewissen Pflanzen, und jede von diesen hat als ein Ansatzpunkt der Dünenbildung gedient. Die früher beliebte Definition der Wüste als eines gänzlich vegetationslosen Teiles der Landoberfläche wird in der Gegenwart nicht mehr als richtig anerkannt; der Gegensatz zwischen ihr und der Steppe ist kein absoluter, qualitativer, sondern lediglich darin ist der Unterschied zu suchen, daß die Gewächse in der Wüste noch ärmlicher und spärlicher nach Arten- und Individuenzahl auftreten, als bei der anderen, minder monotonen Bodenform.

---

[1]) Daß dem so sei, beweisen wiederum die Mitteilungen Loews in Verbindung mit der Autopsie. Östlich von der Dünenregion zieht sich nämlich ein Landstrich hin, dessen Natur von derjenigen jener ersteren in der entschiedensten Weise abweicht. Die äußerst tiefen, cañonartigen Regenrisse, welche sich allerorts finden und kein unbeträchtliches Verkehrshindernis abgeben, sind nach Loew durch die gewaltigen Wolkenbrüche ausgefurcht worden, die durch die Südostwinde bedingt zu sein pflegen. Weiter oben im Gebirge dienen diese „Dry Washes" umgekehrt der Verkehrserleichterung, weil man in denselben immer noch leichter als auf den steilen Felshängen vorwärts kommen kann. Ohne eine Zone von Zwischenformen geht diese Erosionslandschaft im Westen unvermittelt in die Dünenlandschaft über, die natürlich auch durch die Horizontalität ihres Bodens der Zerstörung durch die meteorischen Gewässer viel weniger Angriffspunkte bot, die aber zweifellos auch an und für sich ungleich trockener als die östlich angrenzenden Gebiete sein muß. Auch die im Winter häufigen, mit viel geringerer Intensität wehenden Nordwestwinde haben beim Überschreiten der Küstenkordillere den aus dem Stillen Ozean mitgebrachten Wasserdampf zum größten Teile ausgeschieden.

„Arizona und Neu-Mexiko besitzen,“ so äußert sich Drude,[1]) „mehr Steppenphysiognomie, welche im südöstlichen Kalifornien zur Mohave- und Gilawüste von trauriger Einöde ausgeprägt ist.“ Die Charakterpflanze dieser bei aller Starrheit doch durchaus nicht eigentlich unschönen Landschaft, die sich auch durch häufige Sandtromben und durch das nicht seltene Auftreten der Fata Morgana (Mirage) als richtige Wüste zu erkennen gibt, ist die graugrüne Artemisia tridentata, welcher von den Amerikanern der recht treffende Name Sage Brush[2]) beigelegt worden ist. Mit ihren rauhen, verfilzten Ästen dem Winde in den Weg gestellt, hat diese niedrige Staude, die niemals Gruppen bildet, sondern immer nur ganz vereinzelt wächst, alle Eigenschaften eines Sandfanges. Sie wirkt ganz ebenso, wie dies anderwärts, wenn Sand- oder Schneedünen (Sastrugi) gebildet werden, kleine Bodenwarzen, Felsblöcke, Zäune tun, und ragt sehr häufig aus dem sie überdeckenden Sandhügel hervor, dessen höchste Stelle markierend.

Über zwei der Voraussetzungen, von denen das Zustandekommen der Dünen abhängt, sind wir jetzt zur Klarheit gelangt. Auch das Vorhandensein des Sandes, der den Baustoff liefert, braucht nicht erst bewiesen zu werden, und nur dessen Beschaffenheit nötigt uns eine besondere Erörterung auf, indem eben ermittelt werden soll, aus welchem Grunde die an sich zu erwartende Barchangestalt vermißt wird. Da ist nun anscheinend nicht belanglos die Frage, ob die Mohavedünen von jeher dort, wo man sie jetzt vorfindet, existiert haben, oder ob nicht vielleicht in ihnen eine mehr oder weniger ephemere Bildung zu erblicken ist. Auffallen

[1]) Drude, Handbuch der Pflanzengeographie. Stuttgart 1890, S. 445.

[2]) Ebenda, S. 433. Auch Loew (a. a. O., S. 415) macht eine Anzahl von Pflanzentypen namhaft, welche auf trockenen Sandhügeln erwachsen und sicherlich, wenn erst einmal die Düne hergestellt ist, dazu beitragen, dieselbe zu „verankern“ und am Fortschreiten zu hindern. Jene Larrea- und Cereusarten, welche man auf Drudes Schilderung hin auch in der Mohavewüste vermuten möchte, sind, wie es den Anschein hat, nicht so weit nach Westen vorgedrungen.

muß es, daß Loew derselben keine Erwähnung tut, obwohl er ohne allen Zweifel an Ort und Stelle gewesen ist und an keiner Naturmerkwürdigkeit achtlos vorübergeht. Wir befinden uns nun aber an einem Platze, der in der neuesten Zeit eines der großartigsten Naturschauspiele sich vollziehen sah, ein Schauspiel zugleich, welches den einschneidensten Einfluß auf die ganze Umgebung der Umgebung ausgeübt hat. Wir meinen die Entstehung des Salton Lake, eines länglichen Wasserbeckens, dessen Hauptachse wesentlich mit der für die Erbauung der Dünen bestimmend gewesenen Windrichtung übereinstimmt. Man weiß längst, daß Sand, der vom Ufer eines Meeresteiles oder eines größeren Binnensees stammt, nicht ohne weiteres mit dem Wüstensande auf die gleiche Stufe zu stellen ist, und so wäre es mithin sehr wohl denkbar, daß die subaërischen Bildungen des Coahuilla-Tales andere als vorher geworden sind, seitdem jener vielbesprochene See sich bemerklich zu machen begann.

Eine kurze Geschichte desselben kann hier nicht umgangen werden, indem wegen tieferen Eingehens auf die Genese des ziemlich einzig in seiner Art dastehenden Ereignisses das Studium einer Abhandlung des Chemikers H. Erdmann[1]) empfohlen werden darf. Die Geologie von Nord-Mexiko hatte längst darüber vergewissert, daß in vorgeschichtlicher Zeit der Kalifornische Golf viel weiter nach Norden reichte und durch die vom Rio Colorado herbeigeführten Detritusmassen auf eine weite Strecke hin zugeschüttet ward. Man glaubte dem wasserreichen Strome einen kleinen Teil seines Überflusses leicht entziehen zu können, um so eine bessere Bewässerung des bis zu 100 m unter den Meeresspiegel sich hinabsenkenden Depressionsgebietes von Mekka und Salton zu erzielen, und dieser Zweck wurde denn auch fürs erste vollständig erreicht. Daß sich schon in den achtziger Jahren des vergangenen Jahr-

[1]) Erdmann, Die Katastrophe von Mansfeld und das Problem des Coloradoflusses. Ein Beitrag zur Geschichte der Salzseen und Salzsteppen. Petermanns Geogr. Mitteil., 1907, S. 42 ff.

hunderts ein See gebildet hatte, der als Dry Lake jedoch keine allzu großen Dimensionen annehmen zu wollen schien, interessierte wohl den Naturforscher, nur wenig aber die Bewohnerschaft der jungen Oase. Floß doch der Colorado nach wie vor in der Nähe von Fort Yuma in das Kalifornische Purpurmeer. Plötzlich aber zeigte sich, daß der Fluß sich immer tiefer in seine rechte Uferseite einschnitt und den Entwässerungskanal der Ingenieure mehr und mehr ausfüllte, bis endlich zu Anfang 1906 die alte Wasserader ganz versiegte und gigantische Wassermengen den Weg nach dem Salton Lake einschlugen, der nunmehr sich stetig vergrößerte und das angrenzende Terrain überflutete. Mehrmals schon mußte die Direktion der am Ufer hinführenden Süd-Pazifikbahn die Geleise landeinwärts verlegen, und noch ist kein Ende der Gefahr abzusehen, welche der bereits mehr denn 1200 qkm bedeckende — den Starnberger See an Areal demnach ungefähr zwanzigmal übertreffende — See durch seine unaufhaltsame Vergrößerung über diesen Teil von Kalifornien heraufbeschworen hat.

Da, wo See- und Kontinentaldünen sich räumlich miteinander vermengen, wie dies Muschketows Angaben[1]) zufolge in Turkestan keine Seltenheit ist, kann eine verwirrende Formenfülle die Folge sein. Im Coahuilla-Tale liegen die Dinge anders, denn wir halten dafür, daß die dortigen Dünen gar keine richtigen Binnenlandgebilde, sondern vielmehr in die Kategorie der Stranddünen zu versetzen sind, mag auch die Ostgrenze des Dünendistriktes von dem Nordwestende des neuen Sees noch eine gewisse Entfernung haben. Der Sand entbehrt, wenn diese unsere Annahme zutrifft, jener Trockenheit, welche den wahren Wüstensand charakterisiert, und dann ist wohl begreiflich, daß er sich auf der vom Winde abgekehrten Seite des Hügelchens nicht in einer fast asymptotisch gegen die Horizontale verlaufenden Kurve, sondern so ablagert, wie man dies von den Meeresdünen her gewohnt ist. Nunmehr ist denn

[1]) Muschketow-Merena, S. 148. Vgl. auch Sohncke, Gemeinverständliche Vorträge aus dem Gebiete der Physik. Jena 1892, S. 220 ff.

wohl die Frage als geklärt zu erachten, warum die Dünen im Mohave Desert nicht als leewärts geöffnete Barchane, sondern als typische Uferbildungen mitten in einer vom Meere ziemlich weit abstehenden Wüste auftreten. Gleichwohl wird man nicht soweit gehen dürfen, zu behaupten, daß die übliche Identifizierung von Barchan und Kontinentaldüne wieder in ihre vollen Rechte eingesetzt sei. Denn unsere Coahuilla-Hügel sind doch auf alle Fälle ächt kontinentale Bildungen, deren Baumaterial nur allerdings seinen wenigstens zum Teile wässerigen Ursprung nicht zu verleugnen vermag. Es verbleibt dabei, daß es auch in der Wüste regelrechte Dünen vom marinen Typus geben kann.

Man möchte geradezu wünschen, einige solche Exemplare in bequemer Nähe zu haben, um an ihnen bei Gelegenheit von Exkursionen die Gesetze der Dünenbildung erläutern zu können. Man weiß, daß es im allgemeinen nicht leicht ist, Einzeldünen von normaler Struktur aufzufinden, weil eben der Vorgang der Sandverwehung niemals rastet und infolgedessen eine sozusagen gerade fertig gewordene Düne nicht lange in dieser ihrer Eigenschaft sich erhält. Anlagerung und Überlagerung neuer Sandmassen verändert rasch die ursprüngliche Gestalt; das Individuum verschwindet in einem Dünengebirge von oft recht ansehnlicher Höhe, und auch dieses ist weit davon entfernt, stabil zu bleiben, weil ihm die Tendenz zur Wanderung innewohnt.[1]) Gerade die Barchane büßen, wenn diese progressive Tendenz bei dem einen mehr, bei dem anderen weniger ausgebildet ist, gar rasch die sie auszeichnende Gestalt ein.[2]) Die Dünenreihen gruppieren sich so unregelmäßig, daß

[1]) Obschon selbstverständlich an allen von Wanderdünen heimgesuchten Küsten deren Wesen von jeher gekannt und gefürchtet war, so stoßen wir doch in der Literatur erst verhältnismäßig spät auf eine ent-entsprechende Würdigung der einschlägigen Probleme. Viel hat hiezu beigetragen Lyell (Principles of Geology, 1. Band. London 1872, S. 514 ff.)

[2]) Welch abenteuerlich bizarre Formen ein binnenländisches Dünengebirge anzunehmen imstande ist, darüber orientieren uns die Médanos (s. o.) des mexikanischen Staates Chihuahua (mit diesem Worte be-

in ihrer Anordnung die Richtung des Windes, der doch für die Ansammlung des Sandes verantwortlich zu machen ist, gar nicht mehr zur Geltung kommt. Da hört dann ganz von selbst der morphographische Unterschied zwischen Ufer- und Kontinentaldünen zu bestehen auf.[1])

Wenn nun aber in allen größeren Wüsten diese Verschmelzung der Einzeldünen zu einem Aggregate von solchen die Regel bildet, und wenn man in der Sahara ebenso wie im Tarymbecken und in Chiwa fast nur Dünenketten von sehr wechselndem Vertikaldurchschnitte zu beobachten Gelegenheit findet, so drängt sich ganz von selbst die Frage auf, wie es denn komme, daß im Mohave Desert dieses Zusammenwachsen so ganz unterblieben und jede Düne in der Gestalt erhalten worden ist, welche sie von allem Anfange an angenommen hatte. Es wird kaum möglich sein, auf diese Frage eine andere Antwort zu erteilen, als die, daß dem Dünenkerne, den niedrigen Sträuchern, eine besonders stark ausgeprägte Fähigkeit, den Flugsand zurückzuhalten, zugesprochen werden müsse. Bekanntlich hat sich die Technik der Dünenverfestigung[2]), welche in primitiver Form seit den ältesten Zeiten schon geübt wurde, in unseren Tagen ganz außerordentlich vervollkommnet, und man hat insbesondere namhaft verbesserte Erkenntnisse über die Natur derjenigen Gewächse sich erworben, welche auf den Böschungen des Sandhügels angepflanzt werden müssen, um durch Verfilzung ihrer Wurzeln Hemmnisse für das Vordringen der leicht beweglichen Körperchen zu bereiten. In unserem Falle sind

---

zeichnen die Neuspanier alle Sandanhäufungen sowohl in Mexiko, wie auch namentlich in Argentinien). Von den ersteren ist leider noch sehr wenig bekannt. „Merkwürdig sind die scharfen Kanten, Spitzen und Grate, welche der Wind diesen flüchtigen Sandbergen gegeben, und die steilen Rinnen und Schluchten, ähnlich jenen, die man häufig bei großen, vom Sturme zusammengeblasenen Schneemassen antrifft“ (v. Hesse-Wartegg, Mexiko, Land und Leute. Wien-Olmütz 1890, S. 25).

[1]) Sokolów-Arzruni, a. a. O., S. 178 ff.; Rolland, Sur les grandes dunes du sable du Sahara. Bull. de la soc. géol. de France, 1882, S. 32 ff.

[2]) Vgl. Gerhardt, Handbuch des Dünenbaus. Berlin 1898.

die über die Ebene verteilten Büsche offenbar von Hause aus dazu geeignet, den Sand festzuhalten und am Wandern zu hindern. Vergessen darf aber freilich auch nicht werden, daß, wofern unsere Hypothese das Richtige trifft, die Dünen des Coahuilla-Tales sehr jugendliche Gebilde sind, und daß, wer nach einigen Lustren oder Jahrzehnten die Gegend aufs neue in Augenschein nimmt, sehr wohl ganz anders gearteten Verhältnissen dort begegnen kann. Vorläufig aber verdienen diese Flugsandhügel die oben ihnen beigelegte Bezeichnung; es sind Demonstrationsmodelle für die Grundgesetze der Dünenbildung.

Und zwar verdienen sie diese Benennung auch noch unter einem anderen Gesichtspunkte. Wir sprachen oben davon, daß über die Oberfläche sehr vieler dem Auge näher befindlicher Dünen gewisse Linien hinlaufen, sogenannte Ripple Marks nach englischer, besser Kräuselungsmarken nach deutscher Nomenklatur. Daß diese fast dekorativ wirkende Zugabe mit dem ganzen Prozesse der Dünenentstehung in sehr naher Beziehung steht, ist bekannt.[1]) Durch die Untersuchungen von Sokolów wurde dargetan,[2]) daß die Bildung der äolischen und vom bewegten Wasser bewirkten Rippungen einheitlichen Gesetzen unterliegt, und J. Walther[3]) durfte demzufolge mit Fug die Windkräuselungen für Miniaturdünen erklären. Als primäre Ursache dieser Bänderung des Dünenkegels haben wir den Umstand gelten zu lassen, daß die ein-

---

[1]) Wir verweisen nach dieser Seite hin auf die nachstehenden Veröffentlichungen: Cornish, On Kumatology. Geograph. Journal, 1899, S. 626 ff.; Baschin, Die Entstehung wellenförmiger Oberflächenformen. Ein Beitrag zur Kymatologie. Zeitschr. d. Gesellsch. f. Erdk. zu Berlin, 1899, S. 408 ff.); Bertololy, Kräuselungsmarken und Dünen. München 1900 (Münch. Geogr. Studien, Stück IX).

[2]) Sokolów-Arzruni, a. a. O., S. 210 ff. Auch in der vorerwähnten Schrift von Bertololy ist diesem Gegenstande volle Beachtung zugewendet worden (S. 99 ff.).

[3]) Walther, Die Denudation in der Wüste und ihre geologische Bedeutung. Abhandl. der K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., math.-phys. Klasse, 16. Band.

zelnen Sandkörner nicht, wie man bei summarischer Betrachtung zu glauben geneigt sein könnte, von gleicher Größe sind, und daß auch von einer gestaltlichen Identität keine Rede sein kann. „Es wäre", so lesen wir bei Sokolów,[1] „irrig, anzunehmen, daß die Aufbereitung durch Wind den Sand vollkommen gleichmäßig gestaltet. Im Gegenteile, in jeder Handvoll Sand lassen sich gröbere und feinere Körner wahrnehmen. . . ." Scharfkantige und abgeschliffene Gesteinsplitter kommen in bunter Wechsellagerung vor. Schon ein winziger Unterschied in den Dimensionen kann ein bereits auf der Dünenoberfläche fest gewordenes Sandteilchen zu einem Ansatzkerne werden lassen, welches die Nachkömmlinge zu einer kleinen Erhöhung in Luv anstaut, der dann natürlich eine an sich ebenfalls minimale, mit der Zeit jedoch sich vertiefende Einsenkung zugehört. Eine genaue Verfolgung dieser zumeist symmetrisch auf den beiden Seiten[2] der Luvfläche verteilten Kurvenzüge läßt erkennen, daß sie bald scharfkantig bald abgerundet sind; in dem hier vorliegenden Falle erscheinen sie jedoch durchweg als Linien ohne ausgezeichnete Punkte, und jene Verästelung, von der Walther (s. o.) spricht, ist hier nicht zu beobachten. Übrigens sind auch die Rippungen nicht an ihren augenblicklichen Platz gebannt, sondern unterliegen einer von der Geschwindigkeit und Konstanz des Windes abhängigen Verschiebung.

Es wäre gewiß äußerst wünschenswert, diese so merkwürdige Dünenregion noch näher erforscht zu sehen, ehe sie vielleicht in dieser ihrer Eigenart überhaupt zu bestehen aufgehört hat. Daß schon nach wenigen Jahren das Coahuilla-

[1] Sokolów-Arzruni, S. 212.

[2] Wiewohl von vornherein kein Zweifel obwalten kann, daß eine normal gebaute Düne eine stetig zusammenhängende Oberfläche besitzen muß, so hebt sich doch, aus passender Entfernung und unter dem richtigen Gesichtswinkel gesehen, die längste Seitenlinie des schiefen Kegels wie ein scharfer Grat, wie eine Kante heraus, und deshalb besteht auf dessen linker und rechter Seite Symmetrie. Eine exakte Bestimmung der wahren Oberflächengestalt unter gewissen, die Rechnung vereinfachenden Voraussetzungen würde nicht des Interesses entbehren.

Tal ein ganz anderes Gepräge zur Schau tragen kann, halten wir für nicht ausgeschlossen,[1] und zwar um so mehr, weil ältere Schriften von diesem Naturspiele, das doch keinen in die Nähe Kommenden gleichgültig lassen kann, keine besondere Erwähnung tun.[2] Für jetzt kam es nur darauf an, daß auch in Gegenden von recht namhafter Meeresdistanz echte Dünen, die nicht dem Barchantypus einzureihen sind, auftreten können; inwieweit deren Entstehung ein Folgephänomen der Bildung des neuen großen Salzsees sein mag, wofür erwähntermassen manche Anzeichen sprechen, muß einer späteren Durchforschung des noch viele wichtige Aufschlüsse verheißenden kalifornischen Wüstengebietes vorbehalten bleiben. Als ein unumstößliches Fazit aber leiten wir aus unserer Erörterung das folgende her: Die Lehre von den Kontinentaldünen kann selbst jetzt, so viele wichtige Beiträge auch von Zittel, Lenz, Duveyrier, Rolland, Schirmer, Walther, Sokolów und zahlreichen Aufnahmegeologen des russisch-asiatischen Dienstes geliefert worden sind, noch immer nicht als abgeschlossen gelten.

---

[1] Zum Zerfalle der kleinen Sandhügel wirkt wesentlich ein Moment mit, auf dessen Bedeutung v. Bary (Sokolów-Arzruni, S. 204) aufmerksam gemacht hat. Der Strauch nämlich, dessen Vorhandensein die Sandstauung eingeleitet hat, stirbt allmählich ab, und dann nivelliert der Wind rasch die ihres Haltes beraubte Erhebung. So sind, von verschiedenen Standpunkten aus betrachtet, diese Inlanddünen nur erdgeschichtliche Momentanbildungen.

[2] Zwei Werke, die vielleicht Anhaltspunkte geben würden, waren für den Verf. leider unzugänglich: Geological Reports of Mexican Boundary Survey, 1. Teil; Geological Reports on the Pacific Railroad, 5. Teil. Zumal dieser zweitgenannte Bericht könnte vielleicht für die Beurteilung und Vergleichung des vom Coahuilla-Tale einst und jetzt dargebotenen Landschaftsbildes in Frage kommen.



# Über die Bewegung der Elektronen.

Von **A. Sommerfeld.**

(*Eingelaufen 8. Juni.*)

Obwohl die unter gleichem Titel erschienene Arbeit von Herrn Lindemann[1]) sich nicht allein gegen meine Untersuchungen über Elektronentheorie, sondern in gleicher Weise gegen diejenigen von Heaviside, Lorentz, Wiechert, W. Wien, J. J. Thomson, Abraham, Kaufmann etc. wendet, so bin ich wohl in erster Linie verpflichtet, darauf zu antworten, da Herr Lindemann sich vornehmlich der von mir angegebenen[2]) allgemeinen Methoden zur Berechnung des Feldes und der Kraft eines beliebig bewegten Elektrons bedient. Die Gründe, weshalb H. Lindemann trotzdem vielfach zu Ergebnissen gelangt, die von den meinigen und denen aller anderen Forscher abweichen, werde ich im folgenden besprechen.

Da Herr Lindemann in § 16 seiner Arbeit selbst eine Zusammenstellung der zwischen uns obwaltenden Differenzen gibt, werde ich an diese Zusammenstellung anknüpfen und die einzelnen Punkte der Reihe nach durchgehen.

## I. Die Berechnung des skalaren Potentiales.

Der Unterschied zwischen unserer beiderseitigen Auffassung beginnt, wie Herr Lindemann p. 322 bemerkt, bei seiner Gl. (25). In (25) handelt es sich darum, die drei Kon-

---

[1]) Abhandlungen der Bayer. Akademie II. Kl., Bd. XXIII, II. Abt.

[2]) Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1904, Heft 2 und 5. Die wesentlich vereinfachte Methode, die ich in den Proceedings der Amsterdamer Akademie, November 1904, entwickelt habe, hat Herr Lindemann nur gestreift.

stanten $A$, $B$, $t_0$ gewissen Anfangsbedingungen anzupassen. Herr Lindemann setzt (p. 242)

$$(1) \qquad t_0 = 0, \qquad A = B = 0;$$

ich behaupte (p. 104 der Note I)

$$(2) \qquad t_0 = -\infty, \quad A = B = 0.$$

Herr Lindemann begründet (p. 242) seine Wahl der Konstanten wie folgt: „Das Elektron soll vor der Zeit $t = 0$ noch in Ruhe sein, und die Bewegung soll im Momente $t = 0$ beginnen. Wir müssen also annehmen, daß die Gleichungen[1])

$$(3) \qquad \varphi' = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0$$

für $t = 0$ erfüllt seien.“ Kurz vorher bemerkt er, daß $\varphi$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für $t = 0$ verschwinden, sobald die entsprechenden Ausdrücke $\varphi'$ und $\frac{\partial \varphi'}{\partial t}$ für $t = 0$ verschwinden. Herr Lindemann verlangt also, daß im Ruhezustande nicht nur $\partial \varphi / \partial t$ sondern auch $\varphi$ verschwinde. Andererseits bemerkt er im Eingange des § 1: „Im ruhenden Zustande geht das skalare Potential in das elektrostatische, das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ in das magnetische Potential[2]) über.“ Aber das elektrostatische Potential einer gleichmäßig geladenen Kugel ist keineswegs Null, sondern hat an allen Stellen des Raumes den aus der Potentialtheorie bekannten Wert. Der von Herrn Lindemann zu Grunde gelegte Anfangszustand $\varphi = 0$ entspricht also nicht den physikalischen Bedingungen des Problems.

---

[1]) $\varphi'$ bedeutet ein Hilfspotential, aus dem sich das gesuchte Potential durch Integration berechnet.

[2]) Der zweite Teil dieses Satzes ist mir unverständlich; das Vektorpotential geht doch bei einem ruhenden Elektron in Null über, während von einem magnetischen Potential hier überhaupt nicht die Rede sein kann; der erste Teil des Satzes ist natürlich richtig.

In der Tat genügt die definitive Formel (34) von Herrn Lindemann.

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c}{2\,\pi^2\,a^3}\int_0^t \frac{S}{R}\,d\,\tau \tag{4}$$

der unphysikalischen Anfangsbedingung $\varphi = 0$ für $t = 0$. Dagegen lautet die entsprechende Formel bei mir (siehe die Gl. (18), (19) meiner Note I), wenn ich mich in der Definition der Größe $S$ des leichteren Vergleichs wegen an Herrn Lindemann anschließe

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c}{2\,\pi^2\,a^3}\int_0^\infty \frac{S}{R}\,d\,\tau. \tag{5}$$

Ich habe zu zeigen, daß diese Formel für $t = 0$ die richtige Verteilung des elektrostatischen Potentials ergibt, wenn man mit Herrn Lindemann annimmt, daß das Elektron bis zur Zeit $t = 0$ in Ruhe war.

$a$ bedeutet den Radius des Elektrons, $\tau$ die rückwärts gerechnete Zeit, $R$ den Abstand des „Aufpunktes", für den $\varphi$ berechnet werden soll, von den früheren Lagen des Mittelpunktes des Elektrons. Da aber das Elektron für $t < 0$ ruhen soll, sind die früheren Lagen des Mittelpunktes mit seiner Lage zur Zeit $t = 0$, d. h. mit dem Koordinatenanfangspunkte, identisch und es wird $R$ gleich dem Abstande $r$ des Aufpunktes von diesem letzteren Punkte, also unabhängig von $\tau$. $S$ bedeutet (siehe meine Gl. (19) oder diejenige von Lindemann (40), (41)) einen der folgenden Ausdrücke:

$S_1 = \frac{\pi}{8}(a^2 - (c\,\tau - r)^2)$, wenn Dreieck $a, c\tau, r$ möglich,

$S_2 = \frac{\pi}{2}\,c\,\tau\,r$, wenn Dreieck $a, c\tau, r$ unmöglich, wobei $a > c\tau$ und $a > r$,

$S_3 = 0$, wenn Dreieck $a, c\tau, r$ unmöglich, wobei aber $a < c\tau$ oder $a < r$.

Wir betrachten zunächst einen äußeren Punkt $r > a$. Hier gilt, wenn $c\tau > r + a$ oder $< r - a$ der Wert $S = S_3 = 0$, wenn dagegen $r - a < c\tau < r + a$ der Wert $S = S_1$ also nach (5):

$$\varphi = \frac{3\varepsilon c}{16\pi a^3 r}\int\limits_{(r-a)/c}^{(r+a)/c}(a^2 - (c\tau - r)^2)\,d\tau$$

oder mit der Substitution $\sigma = c\tau - r$

$$\varphi = \frac{3\varepsilon}{16\pi a^3 r}\int\limits_{-a}^{+a}(a^2 - \sigma^2)\,d\sigma = \frac{\varepsilon}{4\pi r}. \tag{6}$$

Für einen inneren Punkt $r < a$ haben wir, wenn $c\tau > a + r$ wieder $S = S_3 = 0$, wenn dagegen $c\tau < a - r$, gilt jetzt $S = S_2$ und, wenn $a - r < c\tau < a + r$, wie vorher $S = S_1$. Mithin liefert (5) jetzt:

$$\varphi = \frac{3\varepsilon c}{16\pi a^3 r}\left\{\int\limits_{(a-r)/c}^{(a+r)/c}(a^2 - (c\tau - r)^2)\,d\tau + 4r\int\limits_{0}^{(a-r)/c}c\tau\,d\tau\right\}.$$

Die Ausrechnung gibt:

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{8\pi a^3}(3a^2 - r^2). \tag{6'}$$

Die Ausdrücke (6) und (6′) sind die wohlbekannten Werte des Potentials einer gleichmäßig mit $\varepsilon$ geladenen Kugel vom Radius $a$ in rationellen Einheiten, deren sich auch Herr Lindemann bedient, für einen äußeren und inneren Punkt.

Meine Formel (5) gibt also den elektrostatischen Anfangszustand des Potentiales richtig wieder, den wir vorschreiben müssen, wenn wir uns das Elektron bis zur Zeit $t = 0$ in Ruhe denken,[1] dagegen entspricht die Lindemannsche Formel (4) dem unphysikalischen Anfangszustande $\varphi = 0$.

[1] Ich brauche kaum zu erwähnen, daß meine Formel ganz allgemein gilt, nicht nur bei dem hier durchgerechneten Anfangszustande. Letzteren habe ich hier nur im Anschluß an Lindemann als Beispiel gewählt.

## 2. Die ergänzende Betrachtung über den Anfangszustand in § 15 der Lindemannschen Arbeit.

Im Eingange des § 15 deutet Herr Lindemann selbst das Bedenkliche der Anfangsbedingung $\varphi = 0$ mit den Worten an: Wir haben angenommen, daß das elektrische Teilchen „zur Zeit $t = 0$ seine Bewegung beginnt und gleichzeitig seine elektrische Ladung empfängt“. Eine solche plötzliche Erschaffung des Elektrons, wie sie von Herrn Lindemann hiernach vorgestellt wird, ist aber gewiß auszuschließen, da nach keiner elektrodynamischen Theorie im Äther gebettete Ladungen jemals entstehen oder verschwinden können.

Die folgenden ergänzenden Betrachtungen, durch welche die Wirkung des ursprünglich vorhandenen Feldes des Elektrons berücksichtigt werden sollen, verfehlen nun aber ihr Ziel, wie ich der Kürze halber sogleich an dem Schlußergebnis zeigen will.

Herr Lindemann modifiziert hier seine ursprüngliche Formel (4) in folgender Weise: (s. Gl. (197) und (203)):

$$\varphi = \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3}\int\limits_0^{t+t_0} \frac{S}{R}\, d\tau \tag{4'}$$

mit der Maßgabe,[1]) daß der Zeitpunkt $t_0$ bei nachfolgender stationärer Bewegung gleich $2a/(c-v)$ gewählt werden solle. Nach den Bemerkungen unter 1, 2, 3 pag. 311 von Herrn Lindemann soll (4′) für $t = 0$ in das elektrostatische Potential der ruhenden Ladung[2]) übergehen. Dem ist aber nicht so, wie man im Anschluß an meine vorstehende, unter 1 mitgeteilte Rechnung leicht prüft.

Ich zeige dieses z. B. für das Äußere des Elektrons $r > a$.

---

[1]) Daß die Größe $t_0$ und damit die Potentialverteilung zur Zeit $t = 0$ von dem Charakter der nachfolgenden Bewegung abhängen soll, ist an sich kaum verständlich.

[2]) Daß sich Herr Lindemann vor $t = 0$ das Elektron dauernd in Ruhe denkt, geht aus pag. 315, Z. 16 v. o. hervor.

Von den drei Werten $S_1$, $S_2$, $S_3$ kommen hier nur $S_1$ und $S_3$ in Betracht. Man hat dabei die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

1. $c t_0 < r - a \ldots \varphi = 0$.

2. $r - a < c t_0 < r + a \ldots \varphi = \frac{3 \varepsilon c}{16 \pi a^3 r} \int\limits_{(r-a)/c}^{t_0} (a^2 - (c \tau - r)^2)\, d \tau.$

3. $r + a < c t_0 \ldots \varphi = \frac{3 \varepsilon c}{16 \pi a^3 r} \int\limits_{(r-a)/c}^{(r+a)/c} (a^2 - (c \tau - r)^2)\, d \tau = \frac{\varepsilon}{4 \pi r}.$

Nur im dritten Falle, d. h. nur im Innern einer Kugel vom Radius

$$r = \frac{c + v}{c - v} a$$

ergibt sich also der richtige Wert des elektrostatischen Potentials. Im ersten Falle, d. h. außerhalb einer Kugel vom Radius

$$r = \left( \frac{c + v}{c - v} + 2 \right) a$$

dagegen wird $\varphi = 0$. Ebensowenig stimmt das Feld im zweiten Falle, d. h. in der übrig bleibenden Kugelschale von der Dicke $2a$ mit dem elektrostatischen überein.

Andererseits sahen wir oben unter **1**, daß sich die richtige elektrostatische Potentialverteilung ergibt, wenn wir in der Formel (4′) $t_0 = \infty$ wählen. Dann aber wird diese Gleichung mit meiner Gl. (5) identisch.

Die in Rede stehenden ergänzenden Betrachtungen hätten also bei richtiger Durchführung auf meine Formeln führen müssen: in der vorliegenden Fassung sind sie in sich widersprechend.

### 3. Zahlenbeispiel.

Es handelt sich jetzt um die Ausdrücke, zu denen Herr Lindemann für die auf eine bewegte Ladung wirkende Kraft $\mathfrak{F}$ gelangt. Ich beschränke mich dabei auf den einfachsten Fall

der stationären Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit $v$. Nach pag. 312 unten gilt von Beginn der Bewegung ab die Gl. (169) oder die daraus folgende Näherungsformel[1]) (169a)

$$\mathfrak{F} = \frac{3\,\varepsilon^2}{4\,\pi\,a^2}\left(-\frac{29}{16}\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} - \cdots\right). \tag{7}$$

Aus ihr würde folgen:

1. Die stationäre Bewegung ist nicht kräftefrei, sondern stets gehemmt.

2. Die Hemmung ist um so größer, je kleiner die Geschwindigkeit ist, weil $\beta$ im Nenner vorkommt.

3. Sie ist bereits bei Unterlichtgeschwindigkeit von derjenigen Größenordnung, wie ich sie bei Überlichtgeschwindigkeit gefunden habe, nämlich von der Größe derjenigen elektrostatischen Kraft, die zwei unmittelbar aneinander anliegende Elektronen aufeinander ausüben würden.

4. Die Kraft überschreitet jede angebbare Größe, wenn man der Geschwindigkeit einen konstanten, der Null hinreichend benachbarten Wert gibt.

Zur numerischen Verdeutlichung wird es gut sein, die für Elektronen geltenden Daten $\varepsilon$, $a$ durch experimentell realisierbare Größen zu ersetzen. Nehmen wir z. B. $a = 1$ cm und diejenige Ladung $\varepsilon$, welche einer Spannung von 1 cm Schlagweite entspricht. Diese Spannung beträgt rund 100 elektrostatische Einheiten; ebenso groß ist, da die Kapazität gleich 1, die Ladung in gewöhnlichen elektrostatischen Einheiten; unser $\varepsilon$ (in rationellen Einheiten gemessen) wird daher gleich $\sqrt{4\,\pi}\cdot 100$. Die Geschwindigkeit $v$ sei etwa 30 m/sec. (Schnellzugsgeschwindigkeit). Dann haben wir $\beta = 10^{-7}$ und nach (7)

$$\mathfrak{F} = -3\cdot 10^4 \cdot \frac{29}{16}\cdot 10^{14} = 5{,}5\cdot 10^{18} \text{ Dynen}$$
$$= 5{,}6\cdot 10^{12} \text{ kg-Gewicht.}$$

[1]) Ich schreibe wie üblich $\beta$ statt des Lindemannschen $\omega = \frac{v}{c}$.

Die Arbeitsleistung wäre

$$\mathfrak{F} v = 168 \cdot 10^{12} \frac{\text{kg m}}{\text{sec}} = 2{,}25 \cdot 10^{12} \text{ PS},$$

also so groß, daß kein Motor der Technik sie zu liefern imstande wäre. Wünscht man die Kugel langsamer zu bewegen, so würde die erforderliche Leistung noch größer; z. B. betrüge sie bei 3 cm/sec.

$$2{,}25 \cdot 10^{16} \text{ PS}.$$

Der Grund für diese befremdenden Resultate[1]) liegt teils darin, daß nach 1 und 2 der Anfangszustand in der Lindemann'schen Theorie nicht richtig zum Ausdruck kommt, teils in dem was folgt:

### 4. Die Ausrechnung von $q$ in § 6 der Lindemannschen Arbeit.

Wir wollen uns vorübergehend auf den Boden der (von uns beanstandeten) Formel für $q$ (s. o. Gl. (4)) stellen und die Ausrechnung derselben in einem speziellen Falle kontrollieren. Der denkbar einfachste Spezialfall ist der, wo das Elektron auch nach der Zeit $t = 0$ dauernd in Ruhe bleibt. Übrigens aber wollen wir, da die physikalische Bedeutung durch den Schaffungsakt im Zeitpunkte $t = 0$ ohnehin illusorisch wird, unser Beispiel rein analytisch definieren. Es handle sich also um die Auswertung des obigen Integrales (4) für den Fall, daß $R = r$ von $\tau$ unabhängig ist, also um die Berechnung von

$$q = \frac{3\,\varepsilon\, c}{2\,\pi^2 a^3 r} \int_0^t S\, d\tau. \tag{4''}$$

Diese Auswertung ist äußerst einfach und von uns für den Fall $r > a$, auf den wir uns auch jetzt beschränken können, schon unter 2 bewirkt. In der Tat gaben wir dort die Aus-

[1]) Wie mir Herr Lindemann freundlichst mitteilt, hat er bei einer Revision seiner Formeln die Irrtümlichkeit des Ausdruckes (7) für $\mathfrak{F}$ inzwischen selbst festgestellt. (Zusatz bei der Korrektur.)

rechnung des Integrales (4') für $t = 0$ und $R = r$; diese ist mit der Ausrechnung von (4'') identisch, bis auf die Bezeichnung $t_0$ statt $t$. Wir können also unsere Formeln 1, 2, 3 von pag. 160 direkt übernehmen, wenn wir darin $t_0$ durch $t$ ersetzen. Sie lauten dann:

1. $ct < r - a \ldots \varphi = 0,$

2. $r - a < ct < r + a \ldots \varphi = \frac{3\varepsilon c}{16\pi a^3 r}\int\limits_{(r-a)/c}^{t}(a^2 - (c\tau - r)^2)\, d\tau,$

3. $r + a < ct \ldots \varphi = \frac{\varepsilon}{4\pi r}.$

Vergleichen wir damit die Lindemannschen Angaben von pag. 253 und 254. Die dort erklärten Zeitpunkte $\tau', \tau'' \ldots$ werden in unserem Spezialfalle $R = r$:

$$\tau' = \frac{a - r}{c},\quad \tau'' = \frac{r - a}{c},\quad \tau''' = \frac{r + a}{c},\quad \tau^{IV} = \frac{r - a}{c}.$$ [1]

Da $\tau'$ unter der Annahme $r > a$ negativ wird, käme der Fall 1 (pag. 253 unten und pag. 254 oben) in Fortfall; die Integration würde mit $\tau = 0$ im Falle 2 beginnen und die Lindemannschen Formeln [2] ergeben:

$t < \tau''$, d. h. $ct < r - a \ldots \varphi = \frac{3\varepsilon c}{16\pi a^3 r}\int\limits_0^t (a^2 - (c\tau - r)^2)\, d\tau,$

$\tau'' < t < \tau'''$, d. h. $r - a < ct < r + a \ldots$

$$\ldots \varphi = \frac{3\varepsilon c}{16\pi a^3 r}\int\limits_0^{(r-a)/c}(a^2 - (c\tau - r)^2)\, d\tau.$$

---

[1] Die Definitionsgleichung für $\tau^{IV}$ auf pag. 254 liefert $(a - r)/c$. Aus dem Zusammenhange scheint aber hervorzugehen, daß hier ein Druckfehler vorliegt und diejenige Gleichung gemeint ist, aus der $(r - a)/c$ folgen würde.

[2] Bei Lindemann ist versehentlich $8\pi$ statt $16\pi$ im Nenner geschrieben, was ich im Text korrigiert habe.

Schon diese Formeln stimmen, wie man sieht, keineswegs mit den vorangestellten Werten unter 1 und 2 überein. Für das Weitere versagen aber die fraglichen Formeln vollständig. Denn es erweist sich $\tau^{\mathrm{IV}} < \tau'''$ und es fehlt eine Vorschrift, wie die Formeln (53a) und (53b) in diesem Falle aufzufassen sind.

Jedenfalls scheint mir dieses einfache Beispiel zu zeigen, daß die Fallunterscheidungen bei Lindemann pag. 254 unzulänglich und die Formeln (52), (53), auf denen alles Weitere beruht, irrig sind.

### 5. Differentiation nach der oberen Grenze.

Ich werde jetzt nur noch auf diejenigen Punkte eingehen, die Herr Lindemann in § 16 zusammenstellt und in denen er meine eigene Darstellung für irrtümlich hält. Das Zeichen $\infty$ in der oberen Grenze von (5) ist bei mir aus $\omega + t$ entstanden, wobei $\omega$ ins Unendliche rücken soll. Herr Lindemann bemerkt pag. 322 unten, ich hätte bei der Berechnung der Kraft $\mathfrak{F}$ versäumt, in der oberen Grenze nach $t$ zu differenzieren, weil ich dieselbe als konstant (gleich $\infty$) angenommen hätte. Aber der Integrand verschwindet an der oberen Grenze, wie es ja auch für die Konvergenz des Integrals erforderlich ist, und nicht nur an dieser Grenze, sondern bereits von einem endlichen Werte der Integrationsvariabeln ab. Infolgedessen liefert die Differentiation nach $t$ in der oberen Grenze keinen Beitrag.

Die diesbezüglichen Argumente Lindemanns sind folgende: Die unendliche Grenze $\omega + t$ werde im Laufe der Entwickelung bei mir durch eine endliche Grenze ersetzt (nämlich den soeben genannten Wert der Integrationsvariabeln, von dem ab der Integrand verschwindet); diese endliche Grenze sei dann im allgemeinen eine Funktion von $t$, was bei der Differentiation berücksichtigt werden müsse. Aber eben jene Grenze ist ja dadurch definiert, daß der Integrand hier zu verschwinden beginnt. Infolgedessen wird auch bei dieser Auffassung der

Beitrag, der aus der Differentiation der oberen Grenze entsteht, gleich Null.

Der Grund, weshalb beide Auffassungen zu demselben Ergebnis führen müssen, ist die Stetigkeit der Größe $S$, als Funktion der Integrationsvariabeln $\tau$. (Die Differentialquotienten von $S$ nach $\tau$ setzen sich dagegen natürlich unstetig aneinander.) Man betrachte die oben angegebenen Werte $S_1$, $S_2$, $S_3$, in denen nur, da es sich jetzt nicht wie oben um ein ruhendes Elektron handelt, $r$ durch $R$ zu ersetzen ist. Die fragliche obere Grenze, für die das Dreieck $(a, c\tau, R)$ unmöglich wird, ist $c\tau = R + a$; für diesen Wert wird $S_1 = 0$, was sich stetig an den Wert $S_3 = 0$ anschließt; dasselbe gilt, wenn $R > a$, für die untere Grenze der Dreiecksmöglichkeit $c\tau = R - a$. Ist aber $R < a$, so lautet diese letztere Grenze $c\tau = a - R$: jetzt wird

$$S_1 = \frac{\pi}{8}(a^2 - (a - 2R)^2) = \frac{\pi}{8}(4aR - 4R^2)$$

$$= \frac{\pi}{2} R(a - R) = \frac{\pi}{2} c\tau R$$

und geht somit stetig in den oben angegebenen Wert $S_2$ über.[1])

Übrigens hat Herr Lindemann an einer anderen Stelle seiner Arbeit (pag. 269 unten) diese Stetigkeit selbst betont.

Das stetige Verhalten der Ausdrücke $S$ ist namentlich auch für den folgenden Einwand zu beachten.

### 6. Vertauschung von Differentiation und Integration.

Ich will mich hier an die Betrachtung des von Herrn Lindemann vorgeschlagenen Beispiels anschließen. Es handelt sich dabei um die Vergleichung der beiden folgenden Integrale (pag. 324):

[1]) Dagegen sind die von Herrn Lindemann angegebenen Grenzwerte, welche diese Stetigkeit vermissen lassen, Gl. (40a) und (41a) pag. 247 nicht korrekt; die hier untergelaufenen Rechenfehler bestehen bei (40a) in der Ausrechnung von $\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2$, bei (41a) in der Ausrechnung von $\delta_1 - \delta_3 + \delta_4$.

$$L = \int_0^a dx \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(x + a\xi)\int_0^\infty \frac{\sin \xi s \cos x s}{s} ds\right]$$

und

$$L' = \frac{\partial}{\partial \xi}\int_0^a \left[(x + a\xi)\int_0^\infty \frac{\sin \xi s \cos x s}{s} ds\right] dx.$$

Letzteres hat den Wert

$$L' = (1 + 2a)\frac{\pi}{2}\xi,$$

ersteres ergibt nach Lindemann

$$L = \frac{\pi}{2}\xi a.$$

Das Beispiel ist insofern unglücklich gewählt, als $L$ ohne weiteres gar keinen Sinn hat, da das Integral nach $s$ in $L$ für $x = \xi$ von $\pi/2$ auf 0 springt. Es müßte also diese Stelle ausdrücklich von der Integration ausgeschlossen werden.

Herr Lindemann bemerkt pag. 325 oben: Nur für $a = -1$ geben beide Integrale denselben Wert. (Wir können hinzufügen: Nur in diesem Falle wird auch der Sprung des Integrals nach $s$ durch den Faktor $x + a\xi = x - \xi$ aufgehoben und der nach $\xi$ zu differenzierende Ausdruck in $x$ und $\xi$ einzeln stetig.) Gerade dieser Fall liegt aber an der beanstandeten Stelle meiner Elektronenarbeit vor. Handelt es sich doch hier um die Größe $\iiint \frac{S}{R}\, dx\, dy\, dz$ (vgl. pag. 323 bei Lindemann), welche ebenso wie $S$ eine stetige Funktion der Variabeln $\xi$, nach der differenziert wird, sowie der Variabeln $\tau$ ist, nach der integriert wird (vgl. den Schluß der vorangehenden Nummer). Das Lindemannsche Beispiel spricht also nicht gegen, sondern für mich.

Durch die Stetigkeit von $S$ erledigt sich auch der Einwand, den Herr Lindemann durch die letzte Formel von pag. 323 begründet. Hier wird das Gebiet, in dem $S$ verschwindet,

unterschieden von demjenigen Gebiet (Volumenelement $d'\omega$), in dem $S$ nicht verschwindet. Wegen der Stetigkeit verschwindet aber $S$ auch noch auf der Begrenzung dieses Gebietes. Differenzieren wir nun $\iiint \frac{S}{R} d'\omega$, wie es der erste Term der [ ] in der fraglichen Gleichung verlangt, nach $\xi$ in den Grenzen des Raumintegrals, so ist nach der Differentiation derjenige Wert von $S$ einzutragen, der auf der Begrenzung statthat, d. h. eben der Wert $S = 0$. Damit verschwindet aber der soeben genannte Term, der den Unterschied der von Lindemann mit $K$ und $K'$ bezeichneten Integrale bedingen würde.

### 7. Über die Berechnung des bestimmten Integrales $\Omega$.

Das Lindemannsche Integral $\Omega$, bei mir mit $(B)$ bezeichnet,[1]) ist folgendermaßen definiert:

$$\Omega = \int_0^a S\beta \, d\beta.$$

Für $S$ kommen wieder die drei Werte $S_1, S_2, S_3$ in Betracht, in denen wir, um an die Lindemannschen Bezeichnungen anzuknüpfen, $c\tau$ durch $\beta$ und $r$ durch $\gamma$ ersetzen wollen.

Es sind hier sowohl nach Lindemann wie nach meiner früheren Arbeit zunächst drei Fälle zu unterscheiden, welche ich durch die folgenden drei Figuren verdeutliche:

1. $\gamma > 2a$ ·    $0 \quad a \quad 2a \quad \gamma$

2. $2a > \gamma > a$ ·    $0 \quad (\gamma - a) \quad a \quad \gamma \quad 2a$

3. $a > \gamma$ ·    $0 \quad (a - \gamma) \quad \gamma \quad a \quad 2a$

1. Da $\beta$ bei der Integration auf die Werte $0 < \beta < a$ beschränkt ist, ist in diesem ersten Falle dauernd $\gamma > a + \beta$,

[1]) Vgl. meine Note II in den Göttinger Nachrichten, pag. 390.

das Dreieck $(a, \beta, \gamma)$ also unmöglich. Da außerdem $a$ nicht die größte dieser drei Zahlen darstellt, so gilt für das ganze Integrationsgebiet $S = S_3 = 0$ und es wird

$$\Omega = 0 \tag{7}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (232) von Herrn Lindemann.

2. Für diejenigen Werte von $\beta$, welche kleiner als $\gamma - a$ sind, ist das Dreieck $(a, \beta, \gamma)$ wieder unmöglich und $S = S_3 = 0$. Es sind also bei der Integration nur die Werte $\gamma - a < \beta < a$ zu berücksichtigen, die in der Figur durch eine verstärkte Linie markiert sind. Hier gilt, da das Dreieck $(a, \beta, \gamma)$ möglich wird, $S = S_1$ und es wird

$$\Omega = \frac{\pi}{8} \int\limits_{\gamma - a}^{a} (a^2 - (\beta - \gamma)^2)\, \beta\, d\beta. \tag{8}$$

Herr Lindemann schreibt (s. seine Gl. (233)) in der unteren Grenze $\gamma/2$ statt $\gamma - a$. Dies ist nach Fig. 2 offenbar ein Irrtum. Aus (8) ergibt sich der von mir früher gefundene Wert

$$\Omega = \frac{\pi}{8} \left(\frac{4}{3} a^3 \gamma - a^2 \gamma^2 + \frac{\gamma^4}{12}\right) \tag{9}$$

statt des von Lindemann angegebenen:[1])

$$\Omega = \frac{\pi}{8} \left(\frac{a^4}{4} + \frac{2}{3} a^3 \gamma - \frac{5}{8} a^2 \gamma^2 - \frac{5}{64} \gamma^4\right). \tag{10}$$

Eine Probe auf die Richtigkeit meines und die Unrichtigkeit des Lindemannschen Ausdruckes liefert der besondere Wert $\gamma = 2a$, der die Grenze des Falles 1 und 2 bildet.

Hierfür ergibt meine Formel (9) den Wert

$$\Omega = \frac{\pi}{8} a^4 \left(\frac{8}{3} - 4 + \frac{4}{3}\right) = 0,$$

der sich stetig an (7) anschließt, die Lindemannsche Formel (10) dagegen

[1]) Herr Lindemann schreibt versehentlich $+\frac{5}{64}\gamma^4$ statt $-\frac{5}{64}\gamma^4$.

$$\Omega = \frac{\pi a^4}{8}\left(\frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{5}{2} - \frac{5}{4}\right) = -\frac{13\pi a^4}{48};$$

dies ist unmöglich, da $\Omega$ sicher stetig von $\gamma$ abhängt.

3. Im dritten Falle ist das Dreieck $(a, \beta, \gamma)$ unmöglich, solange $\beta < a - \gamma$. Da aber jetzt $a$ größer als $\beta$ und $\gamma$, gilt nicht mehr $S = S_3 = 0$, sondern $S = S_2 = \frac{\pi}{2}\beta\gamma$. Dieses Intervall ist in Fig. 3 durch einen Doppelstrich hervorgehoben. In dem Rest des Integrationsintervalles $a - \gamma < \beta < a$, der wieder durch einen einfachen Strich markiert ist, wird die Dreiecksbildung möglich und daher $S = S_1$. Der Wert von $\Omega$ lautet daher jetzt:

$$\Omega = \frac{\pi}{2}\int_0^{a-\gamma} \beta^2 \gamma \, d\beta + \frac{\pi}{8}\int_{a-\gamma}^{a} (a^2 - (\beta - \gamma)^2)\, \beta \, d\beta. \tag{11}$$

Herr Lindemann gibt statt dessen den folgenden Wert an:

$$\begin{aligned} \Omega = {} & \frac{\pi}{8}\int_{\gamma/2}^{\gamma} (a^2 - (\beta - \gamma)^2)\, \beta \, d\beta + \frac{\pi}{2}\int_{\gamma}^{a-\gamma} \beta^2 \gamma \, d\beta \\ & + \frac{\pi}{8}\int_{a-\gamma}^{a} (a^2 - (\beta - \gamma)^2)\, \beta \, d\beta. \end{aligned} \tag{12}$$

Der Vergleich mit Fig. 3 zeigt unmittelbar, daß hier das erste Integral fortfallen muß, und daß im zweiten die untere Grenze durch 0 zu ersetzen ist.

Die Ausrechnung von (11) liefert, wie ich früher angegeben habe, wieder den Wert (9), so daß insbesondere für die Grenze zwischen 2 und 3, d. h. für den Wert $\gamma = a$, wieder ein stetiger Anschluß der beiden Intervalle aneinander stattfindet.

Die Ausrechnung von (12) ist bei Herrn Lindemann nicht ganz richtig durchgeführt, indem das erste Integral nicht

$$\frac{\pi}{8}\,\frac{67}{192}\,\gamma^4,$$

sondern

$$\frac{\pi}{8}\left(\frac{3\,a^2\gamma^2}{8}-\frac{5}{192}\,\gamma^4\right)$$

liefert. Man überzeugt sich sehr leicht, daß auch nach Berichtigung des letztgenannten Versehens der Lindemannsche Wert (12) von $\Omega$ die Probe auf seinen stetigen Anschluß an das Intervall 2 nicht aushält.

Ich will nur noch auf die Bemerkung von pag. 328 eingehen, daß bei der vorstehend erörterten Berechnung von $\Omega$ in dem Intervall $0 < \beta < \gamma/2$ nicht die Gl. (40) von Lindemann (d. h. $S = S_2$), sondern die Gl. (42) (d. h. $S = 0$) anzuwenden sei. Letzteres steht in direktem Gegensatz zu den zusammenfassenden Bemerkungen Lindemanns auf pag. 248, welche sich mit der oben angegebenen Wertbestimmung von pag. 157 decken. Denn wenn $\beta < \gamma/2$ und wie im vorliegenden Falle 3, $\gamma < a$ ist, so bedeutet $a$ jedenfalls die größte der drei Zahlen $a, \beta, \gamma$ während nach den Lindemannschen Gleichungen (42) und (45) $S = 0$ nur statthat, wenn $a$ (oder wie es pag. 248 heißt $a$) nicht die größte jener drei Zahlen ist.

Hiernach werden auch die folgenden Einwände, die sich auf meine Berechnung des an $\Omega$ anschließenden Integrales $Q$ beziehen, gegenstandslos.

### 8. Über meine vereinfachte Behandlung der Elektronenbewegung in den Sitzungsberichten der Amsterdamer Akademie.

Zu dieser bemerkt Herr Lindemann: „Weshalb nach $\tau$ zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ integriert wird, geht aus der a. a. O. gegebenen neueren Darstellung nicht hervor.“ Demgegenüber möchte ich hervorheben: Im Anschluß an die Greenschen Methoden hatte ich eine aus der Differentialgleichung des Problems folgende Identität über den unendlichen Raum (mit Ausschluß der Unstetigkeitsstelle) zu erstrecken; ich hatte sodann, im Anschluß an Kirchhoffs Behandlung der optischen

Probleme, eine Integration nach der Zeit hinzuzufügen. Die Grenzen dieser Integration können an sich beliebig festgesetzt werden, ohne daß die Identität zu gelten aufhört. Um aber zu einem einfachen Ergebnis und zur Ableitung übersichtlicher physikalischer Tatsachen zu gelangen, wird man diese Grenzen passend zu wählen haben. So gut wie die Raumintegration über den unendlichen Raum, darf die Zeitintegration über die unendliche Zeitskala, d. h. in der Variabeln $\tau$ über die ganze Vergangenheit von $\tau = 0$ bis $\tau = \infty$ erstreckt werden. Einer Rechtfertigung für dieses Verfahren bedarf es nicht. Wollte man die Zeitintegration nur von $\tau = 0$ bis $\tau = t$ erstrecken, was zwar möglich, aber unvorteilhaft wäre, so würden von der oberen Grenze herrührende Zusatzglieder auftreten, welche die physikalische Bedeutung des Ergebnisses verschleiern und die beabsichtigte explizite Berechnung von $\varphi$ unmöglich machen würden.

Zusammenfassend glaube ich versichern zu können, daß die Elektronentheorie durch die Lindemannsche Untersuchung in keiner Weise erschüttert ist.

---



Sitzung der math.-phys. Klasse vom 6. Juli 1907.

1. Herr Richard Hertwig hält einen Vortrag über seine Untersuchungen über das Sexualitäts-Problem. Dieselben werden anderweit veröffentlicht.

Derselbe berichtet über experimentelle, an Froscheiern angestellte Untersuchungen. Bei denselben hat sich herausgestellt, daß Froschlarven, welche aus überreifen Eiern gezüchtet worden waren, in der Intensität des Wachstumes und der Schnelligkeit der Entwickelung normal entwickelten Larven weit überlegen sind. Auch ist das Sexualitätsverhältnis bei Eiern von verschiedener Reife ein verschiedenes. Ferner hat es sich herausgestellt, daß der Samen auf die Wachstumsweise der Eier und das Geschlecht der aus ihnen hervorgehenden Larven einen großen Einfluß ausübt.

2. Herr Ferdinand Lindemann überreicht einen Aufsatz von Herrn Dr. Franz Thalreiter: „Flächen eines dreifach unendlichen linearen Systems, welche mit einer gegebenen algebraischen Raumkurve eine Berührung 3. Ordnung eingehen.“

3. Herr Ferdinand Lindemann bringt den für die Denkschriften bestimmten II. Teil seiner Untersuchung: „Über die Bewegung der Elektronen (stationäre Bewegungen).“

Die im ersten Teil gegebenen Entwickelungen führten zu Resultaten, die von den bisher angenommenen wesentlich ver-

schieden sind. Die von Abraham und anderen aufgestellten Formeln nämlich gehen von der Vorstellung aus, daß das elektromagnetische Feld sich nach unendlich langer Zeit einem stationären (von der Zeit unabhängigen) Zustande nähert, und daß es gestattet ist, aus diesem Zustande des Feldes durch Integration über die Körperelemente auf die resultierenden Kräfte zu schließen. Wenn man aber Grenzwerte für eine unendlich lange Zeit untersuchen will, so sollte man erst die ganze Betrachtung (auch die Integrationen) für eine endliche Zeit ausführen, und dann den Grenzprozeß vornehmen. In vielen Fällen ist es allerdings gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die verschiedenen Operationen vornimmt; bei dem vorliegendem Probleme aber tritt die Notwendigkeit heran, die vorgeschriebene Reihenfolge genau einzuhalten; denn dadurch ergeben sich eben die von den früheren Resultaten abweichenden Gleichungen. Die Rechnungen des Verfassers wurden durch Herrn Schott in Bonn nachgeprüft, und derselbe hat gefunden, daß bei Auswertung der auf das skalare Potential bezüglichen Formeln ein rechnerisches Versehen vorgekommen ist. Dadurch werden zwar nicht die allgemeinen Überlegungen, aber einzelne Resultate beeinflußt. Insbesondere ergibt sich nunmehr, daß bei gleichförmiger Bewegung die vom Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft nach Ablauf einer gewissen Zeit genau gleich Null wird, wie es sonst angegeben wurde. Aber das Resultat wird dadurch erreicht, daß zwei Integrale, die wesentlich von Null verschieden sind, sich gegenseitig aufheben, während nach den bisherigen Theorien jedes einzelne dieser Integrale (d. h. die Wirkung des skalaren und diejenige des Vektor-Potentials) je für sich gleich Null sein müßte. Der Verfasser findet für eine allerdings kurze Anfangszeit eine Kraft, die für kleine Geschwindigkeiten sehr beträchtlich werden kann, so daß man sich kaum vorzustellen vermag, wie eine stationäre kräftefreie Bewegung je zustande kommen könnte. Hierin liegt auch eine wesentliche Schwierigkeit für die versuchte elektromagnetische Begründung der materiellen Mechanik. Auf die von Sommerfeld in einer Arbeit,

welche in der letzten Sitzung der Akademie vorgelegt wurde, erhobenen Einwände wird in einer besonderen (unten auf S. 177 folgenden) Abhandlung eingegangen, in der diese Einwände widerlegt werden.

4. Herr Wilhelm Konrad Röntgen legte vor eine Experimentaluntersuchung des Assistenten am Physikalischen Institut der Universität Dr. Peter Paul Koch: „Über die Abhängigkeit des Verhältnisses der spezifischen Wärme $\frac{Cp}{Cv} = k$ in trockener kohlensäurefreier atmosphärischer Luft von Druck und Temperatur.“

Die mit bedeutenden experimentellen Hilfsmitteln unternommene, auf möglichste Präzision angelegte Untersuchung bestimmt in ihrem ersten Hauptteil die Schallgeschwindigkeit in Luft bei Drucken bis 200 Atmosphären und den Temperaturen $0^0$ und $-79^0$ C., im zweiten Hauptteil die Isothermen der Luft unter denselben Bedingungen von Druck und Temperatur. Die Verknüpfung der Resultate beider Hauptteile zeigt, daß das Verhältnis der spezifischen Wärmen für $-79^0$ sin Maximum im Werte von 2.44 erreicht, bei rund 150 Atmosphären Druck, während für $0^0$ bei Drucken bis 200 Atmosphären ein Maximum noch nicht erreicht ist. Diese Ergebnisse stimmen qualitativ gut überein mit dem, was bisher von den thermodynamischen Eigenschaften reeller Gase bekannt ist.

5. Herr Richard Hertwig legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Karl Parrot: „Beiträge zur Ornithologie Sumatras und der Insel Bangka“ vor. Dieselbe ist für die Denkschriften bestimmt.

Die Arbeit behandelt die Vögel, welche von den Herren Hofrat Hagen und Hofrat Martin auf den Sunda-Inseln gesammelt und der Staatssammlung geschenkt worden sind, gibt zugleich aber auch eine vergleichende Untersuchung der schon vor längerer Zeit von der Staatssammlung erworbenen suma-

tranischen Vögel, so daß im ganzen 154 Arten Berücksichtigung finden konnten. Der Verfasser gelangt hinsichtlich der Zusammensetzung der Avifauna welche in engem Konnex mit der Entstehung des malayischen Archipels steht, zu interessanten und zum Teil neuen Resultaten. Die Beziehungen zu den Nachbarinseln Java, Borneo etc. werden ausführlich abgehandelt und hier auf die bezeichnende Tatsache hingewiesen, daß die geologisch anders geartete Insel Bangka manche Formen aufweist, die nur auf Borneo heimisch sind, während dieselben dem unmittelbar benachbarten Sumatra fehlen. Eine Anzahl Vogelformen, die bisher noch nicht genügend unterschieden worden waren, werden neu benannt, darunter namentlich solche aus dem Tiefland von Deli, das durch einen besonderen Charakter seiner Vogelwelt — es ist eine Neigung zu zwerghaftem Wuchs bei vielen Individuen unverkennbar — ausgezeichnet erscheint. Auch aus Bangka werden mehrere neue Formen beschrieben.

# Zur Elektronentheorie.

Von **F. Lindemann.**

(*Eingelaufen 6. August.*)

In einer Arbeit des Herrn Sommerfeld, welche Herr Röntgen in der Sitzung vom 8. Juni der mathematisch-physikalischen Klasse vorlegte (vgl. oben S. 155 ff.), sind verschiedene Einwände gegen meine Behandlung der Elektronentheorie[1]) erhoben worden, indem der Verfasser die von mir gegen seine Darstellung der Theorie geltend gemachten Bedenken zu entkräften sucht. Im folgenden werden diese Einwände des Herrn Sommerfeld als unbegründet nachgewiesen; zugleich nehme ich Gelegenheit, einige Bedenken, die ich in § 16 meiner Abhandlung ausgesprochen hatte, ausführlicher zu begründen, als ich es damals für nötig hielt.

In erster Linie kommt es auf die unten in § 8 gegebenen Ausführungen an, in denen gezeigt wird, daß Herr Sommerfeld seinen Rechnungen eine Potentialfunktion zu Grunde legt, die im Innern des bewegten Elektrons der geforderten partiellen Differentialgleichung nicht genügt. Es dürfte demnach eigentlich überflüssig sein, über die anderen Punkte zu diskutieren; doch ist dies immerhin nützlich, um Mißverständnissen zu begegnen.

Nur in einem Punkte kann ich Herrn Sommerfeld rechtgeben, nämlich in Betreff der Auswertung eines bestimmten

---

[1]) Über die Bewegung der Elektronen, I. Teil, die translatorische Bewegung, Abhandlungen der K. Bayer. Akad. d. Wiss., II. Kl., Bd. 23, 1907; eine Fortsetzung dieser Abhandlung ist gegenwärtig im Drucke

Integrals (vgl. unten § 7); dieses Integral wird indessen in meiner Abhandlung überhaupt nicht benutzt; die Frage der Auswertung ist daher eine nebensächliche; es wird von Herrn Sommerfeld gezeigt, daß an dieser Stelle, wo ich einen Irrtum in seiner Arbeit vermutete, ein solcher nicht vorliegt.

Die Anordnung des Stoffes entspricht genau derjenigen, welche Herr Sommerfeld seinem Aufsatz zu Grunde legt; und dementsprechend sind die Überschriften der Paragraphen gewählt.

## § 1. Berechnung des skalaren Potentials.

Zuerst hebt Herr Sommerfeld hervor, daß die von mir (zur Erleichterung der mathematischen Entwicklung) gestellten Anfangsbedingungen $\varphi = 0$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ für $t = 0$ den physikalischen Bedingungen des Problems nicht entsprechen; dieser Einwurf ist gesperrt gedruckt, so daß ihm also besonderes Gewicht beigelegt wird. Trotzdem ist er nur eine Wiederholung dessen, was ich selbst gesagt habe: ich habe selbst betont, daß der von mir verlangte Anfangszustand den Bedingungen der Elektronentheorie nicht entspricht, vgl. den Schluß von § 3 und den Anfang von § 15. Wenn also für $t = 0$ das elektrostatische Potential resultieren soll, und wenn Herr Sommerfeld die betreffenden Formeln meiner Abhandlung zur Kontrolle benützen wollte, so hätte er ausschließlich die von § 15[1]) und nicht die von § 3 anwenden müssen (vgl. unten § 2). Daß letztere den Wert Null geben, entspricht der von mir gestellten Anfangsbedingung und ist höchstens eine Kontrolle für die Richtigkeit der Lösung, nicht gegen dieselbe. Überhaupt kann man eine Unrichtigkeit nicht durch irgendwelche angebliche Konsequenzen nachweisen, sondern nur durch direkte Angabe darüber, wo der Fehler der mathematischen Entwicklung liegt, wie ich es für die Sommerfeldschen Formeln in § 16 meiner Arbeit getan habe.

---

[1]) Diese sind inzwischen in der oben erwähnten Fortsetzung meiner Abhandlung weiter entwickelt.

Nach der Darstellung des Herrn Sommerfeld könnte man allerdings glauben, daß ich selbst behauptet hätte, meine in Gleichung (34) gegebene Lösung

$$(1) \qquad \varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c}{2\,\pi^2\,a^3}\int_0^t \frac{S}{R}\,d\tau$$

müsse für $t = 0$ in das elektrostatische Potential übergehen; er zitiert dafür einen Satz aus dem Beginne meiner Arbeit, wo die Differentialgleichungen für die Potentiale $\varphi$ und $\mathfrak{A}$ angegeben werden:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} - c^2\,\Delta^2\,\varphi &= c^2\,\varrho, \\ \ddot{\mathfrak{A}}_x - c^2\,\Delta^2\,\mathfrak{A}_x &= \varrho\,c\,\mathfrak{v}_x, \\ \ddot{\mathfrak{A}}_y - c^2\,\Delta^2\,\mathfrak{A}_y &= \varrho\,c\,\mathfrak{v}_y, \\ \ddot{\mathfrak{A}}_z - c^2\,\Delta^2\,\mathfrak{A}_z &= \varrho\,c\,\mathfrak{v}_z. \end{aligned}$$

Hier fügte ich hinzu: „In ruhendem Zustande geht das skalare Potential $\varphi$ in das elektrostatische Potential über"; das gilt für alle Anfangsbedingungen, denn diese Bemerkung bezieht sich nur auf die Form der Differentialgleichung, da in diesem Stadium der Untersuchung von etwas anderem noch gar nicht die Rede war. Der weitere Zusatz „das Vectorpotential $\mathfrak{A}$ geht in das magnetische Potential über", den Herr Sommerfeld beanstandet, ist allerdings ungeschickt; er soll sich auch nur auf die Form der Differentialgleichung beziehen und lautet besser: „das Vectorpotential $\mathfrak{A}$ bezieht sich auf die durch Bewegung des elektrischen Teilchens erzeugten magnetischen Kräfte."

Bei jedem Probleme, das mathematische Schwierigkeiten bietet, ist es nicht nur erlaubt, sondern notwendig, zunächst solche Beschränkungen zu machen, daß die mathematische Behandlung vereinfacht wird, gleichgültig ob man dabei die ursprünglichen physikalischen Bedingungen verläßt oder nicht, wenn man nur in der Lage ist, das mathematisch einfachere Problem nachträglich als Grundlage für das ursprüngliche physikalische Problem zu benützen. Wie letzteres aber zu geschehen hat, habe ich in § 15 meiner Abhandlung (und, für besondere Fälle, in der demnächst erscheinenden) Fortsetzung ausführlich gezeigt.

## § 2. Die ergänzende Betrachtung über den Anfangszustand in § 15 meiner Arbeit.

Herr Sommerfeld behauptet: „die folgenden ergänzenden Betrachtungen verfehlen nun aber ihr Ziel (nämlich das bisher behandelte Problem den physikalischen Bedingungen anzupassen), wie ich der Kürze halber sogleich an dem Schlußergebnis zeigen will“.

Es handelt sich um das Beispiel der Bewegung mit konstanter Unterlichtgeschwindigkeit $v$; hier gilt nach meinen Entwicklungen die Formel:

$$\varphi = \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3} \int_0^{t+t_0} \frac{S}{R} d\tau, \tag{2}$$

wenn:

$$t_0 = \frac{2a}{c-v}$$

gesetzt wird, indem $t_0$ nach meinen Angaben (a. a. O. S. 311) so zu bestimmen ist, „daß die vor Beginn der Bewegung vom Elektron ausgehenden Kraftwirkungen volle Berücksichtigung finden.“ Diese Wirkungen sind elektrostatischer Natur, und somit folgert Herr Sommerfeld, daß der Ausdruck (2) für $t = 0$ in allen Punkten des Raumes in das elektrostatische Potential übergehen müsse; diese Folgerung ist unrichtig; der Ausdruck (2) soll das Potential $\varphi$ zufolge seiner Ableitung in denjenigen Punkten des Raumes darstellen, in welchen sich das Elektron zurzeit befindet; denn nur so ist die Größe $t_0$ von mir bestimmt. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich aber das Elektron in der Ruhelage; also nur für $R < a$ (wenn $R$ die Entfernung eines Punktes im Innern des Elektrons von dem Punkte bezeichnet, wo sich zur Zeit $t = 0$ der Mittelpunkt des Elektrons befand) muß die Funktion $\varphi$ nach meiner Theorie mit dem bekannten elektrostatischen Potentiale übereinstimmen; welche Werte sie für $R > a$, $t = 0$ hat, ist für meine Theorie (und für das gestellte physikalische Problem) ganz gleichgültig.

Um nun den fraglichen Wert für $R < a$ zu berechnen, hat man die Gleichung (52b) in § 6 meiner Arbeit anzuwenden, in der:

$$\tau' = \frac{a - R}{c}, \quad \tau'' = \frac{a + R}{c} \left( < t_0 = \frac{2a}{c - v} \right)$$

zu wählen ist; dann wird:

$$\varphi = \frac{3 \varepsilon c^2}{4 \pi a^3} \int_0^{\tau'} \tau \, d\tau + \frac{3 \varepsilon c}{16 \pi a^3 R} \int_{\tau'}^{\tau''} [a^2 - (c\tau - R)^2] \, d\tau$$

$$= \frac{\varepsilon}{8 \pi a^3} (3a^2 - R^2);$$

und dies ist der bekannte Wert des Potentials der Kugel auf einen innern Punkt.

Für einen äußern Punkt muß meine Formel noch den üblichen Wert für alle diejenigen Punkte ergeben, bis zu welchen sich die von den Punkten des ruhenden Elektrons ausgehende elektrische Erregung im Laufe der Zeit $t_0$ hat fortpflanzen können, d. h. für alle Punkte im Innern einer Kugel, deren Radius $R_0$ durch die Gleichung:

$$a + R_0 = c t_0 = \frac{2ac}{c - v}$$

bestimmt wird; es ist also:

$$R_0 = \frac{c + v}{c - v} \cdot a \cdot$$

Für die Punkte im Innern dieser Kugel ergibt aber meine Formel, wie Herr Sommerfeld berechnet (vgl. oben S. 160), in der Tat den richtigen Wert:

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{4 \pi R}.$$

Um diese Kugel legt sich eine Schale, innerhalb welcher nur ein Teil der vom Elektron ausgegangenen Wirkung zur Geltung kommt; man hat um einen Punkt dieser Schale mit dem Radius $R_0$ eine Kugel zu beschreiben, welche aus der

ruhenden Kugel des Elektrons ein Gebiet ausschneidet. Die Wirkung dieses Gebietes wird durch meine Formel, d. h. hier durch den Potentialwert (vgl. Sommerfeld oben S. 160):

$$\varphi = \frac{3\varepsilon c}{16\pi a^3 R}\int_{\tau'''}^{t_0}[a^2-(c\tau - R)^2]\,d\tau, \quad \text{wo } \tau''' = \frac{R-a}{c},$$

dargestellt. Endlich außerhalb dieser Schale, d. h. außerhalb einer Kugel mit dem Radius:

$$R = \left(2+\frac{c+v}{c-v}\right)a$$

muß $\varphi = 0$ werden, wie es a. a. O. berechnet ist; denn bis zu einem solchen Punkte hat sich von keiner Stelle im Inneren des Elektrons aus die elektrische Wirkung während der Zeit $t_0$ verbreiten können. Bei richtiger Anwendung gibt daher die von mir aufgestellte Formel auch richtige Resultate. Die Bemerkung des Herrn Sommerfeld, nach welcher meine „in Rede stehenden ergänzenden Betrachtungen bei richtiger Durchführung auf seine Formeln hätten führen müssen, in der vorliegenden Fassung aber in sich widersprechend sind", entbehrt hiernach der Begründung.

In einer Note unter dem Texte sagt Herr Sommerfeld ferner: „Daß die Größe $t_0$ und damit die Potentialverteilung zur Zeit $t = 0$ von dem Charakter der nachfolgenden Bewegung abhängen soll, ist an sich kaum verständlich." Hierbei hat derselbe nicht beachtet, wie die Variable $\tau$ (die er in seiner Arbeit doch in ganz gleicher Weise benutzt) definiert ist; sie mißt die Zeit von der jeweiligen Lage des Elektrons aus nach rückwärts. Die Zeit von $\tau = t$ bis $\tau = t + t_0$ bezieht sich also auf die vor der Zeit $t = 0$ entstandene Potentialverteilung; für den Zeitpunkt $t = 0$ gibt also das Intervall von $\tau = 0$ bis $\tau = t_0$ die durch die Ruhelage vor Beginn der Bewegung bedingte Potentialverteilung; von einem Einflusse der nachfolgenden Bewegung kann bei meinen Formeln keine Rede sein.

## § 3. Zahlenbeispiel.

Infolge eines Versehens bei Auswertung des von mir mit $\Phi_2$ bezeichneten Integrales sind die entsprechenden Formeln in der Weise zu revidieren, wie es im zweiten Teile meiner Abhandlung inzwischen geschehen ist (vgl. oben S. 171), was ich in der Junisitzung (in der Herr Röntgen die Sommerfeldsche Arbeit vorlegte) der Akademie bereits mitteilte; das von Herrn Sommerfeld berechnete Zahlenbeispiel sagt also nichts gegen die Richtigkeit meiner Methode.

## § 4. Die Ausrechnung von $\varphi$ in § 6 meiner Arbeit.

Herr Sommerfeld stellt sich die Aufgabe, das oben in (1) gegebene Potential $\varphi$ für den Fall zu berechnen, daß das Elektron auch nach der Zeit $t = 0$ dauernd in Ruhe bleibt, und zwar auf Grund meiner Formeln. Hier ist $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, also:

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

und $R$ unabhängig von $\tau$; es wird also nach (1):

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon\, c}{2\,\pi^2\, a^2\, R} \int_0^t S\, d\,\tau\,,$$

wo $S$ ein Integral bedeutet, welches den folgenden Bedingungen genügt; es ist:

(3) $S = \frac{\pi}{8}\left[a^2 - (c\,\tau - R)^2\right]$, wenn sich aus den Strecken $a$, $c\,\tau$ und $R$ ein Dreieck bilden läßt,

(4) $S = \frac{\pi}{2}\, c\,\tau\, R$, wenn ein solches Dreieck nicht möglich ist, weil $a > c\,\tau + R$,

(5) $S = 0$, wenn das Dreieck unmöglich ist, weil $a < c\,t - R$ bzw. $a < R - c\,\tau$.

Herr Sommerfeld beschränkt seine Rechnung ausdrücklich auf das Äußere der Kugel $R = a$ (also $R > a$).

Nach Seite 253 meiner Arbeit haben wir zunächst die folgenden beiden Fälle zu unterscheiden:

$$\text{I. } ct < a, \qquad \text{II. } ct > a.$$

Im Falle I. ist auch stets $c\tau < a$; ferner wird $R > a$ vorausgesetzt; wir haben also das Zeitintervall in zwei Teile zu zerlegen:

$$1.\ c\tau < R - a$$
$$2.\ c\tau > R - a;$$

im ersteren Intervalle ist $S = 0$ nach (5), im anderen ist $S$ durch (3) bestimmt; und wir erhalten:

$$\varphi = 0 \text{ für } ct < R - a$$

$$\varphi = \frac{3\varepsilon c}{16\pi a^2 R} \int_{(R-a)/c}^{t} [a^2 - (c\tau - R)^2]\, d\tau \text{ für } R - a < ct < a.$$

Das sind aber ganz dieselben Formeln, welche Herr Sommerfeld für das Intervall $ct < a$ als die richtigen angibt. Aus meinen Formeln leitet er unrichtige Resultate ab, indem er sogleich für kleine Werte von $\tau$ meine Gleichung (53) anwendet, während dieselbe, wie ich a. a. O. ausdrücklich bemerkt habe, nur für $c\tau > a$ in Betracht kommt. Ebenso geben meine Formeln auch im folgenden das Richtige; und die Behauptung des Herrn Sommerfeld, daß „meine Formeln (52) und (53), auf denen alles weitere beruht, irrig sind“, ist unzutreffend. Sie geben selbstredend etwas Unrichtiges, wenn man sie auf Fälle anwendet, für die sie ausdrücklich nicht bestimmt sind.

Mit der Angabe, daß „auf diesen Formeln alles weitere beruhe“, befindet sich Herr Sommerfeld überdies im Irrtume; der Inhalt von § 6 könnte, abgesehen von der ersten Seite (nämlich S. 253), ganz gestrichen werden, ohne am folgenden etwas zu ändern; er zeigt nur und soll nur zeigen, daß man bei dieser direkten Behandlung des Problems auf Schwierigkeiten stößt, und daß deshalb (vgl. den Schluß von § 6) ein anderer Weg eingeschlagen werden muß. Auch im folgenden

(vgl. S. 259) ist hervorgehoben worden, daß die in § 6 eingeführten Hülfsgrößen $\tau'$, $\tau''$, $\tau'''$ .... bei Ausführung der räumlichen Integrationen nicht weiter in Betracht kommen.

Selbstverständlich ist, daß die Bestimmung dieser Größen nicht alle möglichen Fälle einzeln umfaßt; das brauchte nicht besonders gesagt zu werden, denn wegen des Eingehens der willkürlichen Funktionen in die Rechnung wäre es ein unsinniges Unternehmen, alle Möglichkeiten erschöpfen zu wollen; es konnte sich nur darum handeln, ein im allgemeinen brauchbares Schema aufzustellen und daran die Methode zu erläutern, wie das im folgenden auch wiederholt hervorgehoben wurde (vgl. die Anmerkung auf S. 262 und den Schluß von § 7 sowie S. 284). Zu Beginn von § 6 formuliere ich überdies die zu behandelnde Aufgabe dahin, daß zu verfolgen ist, wie das Elektron allmählich sich von der Anfangslage (bzw. aus der jeweils kurz vorhergehenden Lage) befreit, um dann seine Bahn zu beschreiben. Für den Fall, daß überhaupt keine Bewegung eintritt, können daher die Größen $\tau'$, $\tau''$, .... keine Bedeutung haben; man kann den Wert von $\varphi$ aber stets aus den Formeln (3), (4) und (5) ganz elementar berechnen, wie es oben geschah.

## § 5. Differentiation nach der oberen Grenze.

In der Theorie des Vektorpotentiales kommt es unter anderem nach meinen Formeln auf die Berechnung des folgenden Integrales an:

$$\text{(6)} \qquad \iiint \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau) \frac{S}{R} \, d\tau \right\} dx\, dy\, dz.$$

Da Herr Sommerfeld überall die obere Grenze $t$ durch $\infty$ ersetzt (vgl. darüber unten § 8), so hätte bei ihm das Integral:

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} &\iiint \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \mathfrak{v}_x(t-\tau) \frac{S}{R} \, d\tau \right\} dx\, dy\, dz \\ &= \int_0^\infty d\tau \iiint \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S}{R} \mathfrak{v}_x(t-\tau) \right) dx\, dy\, dz \end{aligned}$$

berechnet werden sollen, wobei die Volum-Integration sich auf das ganze Innere des Elektrons bezieht. Statt dessen wird von ihm das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathfrak{v}_x(t-\tau)\iiint \frac{S}{R}\,dx\,dy\,dz\right]d\tau \tag{8}$$

ausgewertet. Mein Einwurf gegen dieses Verfahren gründet sich darauf, daß infolge der Werte von $S$, die oben in (3), (4) und (5) angegeben wurden, die oberen Grenzen des dreifachen Integrals Funktionen von $t$ sind, daß also Herr Sommerfeld diese Grenzen mit differentiert, während sie in dem ursprünglichen Ausdrucke (7) nicht differentiert werden sollten.

Herr Sommerfeld beruft sich darauf, daß $S$ eine stetige Funktion von $\tau$ sei, und daß infolgedessen die Differentiation der Grenzen keinen Beitrag liefere; das ist richtig, wenn es sich um Differentiation einer Summe von der Form:

$$\int_0^{\tau'} \mathfrak{v}\frac{S}{R}\,d\tau + \int_{\tau'}^{\tau''} \mathfrak{v}\frac{S}{R}\,d\tau + \cdots$$

handelt; und von dieser Bemerkung habe ich selbst Gebrauch gemacht (S. 269). Aber dadurch, daß der Ausdruck (6) durch (8) ersetzt wurde, ist die Sachlage eine ganz andere, und eine Übereinstimmung der aus beiden Ausdrücken durch Differentiation nach $t$ zu erhaltenen Resultate ist nicht mehr zu erwarten. Es kommt also darauf an, den Einfluß der vorgenommenen Vertauschungen von Differentiation und Integration zu untersuchen.

Bei Einführung von Polarkoordinaten $R$, $\Theta$, $\Psi$ wird die Integration nach dem Winkel $\Psi$ immer von 0 bis $2\pi$ ausgeführt; wir haben also nur noch mit Doppelintegralen zu tun. Es sei:

$$U = \int_0^{\Theta_1} d\,\Theta \int_b^{R_1} f(R,\Theta)\,d\,R,$$

wo $\Theta_1$ und $R_1$ Funktionen von $t$ sind:

$$\Theta_1 = \chi(t), \quad R_1 = \psi(\Theta, t),$$

während $b$ eine von $t$ unabhängige Konstante bedeutet. Die Variable $t$ soll auch in der Funktion $f$ neben $R$ und $\Theta$ vorkommen. Mit $\delta U$ möge der Ausdruck bezeichnet werden, der durch Differentiation der Grenzen allein entsteht; dann ist:

$$\delta U = \int_0^{\Theta_1} f(R_1, \Theta) \frac{\partial \psi}{\partial t} d\Theta + \int_b^{\psi(\Theta_1, t)} f(R, \Theta)\, dR \cdot \frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

Es entsteht also die Frage, ob diese Ausdrücke verschwinden. Wir müssen hier die einzelnen Fälle und Lagen durchgehen. Allerdings kommen diese bei Herrn Sommerfeld nicht vor, aber nur deshalb, weil er unter Voraussetzung der Vertauschbarkeit der betreffenden Operationen die Unterscheidung der Fälle umgehen kann.

### I. Unterlichtgeschwindigkeit.

Erste Lage, vgl. Figur 1. Hier ist in dem vertikal schraffierten Gebiete $S$ nach (3), in dem horizontal schraffierten Gebiete $S$ nach (4) zu berechnen. Die Integrationen erstrecken sich über geschlossene Gebiete; in ersterem ist:

$$\Theta_1 = \pi, \quad b = a - c\tau$$

und $R_1$ durch die Gleichung (99) meiner Abhandlung bestimmt, d. h. durch:

(9) $a^2 = R_1^2 + T^2 - 2 R_1 T \operatorname{cosin} \Theta,$

wo $T$ eine Funktion von $\tau$ und $t$ bedeutet. Wir haben also, da:

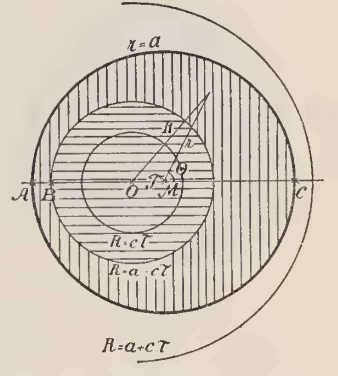


Fig. 1.

$$f = \frac{S}{R} \cdot R^2 \cdot \sin\Theta, \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0$$

zu setzen ist:

(10) $$\delta U_1 = \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi} [a^2 - (c\tau - R_1)^2] R_1 \frac{\partial R_1}{\partial t} \sin\Theta\, d\Theta.$$

In dem horizontal schraffierten Gebiete ist:

$$R_1 = a - c\tau, \quad b = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0,$$

also auch $\delta U_2 = 0$. Der Ausdruck:

$$\delta U = \delta U_1 + \delta U_2 = \delta U_1$$

verschwindet also keineswegs identisch, wie Herr Sommerfeld anzunehmen scheint. Nur im Falle konstanter Geschwindigkeit ist $T = v\tau$ von $t$ unabhängig und dann $\frac{\partial R_1}{\partial t} = 0$, also auch $\delta U = 0$.

Zweite Lage, vgl. Figur 3.[1]) In dem vertikal schraffierten Gebiete ist alles wie im vorigen Falle; nur muß jetzt $b = c\tau - a$ genommen werden. Es behält also $\delta U_1$ denselben Wert. Im horizontal schraffierten Gebiete ist $R < c\tau - a$, und somit $S = 0$ nach (5), also wieder $\delta U_2 = 0$.

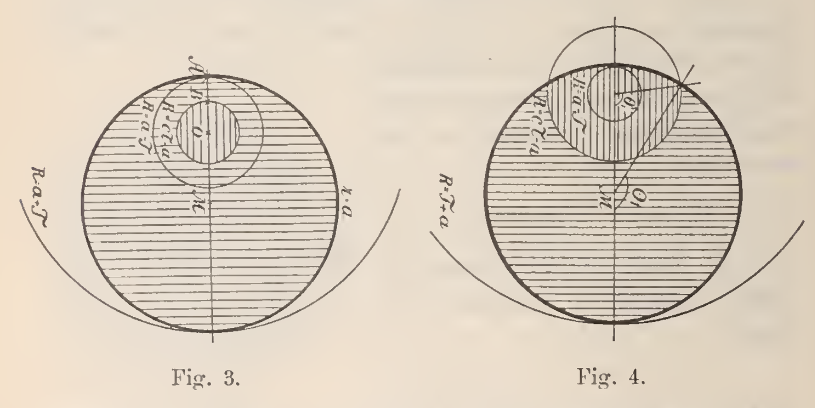


Fig. 3. Fig. 4.

Dritte Lage, vgl. Figur 4. Wir haben (vgl. S. 274 meiner Abhandlung) im vertikal schraffierten Gebiete:

$$U_1 = \int\limits_{c\tau - a}^{T+a} S\, R\, d\, R \int\limits_0^{\Theta_1} \sin\Theta\, d\,\Theta, \tag{11}$$

[1]) Die Nummern der Figuren sind dieselben wie in meiner größeren Abhandlung.

wo $\Theta_1$ durch die Gleichung (109), d. h. durch:

(11ª) $$2\,R\,T \operatorname{cosin} \Theta_1 = R^2 + T^2 - a^2$$

bestimmt wird, und es ist $S$ durch (3) bestimmt, also:

(12)
$$\delta U_1 = \frac{\pi}{8}\left[a^2 - (c\tau - T - a)^2\right](T+a)(1-\operatorname{cosin}\Theta_1)\frac{\partial T}{\partial t}$$
$$+ \frac{\pi}{8}\int\limits_{c\tau - a}^{T+a}\left[a^2 - (c\tau - R)^2\right] R \sin\Theta_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial t}\, d\,R,$$

wo im ersten Gliede die Klammer $(1 - \operatorname{cosin}\Theta_1)$ für $R = T + a$ gleich Null wird.

Im horizontal schraffierten Gebiete ist wieder $R < c\tau - a$, also $S = 0$ nach (5) und $\delta U_2 = 0$.

### II. Überlichtgeschwindigkeit.

Erste Lage, vgl. Figur 8. Im vertikal schraffierten Gebiete haben wir:

$$U_1 = \frac{\pi}{8}\int\limits_{a-c\tau}^{a+c\tau}\left[a^2 - (c\tau - R)^2\right] R\, d\,R \int\limits_0^{\Theta_0} \sin\Theta\, d\,\Theta,$$

wo nach Gleichung (145) meiner Abhandlung $\Theta_0$ durch die Gleichung:

(12ª) $$a^2 = T^2 + R^2 - 2\,R\,T \operatorname{cosin} \Theta_0$$

bestimmt ist. Wir erhalten also:

$$\delta U_1 = \frac{\pi}{8}\int\limits_{a-c\tau}^{a+c\tau}\left[a^2 - (c\tau - R)^2\right] R \sin\Theta_0 \frac{\partial\Theta_0}{\partial t}\, d\,R.$$

Das horizontal schraffierte Gebiet ist wieder so in zwei Teile zu zerlegen, wie es auf S. 286 meiner Abhandlung geschah; wir haben nach (4) in dem einen Teile:

$$U_2 = \frac{\pi c\tau}{2}\int\limits_0^{a-T} R^2\, d\,R \int\limits_0^{\pi} \sin\Theta\, d\,\Theta, \quad \delta U_2 = -\pi c\tau (a - T)^2 \frac{\partial T}{\partial t};$$

und im anderen Teile:

$$U_3 = \frac{\pi c \tau}{2} \int\limits_{a-T}^{a-c\tau} R^2 \, d R \int\limits_0^{\Theta_0} \sin \Theta \, d \Theta,$$

wo $\Theta_0$ wieder durch obige Gleichung bestimmt wird; also:

$$\delta U_3 = + \frac{\pi c \tau}{2} (a - T)^2 \frac{\partial T}{\partial t} (1 - \operatorname{cosin} \Theta_0)$$

$$+ \frac{\pi c \tau}{2} \int\limits_{a-T}^{a-c\tau} R^2 \sin \Theta_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial t} d R,$$

wo das erste Glied für $R = a - T$ nach (12ª) verschwindet.

Ein viertes, gesondert zu betrachtendes Gebiet endlich ist in Figur 8 nicht schraffiert; in ihm ist:

$R > a + c\tau$, und folglich nach (5): $U_4 = 0$, $\delta U_4 = 0$.

Zweite Lage: es bleiben die Formeln der ersten Lage gültig (vgl. S. 287 f. meiner Abhandlung, und Figur 9 daselbst S. 280).

Dritte Lage; vgl. Figur 11. Es ist im vertikal schraffierten Teile:

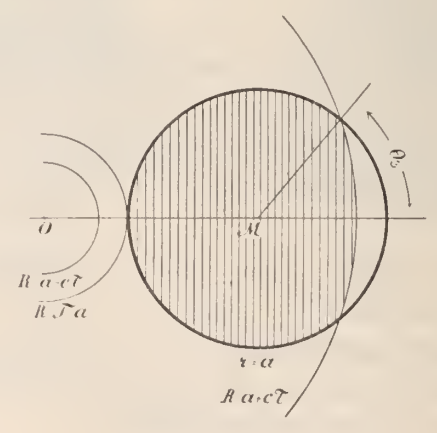



Fig. 11.

$$U = \frac{\pi}{8} \int\limits_{T-a}^{c\tau + a} [a^2 - (c\tau - R)^2] \, R \, d R \int\limits_0^{\Theta_0} \sin \Theta \, d \Theta,$$

also:

$$\delta U = \frac{\pi}{8}\left[a^2 - (c\tau - T + a)^2\right](T - a)(1 - \cos\Theta_0)\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$+ \frac{\pi}{8}\int\limits_{T-a}^{c\tau+a}\left[a^2 - (c\tau - R)^2\right] R \sin\Theta_0 \frac{\partial \Theta_0}{\partial t} d R,$$

wo wieder das erste Glied wegen ($12^a$) verschwindet.

In dem nicht schraffierten Gebiete dagegen ist wieder $U = 0$ und $\delta U = 0$.

Es geht hieraus hervor, daß die durch Differentiation der Grenzen entstehenden Terme keineswegs zu vernachlässigen sind. Es soll aber, gemäß (8), das Resultat noch nach $\tau$ integriert werden, nachdem vorher mit $\mathfrak{v}_x(t - \tau)$ multipliziert ist. Bei Unterlichtgeschwindigkeit wird die Grenze der ersten Lage gegen die zweite durch den Wert $\tau = a/c$ gegeben (vgl. S. 261 meiner Abhandlung); dieser ist unabhängig von $t$; die Grenze der zweiten Lage gegen die dritte ist durch $\tau = \tau^0$ gegeben; es ist also:

$$\int\limits_0^{\tau^0}\mathfrak{v}_x(t - \tau)\,\delta U_1\, d\tau + \int\limits_{\tau^0}\mathfrak{v}_x(t - \tau)\,\delta U_1'\, d\tau$$

zu bilden, wenn mit $\delta U_1$ der Ausdruck (10), mit $\delta U_1'$ der Ausdruck (12) bezeichnet wird. Es ist nicht abzusehen, weshalb die von $\delta U_1$ und $\delta U_1'$ herrührenden Beiträge herausfallen sollen. Anders ist es bei der nochmaligen Vertauschung von Differentiation und Integration; hier soll die Relation bestehen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^\infty \mathfrak{v}_x(t - \tau)\, U\, d\tau = \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathfrak{v}_x(t - \tau)\, U\right] d\tau.$$

Die konstante Grenze $a/c$ bietet offenbar kein Hindernis. Die Grenze zwischen der zweiten und dritten Lage ist durch den Wert $\tau^0$ gegeben, welcher durch die Gleichung ($73^b$), d. h. durch:

$$(13) \qquad c\tau + T = 2a$$

als Funktion von $t$ definiert war. Es fragt sich hier, ob der Wert:

$$(14) \qquad \frac{\partial \tau^0}{\partial t} \mathfrak{v}_x (t - \tau^0) \left[ U_1 - U_1' \right]_{\tau = \tau^0}$$

verschwindet, wo:

$$U_1 = \frac{\pi}{8} \int_0^\pi \sin \Theta \, d\Theta \int_{c\tau - a}^{R_1} [a^2 - (c\tau - R)^2] \, R \, dR$$

gesetzt (woraus durch Differenzieren der Ausdruck (10) entsteht), während $U_1'$ durch (11) gegeben wird:

$$U_1' = \frac{\pi}{8} \int_{c\tau - a}^{T + a} [a^2 - (c\tau - R)^2] \, R \, dR \int_0^{\Theta_1} \sin \Theta \, d\Theta.$$

Nun ist für $\tau = \tau^0$ nach (13) $c\tau - a = a - T$; ein Blick auf die Figuren 3 und 4 lehrt also, daß die Integrationsgebiete für die Integrale $U_1$ und $U_1'$ für $\tau = \tau^0$ zusammenfallen, und daß somit der Ausdruck (14) gleich Null wird.

Jetzt kommen aber noch die aus (10) und (12) entstehenden Glieder in Betracht, die im allgemeinen nicht verschwinden. Es ist also, da Analoges für die Grenzen zwischen den anderen Intervallen gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \mathfrak{v}_x (t - \tau) \, d\tau \iiint \frac{S}{R} \, dx \, dy \, dz$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathfrak{v}_x (t - \tau) \iiint \frac{S}{R} \, dx \, dy \, dz \right] d\tau$$

$$(15) \qquad = \int_0^\infty d\tau \iiint \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{S}{R} \mathfrak{v}_x (t - \tau) \right) dx \, dy \, dz + \int_0^{\tau^0} \mathfrak{v}_x (t - \tau) \, \delta U_1 \, d\tau$$

$$+ \int_{\tau^0}^{\tau_1} \mathfrak{v}_x (t - \tau) \, \delta U_1' \, d\tau + \cdots,$$

wenn $\delta U_1$ durch (10), $\delta U_1'$ durch (12) gegeben wird, und

wenn $\tau_1$ den Endpunkt der dritten Lage bezeichnet, d. h. durch die Gleichung:

$$c\tau - T = 2a$$

bestimmt wird. Nach Herrn Sommerfeld müßten diese Integrale über $\delta U_1$, $\delta U_1'$, ... der rechten Seite verschwinden, was aber nur in besonderen Fällen wird eintreten können.

Ein wesentlicher Unterschied der Sommerfeldschen Formeln gegenüber den meinigen liegt ferner, wie schon bemerkt wurde, in der Wahl der oberen Grenze, die bei ihm gleich $\infty$, bei uns gleich $t$ bzw. $t + t_0$ gesetzt wurde [vgl. obige Formeln (1) und (2), in denen für das Vektorpotential unter dem Integralzeichen der Faktor $\frac{\mathfrak{v}_x(t-\tau)}{c}$ hinzuzufügen ist]; es ist klar, daß bei Differentiation des Potentials nach $t$ dies einen wesentlichen Einfluß übt.

## § 6. Vertauschung von Differentiation und Integration.

Neben der Differentiation nach $t$ kommt diejenige nach $\xi$, $\eta$, $\zeta$ in Betracht. Die Kräfte werden durch die Differentialquotienten des Potentials und den räumlichen Koordinaten berechnet; es kommt also auf Integrale der Form:

$$\int\int\int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dy\, dx\, dz$$

an, wo das räumliche Integral über das Volumen zu erstrecken ist; da nun $x$ und $\xi$ im $\varphi$ nun in der Verbindung $x + \xi$ vorkommen, so ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi};$$

und es kommt also darauf an, ob die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\int\int\int \varphi\, dx\, dy\, dz = \int\int\int \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\, dx\, dy\, dz \tag{16}$$

richtig ist. Diese Frage ist durch die Betrachtung des vorhergehenden Paragraphen schon mit erledigt, denn bei der

Differentiation der Grenzen nach $t$ muß eben erst nach $\xi$ und dann $\xi$ nach $t$ differenziert werden, da $t$ in den Grenzen nur vorkommt, insofern:

$$T = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

von $t$ abhängt. Die obigen Relationen (10), (12), .... zeigen, daß die Gleichung (16) tatsächlich nicht bestehen kann.

Herr Sommerfeld beruft sich (oben S. 166) zum Beweise darauf, daß „die Größe $W = \iiint \frac{S}{R}\, dx\, dy\, dz$ ebenso wie die Größe $S$ eine stetige Funktion der Variabeln $\xi$ sei, nach der differenziert wird". Dem ist aber nicht so; in der dritten Lage z. B. ist die Größe $W$ in dem horizontal schraffierten Gebiete (vgl. oben Figur 4) gleich Null, in dem vertikal schraffierten Gebiete von Null verschieden; an der Grenzfläche erleidet sie also einen Sprung. Wenn allgemein eine stetige Funktion über verschiedene Gebiete integriert wird, so gibt sie nicht notwendig stetige Resultate. Ersetzen wir z. B. in dem Integrale $W$ (zum Zwecke der Vereinfachung der Integrationen) die Funktion $\frac{S}{R}$ in dem vertikal schraffierten Gebiete (Figur 4) durch die Konstante 1, so wird:

$$W_1 = \int_{c\tau - a}^{T+a} R^2\, d R \int_0^{\Theta_1} \sin \Theta\, d\, \Theta \int_0^{2\pi} d\, \Psi,$$

wo $\Theta_1$ wieder durch ($11^a$) bestimmt ist; es ist:

$$W_1 = \pi \int_{c\tau - a}^{T+a} [2\, R\, T - (R^2 + T^2 - a^2)]\, R \frac{d\, R}{T}$$

$$= 2\pi \left[ \frac{1}{3} \{(T+a)^3 - (c\tau - a)^3\} - \frac{1}{8\, T} \{(T+a)^4 - (c\tau - a)^4\} \right.$$

$$\left. - \frac{T^2 - a^2}{4\, T} \{(T+a)^2 - (c\, \tau - a)^2\} \right].$$

In dem horizontal schraffierten Gebiete sei $\frac{S}{R}$ ersetzt durch $\frac{R}{c\tau - a}$, welcher Wert an der Grenzfläche gleich 1 wird; dann haben wir hier:

$$W_2 = \frac{\pi}{(c\tau - a)T}\int_0^{c\tau - a}[2RT - (R^2 + T^2 - a^2)]R^2 dR$$
$$= \pi\left[\frac{1}{2}(c\tau - a)^3 - \frac{1}{5T}(c\tau - a)^5 - \frac{T^2 - a^2}{3T}(c\tau - a)^2\right].$$

Wir haben also in beiden Gebieten ganz verschiedene Funktionen von $\xi$. Dementsprechend hatte ich a. a. O. das Beispiel des Integrals $L$ gewählt, in dem auch unter dem Integralzeichen eine Funktion steht, die in verschiedenen Intervallen verschiedene Funktionen eines Parameters $\xi$ darstellt. Um dies Beispiel den obigen Betrachtungen an die Seite zu stellen, müßte man nur in letzteren erst die beiden Integrationen des Doppelintegrals trennen: die nämliche Variable $w$ des Beispiels ist dann durch obige Variabel $R$ repräsentiert; die Funktion unter dem Zeichen entsteht durch Ausführung der Integration nach $\Theta$. Aber es ist überflüssig, über dieses Beispiel zu diskutieren, nachdem im vorhergehenden Paragraphen die Ungültigkeit der supponierten Gleichung (16) direkt dargetan wurde.

Es sei nur noch betont, daß die Bemerkung des Herrn Sommerfeld (oben S. 166), wonach das von mir im Beispiele benutzte Integral „ohne weiteres keinen Sinn hat“, unzutreffend ist. Es ist hier die fundamentale der Bedingung der Integralrechnung, daß die Integrale von 0 bis $\xi$ und von $\xi$ bis $a$ je für sich allein einen Sinn haben müssen, erfüllt; es braucht also die Stelle $x = \xi$ keineswegs von der Integration ausgeschlossen zu werden.

Herr Sommerfeld macht ferner folgende Bemerkung: „Differenzieren wir nun das Integral $W = \int\int\int \frac{S}{R}\,dx\,dy\,dz$ nach $\xi$ in den Grenzen des Raumintegrals, so ist nach der

Integration derjenige Wert von $S$ einzutragen, der auf der Begrenzung statthat, d. h. eben der Wert $S = 0$." Dieses ist richtig bei einem einfachen Integrale; wenn man aber ein Doppelintegral (und nur mit solchen haben wir hier zu tun) nach einem in den Grenzen vorkommenden Parameter differenziert, so kommt im Resultate zwar der Wert der Funktion unter dem Integralzeichen an der Begrenzung in Betracht; aber es ist das Doppelintegral nur auf ein einfaches Integral reduziert; und unter dem Zeichen ist dabei nicht immer $S = 0$ zu nehmen. Es geht dies aus den Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen deutlich hervor.

Betrachten wir z. B. die in Figur 4 dargestellte „dritte Lage", so bildet die Kugel $R = c\tau - a$ einen Teil der Grenzfläche des Raumintegrals; und hier verschwindet in der Tat der zugehörige, in (11) gegebene Wert von $\delta U_1$, indem $[a^2 - (c\tau - R)^2]$ und somit $S$ gleich Null wird. Bei der ersten Lage dagegen handelt es sich um die Grenzfläche $R = a - c\tau$, und hier ist $S$ nicht gleich Null, und die in (10) unter dem Integralzeichen stehende Funktion verschwindet nicht. Ebenso ist es bei Überlichtgeschwindigkeit; der für die „erste Lage" oben (S. 189) gegebene Wert von $\delta U_1$ ist an der Grenzfläche $R = c\tau + a$ gleich Null; aber für Figur 8 kommt außerdem die Kugel $R = a - c\tau$ in Betracht, und hier ist $\delta U_1$ von Null verschieden. Auch die für $\delta U_2$ und $\delta U_3$ oben gefundenen Werte (die sich auf das Vektorpotential bezogen) sind in der zugehörigen Grenzfläche ($R = a - T$) von Null verschieden, während der auf S. 191 für die dritte Lage (Fig. 14) gegebene Wert von $\delta U$ an der Grenzfläche $R = a + c\tau$ wiederum gleich Null ist.

### § 7. Über die Berechnung des bestimmten Integrals $\Omega$.

Was die Berechnung dieses bestimmten Integrales betrifft, so erkenne ich an, daß das Verfahren des Herrn Sommerfeld korrekt und mein Einwurf unberechtigt war, indem ich nicht beachtet hatte, daß auch die Funktion unter dem

Integralzeichen noch von der oberen Grenze $a$ abhängt. Zur persönlichen Entschuldigung kann ich nur anführen, daß ich die ganze Arbeit über Elektronen unter einem gewissen Drucke und in Eile habe machen müssen, um meine anderen Arbeiten nicht allzu lange zu unterbrechen. Ich hielt mich aber doch für verpflichtet, die mündlich mehrfach ausgesprochenen Bedenken gegen die bisherige Behandlung der Elektronentheorie zu veröffentlichen und glaube auch, dadurch wesentlich zur Klärung der betreffenden Fragen beigetragen zu haben.

Der Wert des fraglichen Integrals $\Omega$ spielt übrigens nur in den Untersuchungen des Herrn Sommerfeld eine Rolle: bei meiner Behandlung des Problems kommt das Integral nicht vor; der betreffende Irrtum ist also hier von nebensächlicher Bedeutung.

## § 8. Über Sommerfelds vereinfachte Behandlung der Elektronenbewegung in den Sitzungsberichten der Amsterdamer Akademie.

Ein wesentlicher Unterschied der Sommerfeld'schen Formeln von den meinigen beruht, wie mehrfach hervorgehoben, darin, daß Herr Sommerfeld die obere Grenze $t$ in (1) durch $\infty$ ersetzt, indem er sich einen Anfangswert $t_0$ eingeführt denkt, so daß $t - t_0$ an Stelle von $t$ tritt, und dann $t_0$ gleich $-\infty$ wählt, oder (was auf dasselbe hinauskommt), indem er in (2) die Größe $t_0$ gleich $+\infty$ setzt; ich hatte hervorgehoben, daß dies nicht erlaubt ist, denn der Grenzprozeß $t_0 = \infty$ darf (nach allgemeinen mathematischen Prinzipien) erst gemacht werden, nachdem alle Größen (auch die Kräfte) für endliche Werte von $t_0$ berechnet sind; es genügte zur Begründung dessen darauf zu verweisen, daß das vektorielle Potential, bei Berechnung der Kraft, nach $t$ differenziert werden muß, daß also der Ausdruck (vgl. S. 325 meiner Abhandlung):

$$\lim_{t_0=\infty} \int\int\int \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^{t+t_0} \mathfrak{v}_x(t-\tau) \frac{S}{R} \, d\tau \right\} dx \, dy \, dz$$

zu bilden ist, der offenbar von dem bei Sommerfeld an dessen Stelle tretenden:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^\infty \mathfrak{v}_x(t-\tau)\, d\tau \iiint \frac{S}{R}\, dx\, dy\, dz\right\}$$

verschieden ausfallen muß. Ich hatte ferner erwähnt, daß auch in der später von Herrn Sommerfeld gegebenen „vereinfachten Behandlung“ eine Begründung dafür fehlt, weshalb nach der Zeit zwischen den Grenzen 0 und ∞ integriert wird (S. 329 meiner Abhandlung). Herr Sommerfeld gibt jetzt (oben S. 171) zur Begründung an: „man habe die Grenzen passend zu wählen, um zu einem einfachen Ergebnis und zur Ableitung übersichtlicher physikalischer Tatsachen zu gelangen“ und weiter bemerkt er: „bei meiner Wahl der oberen Grenze würde die physikalische Bedeutung des Ergebnisses verschleiert und die explizierte Berechnung von $\varphi$ unmöglich gemacht“. Daß letzteres unrichtig ist, glaube ich hinreichend gezeigt zu haben. Die Einfachheit der Resultate ist gewiß ein erstrebenswertes Ziel, die Richtigkeit derselben ist aber doch wichtiger, und diese leidet sehr wesentlich unter der Festsetzung des Herrn Sommerfeld. Die Grenzen des nach der Zeit $\tau$ zu nehmenden Integrals sind nicht willkürlich wählbar, sondern der beschränkenden Bedingung unterworfen, daß das Potential $\varphi$ den fundamentalen partiellen Differentialgleichungen zu genügen hat, nämlich:

$$(17)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta^2 \varphi = 0 \quad \text{außerhalb des Elektrons,} \\ &\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta^2 \varphi = c^2 \varrho \quad \text{innerhalb des Elektrons;} \end{aligned}$$

und dieser Forderung genügt die Sommerfeld'sche Funktion $\varphi$ nicht.

Wir haben also zu untersuchen, ob die Funktion:

$$(18)\qquad \varphi_\Omega = \frac{3\,\varepsilon\, c}{2\,\pi^2\, a^3}\int_0^\Omega \frac{S}{R}\, d\tau$$

den angegebenen Gleichungen genügt. Dabei ist die obere Grenze $\infty$ durch die Konstante $\Omega$ ersetzt, da sich die Grenze $\infty$ bei der Differentiation nach $t$ ebenso verhält wie eine Konstante. Zu dem Zwecke müssen wir zunächst den Beweis dafür kurz rekapitulieren, daß obige, in (2) gegebene Funktion $\varphi$ den Bedingungen (17) genügt (vgl. §§ 1, 2 und 3 meiner Abhandlung oder die entsprechenden Untersuchungen bei Sommerfeld, Göttinger Nachrichten, 1904).

In letzterem bezog sich der Ausdruck $\Delta^2\varphi$ auf ein im Raum festes Koordinatensystem $x', y', z'$; mittels der Gleichungen:

$$x' = x + \int_0^t \mathfrak{v}_x\,dt, \quad y' = y + \int_0^t \mathfrak{v}_y\,dt, \quad z' = z + \int_0^t \mathfrak{v}_z\,dt,$$

in denen $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$ die Komponenten der Geschwindigkeit sind, wurde ein im Körper festes System $x, y, z$ eingeführt. Die zweite Differentialgleichung (17) ging dadurch in die folgende über:

$$(19)\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - S\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\mathfrak{v}_x}{\partial t} - 2S\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}\mathfrak{v}_x + SS\,\mathfrak{v}_x\mathfrak{v}_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - c^2\Delta^2\varphi = c^2\varrho;$$

in ihr bedeutet $S$ ein Summazeichen, so daß z. B.:

$$S\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d\mathfrak{v}_y}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{d\mathfrak{v}_z}{dt}.$$

Während in (17) die Größe $\varrho$ eine Funktion von $x', y', z'$ und $t$ war, ist jetzt in (18) $\varrho$ eine Funktion von $x, y, z$; und nach der Theorie der Fourier'schen Integrale haben wir:

$$(20)\qquad \iiint_{-\infty}^{\infty} P\cdot e^{iSkx}\,dk\,dl\,dm = \varrho \quad \text{für } r < a, \qquad = 0 \quad \text{,, } r > a,$$

wenn $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ die Entfernung vom Mittelpunkt des Elektrons (Kugel mit Radius $a$) bezeichnet, und wenn:

$$(20^a)\qquad P = \frac{1}{8\pi^3}\iiint \varrho(\varkappa, \lambda, \mu)\, e^{-iSk\varkappa}\,d\varkappa\,d\lambda\,d\mu$$

gesetzt wird, wobei die Integration nach $\varkappa, \lambda, \mu$ über das Innere des Elektrons auszudehnen ist. Sei nun $\varphi'$ eine zu bestimmende Funktion von $x, y, z$ und $k, l, m$, und es sei:

$$\varphi = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(k, l, m) \cdot P \cdot dk\, dl\, dm; \tag{21}$$

bezeichnen wir ferner mit $D\varphi$ die linke Seite der Differentialgleichung (19), so ist:

$$\begin{aligned} D\varphi &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} P \cdot D\varphi' \cdot dk\, dl\, dm = c^2 \varrho \\ &= c^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} P\, e^{iSkx}\, dk\, dl\, dm. \end{aligned} \tag{22}$$

Es ist folglich $\varphi$ eine Lösung der Gleichung (19), wenn die Hilfsfunktion $\varphi'$ der Differentialgleichung:

$$D\varphi' = c^2 e^{iSkx} \tag{23}$$

im ganzen Raum genügt, so daß wir jetzt von der Notwendigkeit befreit sind, das Innere und das Äußere des Elektrons zu unterscheiden. Zur Integration von (23) wurde sodann:

$$\varphi' = e^{iSkx} F(t) \tag{24}$$

gesetzt, wodurch sich für $F(t)$ die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 F}{dt^2} - 2i \frac{dF}{dt} Sk\mathfrak{v}_x + \left[c^2 s^2 - iSk \frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} - (Sk\mathfrak{v}_x)^2\right] F = c^2 \tag{25}$$

ergab. Die letztere endlich ward durch die Funktion:

$$F = \frac{c}{s} \int_0^{t-t_0} e^{iSk\xi} \sin cs\tau\, d\tau \tag{26}$$

integriert, in der $t_0$ eine Integrationskonstante bedeutet, während

$$Sk\xi = k\xi + l\eta + m\zeta$$

und:

$$(27)\qquad \xi = \int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_x(\tau)\,d\tau, \quad \eta = \int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_y(\tau)\,d\tau, \quad \zeta = \int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_z(\tau)\,d\tau$$

gesetzt ist. Für die Elektronentheorie wird $\varrho$ konstant und zwar $= \frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}$ gewählt; führt man statt $\varkappa, \lambda, \mu$ räumliche Polarkoordinaten, $\sigma, \vartheta, \psi$ ein, so ergab sich:

$$(28)\qquad \begin{aligned} P &= \frac{3\varepsilon}{32 a^3 \pi^4} \int_0^a \sigma^2\,d\sigma \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} e^{-is\sigma\operatorname{cosin}\vartheta} \sin\vartheta\,d\vartheta \\ &= \frac{3\varepsilon}{8a^3\pi^3}\,\frac{\sin as - as\operatorname{cosin} as}{s^3}, \end{aligned}$$

und somit nach (21), (24) und (26):

$$\varphi = \frac{3\varepsilon c}{8\pi^3 a^3} \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin as - as\operatorname{cosin} as}{s^4}\,dk\,dl\,dm \int_0^{t-t_0} e^{iSkx} \sin cs\tau\,d\tau,$$

oder wenn man statt $k, l, m$ Polarkoordinaten $R, \Theta, \Psi$ einführt:

$$(29)\qquad \begin{aligned} \varphi &= \frac{3\varepsilon}{8\pi^3 a^3} \int_0^{\infty} \frac{\sin as - as\operatorname{cosin} as}{s^2} \int_0^{\pi} \sin\Theta\,d\Theta \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^{t-t_0} e^{isR\operatorname{cosin}\Theta} \sin cs\tau\,d\tau \\ &= \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3} \int_0^{t-t_0} \frac{S}{R}\,d\tau, \end{aligned}$$

wenn $S$ das folgende Integral bezeichnet:

$$(30)\qquad S = \int_0^{\infty} \frac{\sin as - as\operatorname{cosin} as}{s^3} \cdot \sin Rs \cdot \sin cs\tau \cdot ds,$$

dessen Wert oben unter (3), (4) und (5) angegeben wurde.

In (29) haben wir den obigen Ausdruck (2) des Potentials $\varphi$ gewonnen, es ist nur die willkürliche Konstante $t_0$ durch $-t_0$ zu ersetzen (da diese Konstante damals eine andere Bedeutung hatte).

Diese Konstante $t_0$ ist willkürlich: sie darf aber nicht unendlich groß gewählt werden, denn für $t_0 = \pm \infty$ hat das in (26) aufgestellte Integral $F$ keinen Sinn mehr. Wenn man also mit Herrn Sommerfeld trotzdem $t_0 = -\infty$ setzt, so hat man keine Sicherheit darüber, ob die Funktion $\varphi$ noch den partiellen Gleichungen (17) genügt: es ist im Gegenteil zu erwarten, daß dies nicht mehr der Fall ist. Diese Erwägung veranlaßte mich hauptsächlich zur Nachprüfung der Sommerfeldschen Resultate: sie erschien mir so einleuchtend, daß ich bei der Divergenz unserer Resultate eine direkte Prüfung, ob für $t_0 = -\infty$ die Differentialgleichungen (17) noch erfüllt sind, für nicht notwendig hielt. Eine solche Prüfung soll aber jetzt vorgenommen werden.

Die Annahme $t_0 = -\infty$ hat für das Differenzieren die nämliche Wirkung, als wenn man die obere Grenze $t - t_0$ in (29) durch eine Konstante $\Omega$ ersetzt; wir beschäftigen uns also mit der in (18) definierten Funktion $\varphi_\Omega$. Die Funktion $F$ ist dann durch:

$$(31) \qquad F_\Omega = \frac{c}{s} \int^{\Omega} e^{iSk\xi} \sin cs\tau \, d\tau$$

zu ersetzen. Wir trennen von ihr einen Faktor ab, indem wir:

$$(32) \qquad F_\Omega = \frac{c}{s} e^{iSk\mathfrak{B}_x(t)} Q$$

setzen, wo:

$$(33) \qquad \mathfrak{B}_x(t) = \int_\omega^t \mathfrak{v}_x(\tau) \, d\tau \qquad \text{(und entsprechend für } \mathfrak{v}_y \text{ und } \mathfrak{v}_z)$$

gesetzt werde, unter $\omega$ eine willkürliche Konstante verstanden: dann ist in Rücksicht auf (31):

$$Q = \int_0^\Omega e^{-\psi(t-\tau)} \sin cs\tau \, d\tau,$$

wenn:

$$(34) \qquad \psi(t-\tau) = i S k \mathfrak{V}_x (t-\tau)$$

gesetzt wird. Wir stellen zunächst für $Q$ eine lineare Differentialgleichung auf. Es ist:

$$\frac{dQ}{dt} = -\psi'(t-\tau) \int_0^\Omega e^{-\psi(t-\tau)} \sin cs\tau\, d\tau$$

$$= -\int_0^\Omega \frac{d\, e^{-\psi(t-\tau)}}{d\tau} \sin cs\tau\, d\tau$$

$$= -e^{-\psi(t-\Omega)} \sin cs\Omega + cs \int_0^\Omega e^{-\psi(t-\tau)} \operatorname{cosin} cs\tau\, d\tau,$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = \psi'(t-\Omega) \sin cs\Omega \cdot e^{-\psi(t-\Omega)} - cs \int_0^\Omega \frac{d\, e^{-\psi(t-\tau)}}{d\tau} \operatorname{cosin} cs\tau\, d\tau$$

$$= [\psi'(t-\Omega) \sin cs\Omega - cs \operatorname{cosin} cs\Omega]\, e^{-\psi(t-\Omega)} - c^2 s^2 Q;$$

wir haben also:

$$(34^a) \quad \frac{d^2 Q}{d^2 t} + c^2 s^2 Q = [\psi'(t-\Omega) \sin cs\Omega - cs \operatorname{cosin} cs\Omega]\, e^{-\psi(t-\Omega)}.$$

Gehen wir nun zu $F_\Omega$ zurück, indem wir gemäß (33) und (34):

$$Q = \frac{s}{c}\, e^{-\psi(t)} F_\Omega$$

setzen, so finden wir für $F_\Omega$ die Differentialgleichung:

$$(35) \quad \begin{aligned} &\frac{d^2 F_\Omega}{dt^2} - 2iSk\mathfrak{v}_x(t) \cdot \frac{dF_\Omega}{dt} + [c^2 s^2 - iSk\mathfrak{v}_x'(t) - (Sk\mathfrak{v}_x(t))^2]\, F_\Omega \\ &\qquad = \left[\psi'(t-\omega)\, c\, \frac{\sin cs\Omega}{s} - c^2 \operatorname{cosin} cs\Omega\right] e^{iSk\xi_0}, \end{aligned}$$

wobei $\xi_0$ aus (27) entsteht, indem man $\tau$ durch $\Omega$ ersetzt; es ist also:

$$(36) \qquad iSk\xi_0 = \psi(t) - \psi(t-\Omega) = iSk \int_{t-\Omega}^{t} \mathfrak{v}_x(\tau)\, d\tau.$$

Wie vorauszusehen war, ist also die Konstante $\omega$ für das Resultat ohne Bedeutung. Die linke Seite der Differentialgleichung (35) ist mit der linken Seite von (25) in Übereinstimmung: die rechten Seiten sind aber vollständig verschieden. Um nun zu einer partiellen Gleichung für $\varphi_\Omega$ zu gelangen, müssen wir die in obigen Gleichungen (19) bis (25) vorgenommenen Operationen rückwärts verfolgen.

Wir setzen demnach, analog zu (24):

$$\varphi'_\Omega = F_\Omega(t) \cdot e^{iSkx};$$

dann genügt $\varphi'_\Omega$ derjenigen Differentialgleichung, welche aus (23) entsteht, wenn man auf der rechten Seite die Konstante $c^2$, d. h. die rechte Seite von (25), durch den auf der rechten Seite von (35) stehenden Ausdruck ersetzt, d. h. der partiellen Gleichung:

$$(37) \quad D\varphi'_\Omega = \left[\psi'(t-\Omega)\, c\, \frac{\sin c s \Omega}{s} - c^2 \operatorname{cosin} c s \Omega\right] e^{iSk(x+\xi_0)},$$

in der das Zeichen $D$ dieselbe Bedeutung hat wie in (22). Hieraus entsteht, analog wie bei (22), die Differentialgleichung für $\varphi_\Omega$, wenn man beiderseits mit $P$ multipliziert und nach $k, l, m$ zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ integriert. Dabei ist $P$ durch (20ᵃ) bezw. für konstante Werte von $\varrho$ (die jetzt allein in Betracht kommen), durch (28) definiert. Mit Rücksicht auf den aus (36) zu entnehmenden Wert von $i S k \xi_0$ läßt sich die rechte Seite von (37) in folgender Form schreiben:

$$\frac{c}{s}\left[\sin c s \Omega \frac{\partial}{\partial \Omega}\left(e^{iSk(x+\xi_0)}\right) - e^{iSk(x+\xi_0)} \frac{\partial \sin c s \Omega}{\partial \Omega}\right].$$

Infolgedessen erhalten wir als partielle Differentialgleichung für die Funktion $\varphi_\Omega$:

$$(38) \qquad D\varphi_\Omega = c\,(J_1 - J_2),$$

wo mit $J_1$ und $J_2$ die folgenden Integrale bezeichnet sind:

$$J_1 = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin c s \Omega}{s} \frac{\partial}{\partial \Omega}\left(e^{iSk(x+\xi_0)}\right) \cdot P \cdot dk\, dl\, dm.$$

$$J_2 = \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iSk(x+\xi_0)} \frac{\partial \sin c s \Omega}{\partial \Omega} \cdot P \cdot dk\, dl\, dm,$$

oder, wenn die konstante Dichte $\varrho$ eingeführt wird, nach (28):

$$J_1 = \frac{3\varepsilon}{8a^3\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^4} \sin c s \Omega \frac{\partial}{\partial \Omega}(e^{iSk(x+\xi_0)})\, dk\, dl\, dm$$

$$J_2 = \frac{3\varepsilon}{8a^3\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^4} e^{iSk(x+\xi_0)} \frac{\partial \sin c s \Omega}{\partial \Omega}\, dk\, dl\, dm.$$

Statt $k, l, m$ führen wir räumliche Polarkoordinaten $s, \Theta, \Psi$ in der gleichen Weise ein, wie auf S. 244 meiner Abhandlung; es ist dort nur $\tau$ durch den konstanten Wert $\Omega$ und demnach $R$ durch $R_0$ zu ersetzen, wo:

$$R_0^2 = (x + \xi_0)^2 + (z + \eta_0)^2 + (z + \xi_0)^2,$$

wenn $\xi_0, \eta_0, \xi_0$ dieselbe Bedeutung haben wie in (36). Dann wird:

$$Sk(x + \xi_0) = R_0 \cdot s \cdot \operatorname{cosin} \Theta;$$

also:

$$J_1 = \frac{3\varepsilon}{4\pi^2 a^3}\frac{\partial R_0}{\partial \Omega}\int_0^\infty \frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^2} \sin c s \Omega \cdot ds \frac{\partial}{\partial R_0}\int_0^\pi e^{iR_0 s \operatorname{cosin}\Theta} \sin\Theta\, d\Theta$$

$$= -\frac{3\varepsilon}{2\pi^2 a^3 R_0^2}\frac{\partial R_0}{\partial \Omega}\int_0^\infty \frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^3}(\sin R_0 s - R_0 s \operatorname{cosin} R_0 s) \sin c s \Omega\, ds$$

$$J_2 = \frac{3\varepsilon}{4\pi^2 a^3}\int_0^\infty \frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^2}\frac{\partial \sin c s \Omega}{\partial \Omega}\, ds \int_0^\pi e^{iR_0 s \operatorname{cosin}\Theta} \sin\Theta\, d\Theta$$

$$= \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3 R_0}\int_0^\infty \frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^2} \operatorname{cosin} c s \Omega \cdot \sin R_0 s \cdot ds.$$

Das in $J_1$ auftretende bestimmte Integral ist von Herrn Sommerfeld ausgewertet;[1]) es ist dasjenige, auf welches sich

[1]) Göttinger Nachrichten, 1904, S. 120.

seine obigen Bemerkungen (S. 167 ff.) beziehen. Wir haben darnach:

1. Aus den Strecken $a, c\Omega, R_0$ kann ein Dreieck gebildet werden, dann ist:

$$J_1 = -\frac{3\varepsilon}{16\pi a^2 R_0} \frac{a^2 + R_0^2 - c^2\Omega^2}{a R_0} \frac{\partial R_0}{\partial \Omega}; \tag{39}$$

2. Aus den Strecken $a, c\Omega, R_0$ kann kein Dreieck gebildet werden; dann ist:

$$J_1 = 0. \tag{39a}$$

Das Integral $J_2$ können wir berechnen, indem wir es auf die beiden Integrale:

$$P(a, \beta) = \int_0^\infty \frac{\sin a s \cdot \sin \beta s}{s^2} ds,$$

$$P_1(a, \beta) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{cosin} a s \cdot \sin \beta s}{s} ds$$

zurückführen; es ist dann:

$$J_2 = \frac{3\varepsilon c}{4\pi^2 a^3 R_0} [P(a, R_0 + c\Omega) + P(a, R_0 - c\Omega)$$
$$- a P_1(a, R_0 + c\Omega) - a P_1(a, R_0 - c\Omega)].$$

Nun ist bekanntlich:

$$\int_0^\infty e^{-ps} \frac{\sin a s \sin \beta s}{s^2} ds = \frac{a+\beta}{2} \operatorname{arctang} \frac{a+\beta}{p}$$
$$- \frac{a-\beta}{2} \operatorname{arctang} \frac{a-\beta}{p} + \frac{p}{4} \log \frac{p^2 + (a-\beta)^2}{p^2 + (a+\beta)^2},$$

folglich, indem $p = 0$ gesetzt wird:

$$P(a, \beta) = \frac{\pi}{2} \beta \quad \text{für} \quad a > \beta,$$

$$= \frac{\pi}{2} a \quad \text{„} \quad a < \beta$$

und bekanntlich:

$$P_1(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha > \beta$$
$$= \frac{\pi}{2} \quad „ \quad \alpha < \beta.$$

Hiernach erhalten wir:

$$J_2 = \frac{3\varepsilon c}{4\pi^2 a^3 R_0}\left[\frac{\pi}{2}a + \frac{\pi}{2}a - \frac{\pi}{2}a - \frac{\pi}{2}a\right]$$
$$= 0 \quad \text{für} \quad a < R_0 - c\Omega < R_0 + c\Omega,$$

$$J_2 = \frac{3\varepsilon c}{4\pi^2 a^3 R_0}\left[\frac{\pi}{2}a + \frac{\pi}{2}(R_0 - c\Omega) - \frac{\pi}{2}a - 0\right]$$
$$= \frac{3\varepsilon c}{16\pi a^3 R_0}(R_0 - c\Omega) \quad \text{für} \quad 0 < R_0 - c\Omega < a < R_0 + c\Omega,$$

$$J_2 = \frac{3\varepsilon c}{4\pi^2 a^3 R_0}\left[\frac{\pi}{2}(R_0 + c\Omega) + \frac{\pi}{2}(R_0 - c\Omega) - 0 - 0\right]$$
$$= \frac{3\varepsilon c}{4\pi a^3} \quad \text{für} \quad 0 < R_0 - c\Omega < R_0 + c\Omega < a,$$

$$J_2 = \frac{3\varepsilon c}{4\pi^2 a^3 R_0}\left[\frac{\pi}{2}a - \frac{\pi}{2}a - \frac{\pi}{2}a + \frac{\pi}{2}a\right]$$
$$= 0 \quad \text{für} \quad a < c\Omega - R_0 < c\Omega + R_0,$$

$$J_2 = \frac{3\varepsilon c}{4\pi^2 a^3 R_0}\left[\frac{\pi}{2}a - \frac{\pi}{2}(c\Omega - R_0) - \frac{\pi}{2}a - 0\right]$$
$$= \frac{3\varepsilon c}{8\pi a^3 R_0}(R_0 - c\Omega) \quad \text{für} \quad 0 < c\Omega - R_0 < a < c\Omega + R_0,$$

$$J_2 = \frac{3\varepsilon c}{4\pi^2 a^3 R_0}\left[\frac{\pi}{2}(R_0 + c\Omega) - \frac{\pi}{2}(c\Omega - R_0) - 0 - 0\right]$$
$$= \frac{3\varepsilon c}{4\pi a^3} \quad \text{für} \quad 0 < c\Omega - R_0 < c\Omega + R_0 < a.$$

Wir fassen diese Resultate in folgender Weise zusammen; es ist:

(40) $$J_2 = \frac{3\varepsilon c}{8\pi a^3} \frac{R_0 - c\Omega}{R_0},$$

wenn sich aus den Strecken $a$, $R_0$, $c\Omega$ ein Dreieck bilden läßt,

(40ᵃ) $$J_2 = \frac{3\varepsilon c}{4\pi a^3},$$

wenn ein solches Dreieck unmöglich ist, weil $a$ zu groß ist,

(40ᵇ) $$J_2 = 0,$$

wenn das Dreieck unmöglich ist, weil $a$ zu klein ist.

Die durch Gleichung (18) definierte Funktion $\varphi_\Omega$ genügt der durch Gleichung (38) dargestellten Differentialgleichung, wenn die auf der rechten Seite auftretenden Ausdrücke $J_1$ und $J_2$ so gewählt werden, wie es die Gleichungen (39), ... (40ᵇ) vorschreiben.

Die vorstehende Betrachtung wird ungültig, wenn die Funktion $\psi(t-\Omega)$ von $t$ unabhängig wird, welche Werte auch $k, l, m$ haben mögen: dies tritt nach (33) und (34) ein, wenn $\mathfrak{v}_x = 0$, $\mathfrak{v}_y = 0$, $\mathfrak{v}_z = 0$, d. h. im Falle der dauernden Ruhe des Elektrons. Dann nämlich ist auch die durch (32) eingeführte Funktion $Q$ von $t$ unabhängig, und an Stelle von (34ᵃ) erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{d^2 Q}{d t^2} = 0,$$

aus der sich eine Gleichung von der Form (35) nicht ableiten läßt. Dieser einfachste Fall, mit dem wir uns schon oben in § 2 beschäftigt haben, ist also hier auszuschließen.

Herr Sommerfeld nimmt nun in (18) für $\Omega$ den Wert $\infty$ oder eine sehr große endliche Zahl. Bei Unterlichtgeschwindigkeit kann man jedenfalls $\Omega$ so groß nehmen, daß $c\Omega > R_0$ ist und zugleich $a < c\Omega - R_0$: denn $R_0$ bedeutet die Entfernung des Punktes $x', y', z'$ d. h. des Punktes, in dem sich der Punkt $x, y, z$ zur Zeit $t$ befindet, von der Stelle, wo sich

der Mittelpunkt des Elektrons zur Zeit $t - \Omega$ befand. Dann gelten aber die Gleichungen ($39^a$) und ($40^b$), und zwar für alle Punkte $x, y, z$ des Raumes, unabhängig davon, ob der Punkt $x, y, z$ im Innern oder außerhalb des Elektrons liegt. Bei Überlichtgeschwindigkeit kann $\Omega$ so groß gewählt werden, daß $R_v > c\Omega$ und $a < R_v - c\Omega$ wird, und es gelten wieder die Gleichungen ($39^a$) und ($40^b$); ausgenommen sind hier solche Bewegungen mit Überlichtgeschwindigkeit, bei denen das Elektron ein gewisses endliches Raumgebiet nicht verläßt.

Für hinreichend große Werte von $\Omega$ genügt hiernach die Funktion $\varphi_\Omega$ im allgemeinen der Differentialgleichung:

$$D\varphi_\Omega = 0,$$

und somit der ersten Differentialgleichung (17) im ganzen Raume, während die zweite Gleichung (17) nicht erfüllt ist. Das gilt dann auch für $\Omega = \infty$.

Alle Entwicklungen des Herrn Sommerfeld beziehen sich also, von Gleichung (16) seiner ersten Abhandlung ab, auf eine Lösung $\varphi$ (und ebenso bei $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$), die nur außerhalb des Elektrons brauchbar ist; die vom Elektron auf sein eigenes Innere während der Bewegung ausgeübten Kräfte können daher durch die Sommerfeld'schen Formeln nicht richtig dargestellt werden.

Auf S. 330 meiner Abhandlung erwähnte ich, daß Herr Herglotz die Sommerfeld'schen Formeln auf anderem Wege abgeleitet habe, daß aber bei ihm ein Beweis dafür fehle, daß seine Lösung auch der zweiten Gleichung (17) genüge. Nach vorstehenden Ausführungen ist derselbe Einwurf gegen die Sommerfeld'schen Entwicklungen zu erheben, und es ist daher nicht auffällig, wenn beide Forscher zu den gleichen Resultaten gelangt sind.



# Flächen eines dreifach unendlichen linearen Systems, welche mit einer gegebenen algebraischen Raumkurve eine Berührung 3. Ordnung eingehen.

Von Dr. **Franz Thalreiter.**

(*Eingelaufen 6. Juli.*)

Die Lösung des vorliegenden Problems verlangt die Elimination der Parameter $\varkappa$, $\lambda$ und $\mu$, der homogenen Variabeln $x_1, x_2, x_3, x_4$, der Differentiale $dx_1, dx_2, dx_3, dx_4$, der Differentiale zweiter und dritter Ordnung $d^2x_1, d^2x_2, d^2x_3, d^2x_4$ und $d^3x_1, d^3x_2, d^3x_3, d^4x_4$ aus folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varphi + \varkappa\psi + \lambda\chi + \mu\omega &= 0 \\
d\varphi + \varkappa d\psi + \lambda d\chi + \mu d\omega &= 0 \\
d^2\varphi + \varkappa d^2\psi + \lambda d^2\chi + \mu d^2\omega &= 0 \\
d^3\varphi + \varkappa d^3\psi + \lambda d^3\chi + \mu d^3 w &= 0 \\
f = 0,\ df = 0,\ d^2 f = 0,\ d^3 f &= 0 \\
g = 0,\ dg = 0,\ d^2 g = 0,\ d^3 g &= 0.
\end{aligned}$$

Mit $\varphi, \psi, \chi, \omega$ sollen ganze homogene Funktionen von derselben Ordnung $s$ bezeichnet werden, mit $f$ und $g$ zwei ganze homogene Funktionen $n^{\text{ter}}$ bzw. $m^{\text{ter}}$ Ordnung.

Es soll hier dieselbe Methode angewandt werden, die Herr Professor Lindemann in der Arbeit „Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact du troisième ordre".[1]) ge-

[1]) Cf. Bulletin de la Société Mathématique de France, Tome dixième, pag. 21.

geben hat. An Stelle der Kurven des dreifach unendlich linearen Systems treten hier Flächen, während die gegebene Kurve, mit der eine Berührung 3. Ordnung erreicht werden soll, mit einer algebraischen Raumkurve vertauscht wird.

In der Ebene wurden zu diesem Zwecke die Punkte bestimmt, in denen die Berührung stattfinden soll, und diese wurden als Koinzidenzpunkte einer gewissen Korrespondenz gefunden. Ebenso kann auch im Raume die Korrespondenz angegeben werden, vermöge deren jedem Punkt $x$ die ihn ihm die Raumkurve berührende Fläche eines Büschels oder Netzes entspricht. Die benützten Sätze über Korrespondenz in der Ebene können ohne weiteres auf den Raum übertragen werden, wie dies Herr Brill in der Arbeit „Zur Theorie der Elimination und der algebraischen Kurven“ [1]) gezeigt hat.

Nimmt man Ebenen statt der Flächen des dreifach unendlich linearen Systems, welche mit der Raumkurve eine Berührung 3. Ordnung haben sollen, so kommt man auf das Problem von Clebsch „Über die Wendungsberührebenen der Raumkurven“,[2]) so daß die hier behandelte Aufgabe die allgemeinere ist, der sich als Spezialfall die von Clebsch unterordnet.

Wie in der zitierten Arbeit des Herrn Professors Lindemann soll zuerst eine Berührung von der 1. Ordnung untersucht werden.

## § I. Berührung I. Ordnung.

Die algebraische Raumkurve soll, um symbolisch rechnen zu können, als Schnitt zweier algebraischer Flächen dargestellt werden:

$$f = 0 \quad \text{oder} \quad f^n(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

und

$$g = 0 \quad \text{oder} \quad g^m(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Ferner sollen die Definitionen gelten:

[1]) Mathematische Annalen, Band 4, pag. 522.
[2]) Crelles Journal, Band 63.

$$f_i = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad g_i = \frac{1}{m}\frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Es müssen zuerst die Flächen eines Büschels:

$$\varphi_0(x) + \lambda\,\varphi_1(x) = 0 \tag{1}$$

bestimmt werden, welche die Raumkurve berühren. Zu diesem Zwecke kann man die Berührungspunkte der verlangten Flächen auf der Raumkurve suchen. Diese Punkte sind durch die Korrespondenz gegeben:

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(y) & \varphi_1(y) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Setzt man in dieser Gleichung $y_i = x_i + d\,x_i$, so wird:

$$\begin{vmatrix} \sum \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i}\,d\,x_i & \sum \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\,d\,x_i \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Die $d\,x_i$ sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} f_1\,d\,x_1 + f_2\,d\,x_2 + f_3\,d\,x_3 + f_4\,d\,x_4 &= 0 \\ g_1\,d\,x_1 + g_2\,d\,x_2 + g_3\,d\,x_3 + g_4\,d\,x_4 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

und ferner durch die Idendität:

$$\varkappa_1\,d x_1 + \varkappa_2\,d\,x_2 + \varkappa_3\,d\,x_3 + \varkappa_4\,d\,x_4 = 0, \tag{4}$$

wenn zwischen den $\varkappa_i$ die Relation besteht:

$$\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3 + \varkappa_4 x_4 = 1.$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) erhält man:

$$\begin{aligned} \varrho\,d\,x_1 &= f_4(\varkappa_2 g_3 - g_2\varkappa_3) + g_4(f_2\varkappa_3 - \varkappa_2 f_3) - \varkappa_4(f_2 g_3 - g_2 f_3) \\ \varrho\,d\,x_2 &= f_1(g_3\varkappa_4 - g_4\varkappa_3) - g_1(f_3\varkappa_4 - f_4\varkappa_3) + \varkappa_1(f_3 g_4 - g_3 f_4) \\ \varrho\,d\,x_3 &= f_1(\varkappa_2 g_4 - g_2\varkappa_4) - g_1(\varkappa_2 f_4 - f_2\varkappa_4) + \varkappa_1(g_2 f_4 - g_4 f_2) \\ \varrho\,d\,x_4 &= f_1(g_2\varkappa_3 - \varkappa_2 g_3) - f_2(g_1\varkappa_3 - \varkappa_1 g_3) + f_3(g_1\varkappa_2 - g_2\varkappa_1). \end{aligned} \tag{4a}$$

Diese Werte führen wir in obiger Determinante ein und finden:

$$\begin{vmatrix} (\varphi_0 f g \varkappa) & (\varphi_1 f g \varkappa) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Setzen wir jetzt:

$$\varphi_0(x) = \alpha_x^s, \quad \varphi_1(x) = \beta_x^s,$$

$$f(x) = a_x^n, \quad g(x) = b_x^m,$$

also

$$(\varphi_0 f g \varkappa) = n \cdot m \cdot s \cdot (\alpha\, a\, b\, \varkappa)\, \alpha_x^{s-1}\, a_x^{n-1}\, b_x^{m-1}$$

$$(\varphi_1 f g \varkappa) = n \cdot m \cdot s \cdot (\beta\, a\, b\, \varkappa)\, \beta_x^{s-1}\, a_x^{n-1}\, b_x^{m-1},$$

so geht Gleichung (5) über in:

$$[(\alpha\, a\, b\, \varkappa)\, \beta_x - (\beta\, a\, b\, \varkappa)\, \alpha_x]\, a_x^{n-1}\, b_x^{m-1}\, \alpha_x^{s-1}\, \beta_x^{s-1} = 0.$$

Hier kann nun der Faktor $\varkappa_x = \varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_2 + \varkappa_3 x_3 + \varkappa_4 x_4$ leicht abgespalten werden durch Anwendung der Relation:[1])

$$\beta_x(\alpha\, a\, b\, \varkappa) - \varkappa_x(\alpha\, a\, b\, \beta) + b_x(\alpha\, a\, \varkappa\, \beta) - a_x(\alpha\, b\, \varkappa\, \beta) + \alpha_x(a\, b\, \varkappa\, \beta) = 0.$$

Und da $a_x^n = 0$, $b_x^m = 0$, $\varkappa_x = 1$, so wird die Gl. (5):

$$(a\, b\, \alpha\, \beta)\, a_x^{n-1}\, b_x^{m-1}\, \alpha_x^{s-1}\, \beta_x^{s-1} = 0.$$

Die gesuchten Berührungspunkte sind also die Schnittpunkte der durch $f = 0$ und $g = 0$ dargestellten Raumkurve mit der Jacobischen Fläche bezüglich der Flächen des Systems:

$$f = 0, \quad g = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 0.$$

---

[1]) Diese Formel kann leicht aus der entsprechenden für ternäre Formen gewonnen werden.

## § 2. Berührung 2. Ordnung.

Gegeben ist ein zweifach unendliches lineares System:

$$\varphi + \lambda \psi + \mu \chi = 0 \tag{1}$$

wo

$$\varphi = \alpha_x^s, \quad \psi = \beta_x^s, \quad \chi = \gamma_x^s$$

und

$$\varphi_i = \frac{1}{s} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \psi_i = \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad \chi_i = \frac{1}{s} \frac{\partial \chi}{\partial x_i}.$$

Die Gleichung der Fläche von der Ordnung $s$, welche obigem System angehört und die Kurve $f = 0$ und $g = 0$ in einem Punkt $x$ berührt, ist, wenn $y$ der variable Punkt ist:

$$(f g \psi \chi) \varphi(y) + (f g \chi \varphi) \psi(y) + (f g \varphi \psi) \chi(y) = 0 \tag{2}$$

oder

$$\begin{aligned} &[(a\, a' \beta \gamma)\, \beta_x^{s-1} \gamma_x^{s-1} \alpha_y^s \\ &+ (a a' \gamma \alpha) \gamma_x^{s-1} \alpha_x^{s-1} \beta_y^s + (a a' \alpha \beta) \alpha_x^{s-1} \beta_x^{s-1} \gamma_y^s] a_x^{n-1} a'^{\,m-1}_x = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

wobei folgende Definitionen eingeführt werden sollen:

$$a_x^n = b_x^n = c_x^n = 0$$

und

$$a'^{\,m}_x = b'^{\,m}_x = c'^{\,m}_x = 0.$$

Diese Gleichung (3) kann man auch in der Form schreiben:

$$\begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(y) & \chi(y) & 0 & 0 \\ \varphi_1(x) & \psi_1(x) & \chi_1(x) & f_1(x) & g_1(x) \\ \varphi_2(x) & \psi_2(x) & \chi_2(x) & f_2(x) & g_2(x) \\ \varphi_3(x) & \psi_3(x) & \chi_3(x) & f_3(x) & g_3(x) \\ \varphi_4(x) & \psi_4(x) & \chi_4(x) & f_4(x) & g_4(x) \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Man hat ferner noch die Relationen:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2 + x_3 \varphi_3 + x_4 \varphi_4 \\ \psi(x) &= x_1 \psi_1 + x_2 \psi_2 + x_3 \psi_3 + x_4 \psi_4 \\ \chi(x) &= x_1 \chi_1 + x_2 \chi_2 + x_3 \chi_3 + x_4 \chi_4 \\ f(x) &= x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 = 0 \\ g(x) &= x_1 g_1 + x_2 g_2 + x_3 g_3 + x_4 g_4 = 0. \end{aligned}$$

Setzt man nun:

$$y = x + 2\,dx + d^2 x,$$

so gehen die Glieder der 1. Horizontalreihe obiger Determinante über in:

$$(s-1)\,\alpha_x^{s-2}\,\alpha_{dx}^2,\quad (s-1)\,\beta_x^{s-2}\,\beta_{dx}^2,\quad (s-1)\,\gamma_x^{s-2}\,\gamma_{dx}^2,$$
$$(n-1)\,a_x^{n-2}\,a_{dx}^2,\quad (m-1)\,a'^{m-2}_x\,a'^2_{dx}.$$

Wir berechnen zuerst den Ausdruck $\varrho^2 a_{dx}^2$:

$$\varrho^2 a_{dx}^2 = (a f y \varkappa)^2 = (a\,a\,a'\,\varkappa)\,(a\,b\,b'\,\varkappa)\,a_x^{n-1}\,b_x^{n-1}\,a'^{m-1}_x\,b'^{m-1}_x. \quad (5)$$

Und es ist:

$$\text{I.}\quad a_x(a\,b\,b'\,\varkappa) = \varkappa_x\,(a b b' a) - b'_x(a\,b\,\varkappa\,a) + b_x(a b'\,\varkappa\,a) - a_x(b\,b'\,\varkappa\,a).$$
$$\text{II.}\quad b_x(a\,a\,a'\,\varkappa) = \varkappa_x(a\,a\,a'\,b) - a'_x(a\,a\,\varkappa\,b) + a_x(a\,a'\,\varkappa\,b) - a_x(a\,a'\,\varkappa\,b).$$

Wendet man dies auf den Ausdruck (5) an, so wird, da die Glieder mit den Faktoren $a'^m_x$ und $b'^m_x$ verschwinden:

$$\begin{aligned}\varrho^2 a_{dx}^2 = a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,a'^{m-1}_x\,b'^{m-1}_x\,[&b_x\,\varkappa_x\,(a\,a\,a'\,b)\,(a\,b'\,\varkappa\,a)\\ &+ a_x b_x (a\,a'\,\varkappa\,b)\,(a\,b'\,\varkappa\,a) - a_x b_x (a\,a'\,\varkappa\,b)\,(a\,b'\,\varkappa\,a)\\ &- a_x\varkappa_x\,(a\,a\,a'\,b)(b\,b'\,\varkappa\,a) - a_x\varkappa_x\,(a\,a'\,\varkappa\,b)\,(a\,b\,b'\,a)\\ &+ \varkappa_x^2\,(a\,a\,a'\,b)\,(a\,b\,b'\,a) + a_x\varkappa_x\,(a\,a'\,\varkappa\,b)\,(a\,b\,b'\,a)\\ &- a_x a_x\,(a\,a'\,\varkappa\,b)\,(b\,b'\,\varkappa\,a) + a_x^2(a\,a'\,\varkappa\,a)\,(b\,b'\,\varkappa\,\mathrm{a})].\end{aligned} \quad (6)$$

Durch Anwendung der Formel II geht das 1. Glied über in:

$$\begin{aligned}a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,a'^{m-1}_x\,b'^{m-1}_x\,[&b_x^2(a a a' b)\,(a\,a\,a'\,\varkappa) + a'_x b_x (a\,a\,\varkappa\,b)\,(a\,a\,a'\,b)\\ &- a_x b_x\,(a\,a\,a'\,b)\,(a\,a'\,\varkappa\,b) + a_x b_x (a\,a\,a'\,b)\,(a\,a'\,\varkappa\,b)].\end{aligned}$$

In diesem Ausdruck verschwindet das 1. und 2. Glied identisch wegen $a'^m_x = 0$ und $b_x^n = 0$, das 3. und 4. Glied heben sich mit dem zweiten und dritten des Ausdruckes (6) auf und das 4. Glied von (6) geht durch Vertauschung von $a'$ und $b'$ in das 5. Glied über. Also wird:

$$\varrho^2 \alpha_{dx}^2 = a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} [\varkappa_x^2 (a\,a\,a'\,b)(a\,b\,b'\,a) + \alpha_x^2 (a\,a'\,\varkappa\,b)(b\,b'\,\varkappa\,a) - 2\,a_x \varkappa_x (a\,a'\,\varkappa\,b)(a\,b\,b'\,a) - \alpha_x a_x (a\,a'\,\varkappa\,b)(b\,b'\,\varkappa\,a) + a_x \varkappa_x (a\,a'\,\varkappa\,b)(a\,b\,b'\,a)]. \tag{7}$$

Diese Relation kann noch weiter vereinfacht werden; durch Vertauschung von $a$ und $b$ und indem man die halbe Summe des alten und neuen Ausdruckes bildet, geht das letzte Glied über in:

$$a_x^{n-1} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \varkappa_x (a\,a'\,\varkappa\,b)(a\,b\,b'\,a)$$
$$= \tfrac{1}{2} a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \varkappa_x (a\,b\,b'\,a) [a_x (a\,a'\,\varkappa\,b) - b_x (a\,a'\,\varkappa\,a)]$$
$$= \tfrac{1}{2} a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \varkappa_x (a\,b\,b'\,a) [a_x (a\,a'\,\varkappa\,b) - \varkappa_x (a\,a\,a'\,b)];$$

Ebenso erzielt man durch Vertauschung von $a$ und $b$:

$$a_x^{n-1} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \alpha_x (a\,a'\,\varkappa\,b)(b\,b'\,\varkappa\,a)$$
$$= \tfrac{1}{2} a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} (b\,b'\,\varkappa\,a) [\alpha_x (a\,a'\,\varkappa\,b) - b_x (a\,a'\,\varkappa\,a)]$$
$$= \tfrac{1}{2} a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} (b\,b'\,\varkappa\,a) [(\alpha_x (a\,a'\,\varkappa\,b) - \varkappa_x (a\,a\,a'\,b)].$$

Der Ausdruck (7) erhält jetzt die Form:

$$\varrho^2 \alpha_{dx}^2 = a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} [\tfrac{1}{2} \varkappa_x^2 (a\,a\,a'\,b)(a\,b\,b'\,a) + \tfrac{1}{2} \alpha_x^2 (a\,a'\,\varkappa\,b)(b\,b'\,\varkappa\,a) + a_x \varkappa_x (a\,a'\,\varkappa\,b)(a\,b\,b'\,a)]. \tag{8}$$

Für die 4. und 5. Kolonne der Determinante (4) pag. (5) läßt sich der Ausdruck (8) noch mehr umformen. Setzt man zuerst $a = c$, dann kommt:

$$(n-1)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} \varkappa_x (a\,a'\,\varkappa\,b)(c\,b\,b'\,a)$$
$$= \tfrac{1}{3} (n-1)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \varkappa_x \cdot (c\,b\,b'\,a) \cdot [(a\,a'\,\varkappa\,c)\, c_x - (c\,a'\,\varkappa\,b)\, a_x - (a\,a'\,\varkappa\,c)\, b_x]$$
$$= \tfrac{1}{3} (n-1)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \varkappa_x^2 (c\,a\,a'\,b)(c\,b\,b'\,a).$$

Und weil noch die Gleichungen gelten:

$$f = 0 \quad \text{und} \quad df = 0,$$

so wird schließlich:

$$\varrho^2\, c_{d\,x}^2\, c_x^{n-2} = \tfrac{1}{6}\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2}\, a_x'^{\,m-1} b_x'^{\,m-1} \varkappa_x^2 (c\,a\,a'\,b)(c\,b\,b'\,a) \quad (9)$$

Setzt man aber in (8):

$$a = c',$$

so verschwindet das 3. Glied identisch und es bleibt:

$$\varrho^2 c'^{\,2}_{d\,x}\; c_x'^{\,m-2} = \tfrac{1}{2} a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{\,m-1} b_x'^{\,m-1} c_x'^{\,m-2} \varkappa_x^2 (c' a\, a' b)(c' b\, b' a). \quad (10)$$

Multipliziert man die vier letzten Reihen der Determinante (4) mit:

$$(s-1)(a\,b\,b')_1 (a\,a'\,\varkappa\,b)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{\,m-1} b_x'^{\,m-1} \varkappa_x,$$
$$(s-1)(a\,b\,b')_2 (a\,a'\,\varkappa\,b)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{\,m-1} b_x'^{\,m-1} \varkappa_x,$$
$$(s-1)(a\,b\,b')_3 (a\,a'\,\varkappa\,b)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{\,m-1} b_x'^{\,m-1} \varkappa_x,$$
$$(s-1)(a\,b\,b')_4 (a\,a'\,\varkappa\,b)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{\,m-1} b_x'^{\,m-1} \varkappa_x,$$

und zieht diese Produkte von den Gliedern der 1. Reihe ab, so werden diese:

$$\tfrac{1}{2}(s-1)(\alpha\,a\,a'\,b)(\alpha\,b\,b'\,a)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{\,m-1} b_x'^{\,m-1} \alpha_x^{s-2} \varkappa_x^2,$$
$$\tfrac{1}{2}(s-1)(\beta\,a\,a'\,b)(\beta\,b\,b'\,a)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{\,m-1} b_x'^{\,m-1} \beta_x^{s-2} \varkappa_x^2,$$
$$\tfrac{1}{2}(s-1)(\gamma\,a\,a'\,b)(\gamma\,b\,b'\,a)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{\,m-1} b_x'^{\,m-1} \gamma_x^{s-2} \varkappa_x^2,$$
$$\frac{n+2s-2}{6}(c\,a\,a'\,b)(c\,b\,b'\,a)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{\,m-1} b_x'^{\,m-1} c_x^{n-2} \varkappa_x^2,$$
$$\tfrac{1}{2}(m-1)(c'\,a\,a'\,b)(c'\,b\,b'\,a)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{\,m-1} b_x'^{\,m-1} c_x'^{\,m-2} \varkappa_x^2.$$

Durch diese Operationen ist der Faktor $\varkappa_x^2$ vollständig abgespalten, und die $\varkappa_i$ kommen in den Gliedern der Determinante nicht mehr vor.

Die Punkte unserer Raumkurve, in denen eine Fläche des Büschels (1) pag. (215) eine Berührung von der 2. Ordnung mit ihr hat, sind ihre Schnittpunkte mit folgender Fläche:

$$\begin{vmatrix} (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)X & \frac{n+2s-3}{3}\Delta & (m-1)G \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & f_1 & g_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & f_2 & g_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & f_3 & g_3 \\ \varphi_4 & \psi_4 & \chi_4 & f_4 & g_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

wo:

$$\Phi = (a\,a\,a'\,b)(a\,b\,b'\,a)\,a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,a_x'^{m-1}\,b_x'^{m-1}\,a_x^{s-2}$$

$$\Psi = (\beta\,a\,a'\,b)(\beta\,b\,b'\,a)\,a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,a_x'^{m-1}\,b_x'^{m-1}\,\beta_x^{s-2}$$

$$X = (\gamma\,a\,a'\,b)(\gamma\,b\,b'\,a)\,a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,a_x'^{m-1}\,b_x'^{m-1}\,\gamma_x^{s-2}$$

$$\Delta = (c\,a\,a'\,b)(c\,b\,b'\,a)\,a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,a_x'^{m-1}\,b_x'^{m-1}\,c_x^{n-2}$$

$$G = (c'\,a\,a'\,b)(c'\,b\,b'\,a)\,a_x^{n-2}\,b_x^{n-2}\,a_x'^{m-1}\,b_x'^{m-1}\,c_x'^{m-2}.$$

In dem Ausdruck (5) pag. 216 wurden zu seiner Berechnung die Symbole $a$, $b$ der Form $a_x^n = b_x^n \ldots$ in den Formeln I und II zusammengefaßt. Statt dessen kann dies auch in anderer Weise noch geschehen. Hier soll z. B. von den Formeln:

$$\text{III.} \quad a'_x(a\,b\,b'\,\varkappa) = \varkappa_x(a\,b\,b'\,a') - b'_x(a\,b\,\varkappa\,a') + b_x(a\,b\,\varkappa\,a') - a_x(b\,b'\,\varkappa\,a')$$

$$\text{IV.} \quad b'_x(a\,a\,a'\,\varkappa) = \varkappa_x(a\,a\,a'\,b') - a'_x(a\,a\,\varkappa\,b') + a_x(a\,a'\,\varkappa\,b') - a_x(a\,a'\,\varkappa\,b')$$

ausgegangen werden.

Führt man in analoger Weise wie vorher die Rechnung durch, so findet man, daß die Fläche (11) von vorher jetzt durch folgende Fläche ersetzt wird:

$$\begin{vmatrix} (s-1)\Phi_{\mathrm{I}} & (s-1)\Psi_{\mathrm{I}} & (s-1)X_{\mathrm{I}} & (n-1)\Delta_{\mathrm{I}} & \frac{m+2s-3}{3}G_{\mathrm{I}} \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & f_1 & g_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & f_2 & g_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & f_3 & g_3 \\ \varphi_4 & \psi_4 & \chi_4 & f_4 & g_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

wo die Definitionen gelten:

$$\Phi_1 = (\alpha a a' b')(\alpha b b' a') a_x'^{m-2} b_x'^{m-2} a_x^{n-1} b_x^{n-1} \alpha_x^{s-2}$$
$$\Psi^1 = (\beta a a' b')(\beta b b' a') a_x'^{m-2} b_x'^{m-2} a_x^{n-1} b_x^{n-1} \beta_x^{s-2}$$
$$X_1 = (\gamma a a' b')(\gamma b b' a') a_x'^{m-2} b_x'^{m-2} a_x^{n-1} b_x^{n-1} \gamma_x^{s-2}$$
$$\Delta_1 = (c a a' b')(c b b' a') a_x'^{m-2} b_x'^{m-2} a_x^{n-1} b_x^{n-1} c_x^{n-2}$$
$$G_1 = (c' a a' b')(c' b b' a') a_x'^{m-2} b_x'^{m-2} a_x^{n-1} b_x^{n-1} c_x'^{m-2}.$$

Setzt man nun $s = 1$, so geht das Flächenbüschel (1) pag. 215 in das Ebenenbüschel über:

$$\alpha_x + \lambda \beta_x + \mu \gamma_x = 0,$$

und die Gleichungen (11) und (12) werden:

$$(m-1) G(\varphi \psi \chi f) - \frac{(n-1)}{3} \Delta(\varphi \psi \chi g) = 0$$

$$\frac{(m-1)}{3} G_1(\varphi \psi \chi f) - (n-1) \Delta_1(\varphi \psi \chi g) = 0.$$

Durch Umrechnung kann man aber zeigen, daß:

$$\Delta_1 = \frac{\Delta}{3} \quad \text{und} \quad G = \frac{G_1}{3}.$$

Für den Fall $s = 1$ sind also die beiden Flächen (11) und (12) identisch.

## § 3. Berührung 3. Ordnung.

Nach den vorausgehenden Resultaten kann man leicht die Gleichung einer Fläche von der $s^{\text{ten}}$ Ordnung aufstellen. welche dem 3fach unendlich linearen System:

$$\varphi(x) + \varkappa \psi(x) + \lambda \chi(x) + \mu \omega(x) = 0$$

angehört, und welche die Raumkurve $f = 0$ und $g = 0$ in einem gegebenen Punkt $x$ von der 2. Ordnung berührt. Diese Gleichung ist bei variabeln $y$:

$$\begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(y) & \chi(y) & \omega(y) & 0 & 0 \\ (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)X & (s-1)\Omega & \frac{n+2s-3}{3}\Delta & (m-1)G \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & f_1 & g_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & f_2 & g_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & f_3 & g_3 \\ \varphi_4 & \psi_4 & \chi_4 & \omega_4 & f_4 & g_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

Die Größen $\Phi$, $\Psi$, $X$, $\Delta$ und $G$ sind durch (11) pag. 219 definiert, und es sei noch:

$$\omega(x) = \delta_x^s, \quad \Omega = (\delta\, a\, a'\, b)(\delta\, b\, b'\, a)\, a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{\,m-1} b_x'^{\,m-1} \delta_x^{s-2}.$$

Diese Gleichung (1) wird befriedigt für $y = x$, $y = x + dx$ und $y = x + 2\,dx + d^2 x$, wie man durch Anwendung der vorausgehenden Betrachtungen sehen kann.

Nehmen wir: $y = x + 3\,dx + 3\,d^2 x + d^3 x$, um eine Berührung 3. Ordnung zu erzielen, so transformieren sich die Elemente der 1. Reihe in:

$$\begin{aligned} &3(s-1)\, a_x^{s-2} a_{dx} a_{d^2x} + (s-1)(s-2)\, a_x^{s-3} a_{dx}^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &3(n-1)\, a_x^{n-2} a_{dx} a_{d^2x} + (n-1)(n-2)\, a_x^{n-3} a_{dx}^3, \\ &3(m-1)\, a_x'^{\,m-2} a'_{dx} a'_{d^2x} + (m-1)(m-1)\, a_x'^{\,m-3} a_{dx}'^{\,3}. \end{aligned} \quad (2)$$

Multipliziert man (8) pag. 217 mit $a_x^{s-2}$ und differenziert, so kommt:

$$\begin{aligned} &2\varrho^2 a_x^{s-2} a_{dx} a_{d^2x} + \varrho^2 (s-2)\, a_x^{s-3} + 2\,\varrho\, d\varrho\, a_x^{s-2} a_{dx}^2 \\ &= (n-2) a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{\,m-1} b_x'^{\,m-1} a_x^{s-2} \varkappa_x^2 (a a a' b)(a b b' a) a_{dx} \\ &+ (m-1) a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{\,m-2} b_x'^{\,m-1} a_x^{s-2} \varkappa_x^2 (a a a' b)(a b b' a) a'_{dx} \\ &+ \tfrac{1}{2}(s-2) a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{\,m-1} b_x'^{\,m-1} a_x^{s-3} \varkappa_x^2 (a a a' b)(a b b' a) a_{dx} \\ &+ (n-2) a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{\,m-1} b_x'^{\,m-1} a_x^{s} (a a' \varkappa b)(b b' \varkappa a) a_{dx} \\ &+ (m-1) a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{\,m-2} b_x'^{\,m-1} a_x^{s} (a a' \varkappa b)(b b' \varkappa a) a'_{dx} \\ &+ \tfrac{1}{2} \cdot s \cdot a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{\,m-1} b_x'^{\,m-1} a_x^{s-1} (a a' \varkappa b)(b b' \varkappa a) a_{dx} \end{aligned} \quad (3)$$

$$+2(n-2)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}a_x^{s-1}\varkappa_x(aa'\varkappa b)(abb'a)a_{dx}$$
$$+2(m-1)a_x^{n-2}b_x^{n-2}a_x'^{m-2}b_x'^{m-1}a_x^{s-1}\varkappa_x(aa'\varkappa b)(abb'a)a'_{dx}$$
$$+(s-)a_x^{n-2}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}a_x^{s-2}\varkappa_x(aa'\varkappa b)(abb'a)a_{dx}.$$

Es ist weiter:

$$\varrho\, a_{dx}\, a_x = (acc'\varkappa)\, a_x\, c_x^{n-1}\, c_x'^{m-1}$$
$$= [(acc'a)\varkappa_x - (ac\varkappa a)c'_x + (ac'\varkappa a)c_x - (cc'\varkappa a)a_x]\, c_x^{n-1} c_x'^{m-1}$$

wobei aber immer gilt:

$$c_x^n = 0 \quad \text{und} \quad c_x'^m = 0.$$

Relation (3) geht dann über in:

$$2\varrho^3 a_x^{s-2} a_{dx}\, a_{d^2x} + \varrho^3(s-2)a_x^{s-3}a_{dx}^3 + 2\varrho^2 d\varrho\, a_x^{s-2}a_{dx}^2 \tag{4}$$
$$=(n-2)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}a_x^{s-2}\varkappa_x^2 c_x^{n-1}c_x'^{m-1}(aaa'b)(abb'a)(acc'\varkappa)$$
$$+(m-1)a_x^{n-2}b_x^{n-2}a_x'^{m-2}b_x'^{m-1}a_x^{s-2}\varkappa_x^2 c_x^{n-1}c_x'^{m-1}(aaa'b)(abb'a)(a'cc'\varkappa)$$
$$+\tfrac{1}{2}(s\ \ 2)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}a_x^{s-3}\varkappa_x^3 c_x^{n-1}c_x'^{m-1}(aaa'b)(abb'a)(acc'a)$$
$$-\tfrac{1}{2}(s\ \ 2)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}a_x^{s-2}\varkappa_x^2 c_x^{n-1}c_x'^{m-1}(aaa'b)(abb'a)(cc'\varkappa a)$$
$$+(n-2)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}a_x^s a_{dx}\cdot\varrho(aa'\varkappa b)(bb'\varkappa a)$$
$$+(m-1)a_x^{n-2}b_x^{n-2}a_x'^{m-2}b_x'^{m-1}a_x^s a'_{dx}\cdot\varrho(aa'\varkappa b)(bb'\varkappa a)$$
$$+\tfrac{1}{2}s\,a_x^{n-2}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}a_x^{s-1}a_{dx}\cdot\varrho(aa'\varkappa b)(bb'\varkappa a)$$
$$+2(n-2)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}a_x^{s-1}\varkappa_x c_x^{n-1}c_x'^{m-1}(aa'\varkappa b)(abb'a)(acc'\varkappa)$$
$$+2(m-1)a_x^{n-2}b_x^{n-2}a_x'^{m-2}b_x'^{m-1}a_x^{s-1}\varkappa_x c_x^{n-1}c_x'^{m-1}(aa'\varkappa b)(abb'a)(a'cc'\varkappa)$$
$$+(s-1)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}a_x^{s-2}\varkappa_x^2 c_x^{n-1}c_x'^{m-1}(aa'\varkappa b)(abb'a)(acc'a)$$
$$-(s-1)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}a_x^{s-1}\varkappa_x c_x^{n-1}c_x'^{m-1}(aa'\varkappa b)(abb'a)(cc'\varkappa a).$$

Dies kann man anders schreiben:

$$2\varrho^3 a_x^{s-2} a_{dx}\, a_{d^2x} + \varrho^3(s-2)a_x^{s-3}a_{dx}^3 + 2\varrho^2 d\varrho\, a_x^{s-2}a_{dx}^2 \tag{5}$$
$$= \frac{s-2}{2}\varkappa_x^3\,\Phi' - \frac{2n+s-6}{2}\varkappa_x^2\,\Phi'' + (2n+s-5)\varkappa_x\,\Phi'''$$
$$+(s-1)\,\Phi^{\mathrm{IV}}\varkappa_x^2 + A\,\varphi + B\,d\varphi - (m-1)\,\varkappa_x^2\,\Phi^{\mathrm{VI}} + 2(m-1)\varkappa_x\,\Phi^{\mathrm{VII}}.$$

Hier bezeichnen $A$ und $B$ Größen, welche die Symbole $a$ nicht mehr enthalten und wir setzen:

$$\Phi' = (\alpha a a' b)(a b b' a)(a c c' a) a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \alpha_x^{s-3} c_x^{n-1} c_x'^{m-1}, \qquad (5^a)$$

$$\Phi'' = (\alpha a a' b)(a b b' a)(\varkappa c c' a) a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \alpha_x^{s-2} c_x^{n-1} c_x'^{m-1},$$

$$\Phi''' = (\varkappa a a' b)(a b b' a)(\varkappa c c' a) a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \alpha_x^{s-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} = \Sigma R_i \varphi_i,$$

wo:

$$R_i = (a b' b)_i (\varkappa a a' b)(\varkappa c c' a) a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1},$$

$$\Phi^{IV} = (a a' \varkappa b)(a b b' a)(a c c' a) a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} \alpha_x^{s-2},$$

$$\Phi^{VI} = (\alpha a a' b)(a b b' a)(\varkappa c c' a') a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-2} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} \alpha_x^{s-2},$$

$$\Phi^{VII} = (\varkappa a a' b)(a b b' a)(\varkappa c c' a') a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-2} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} \alpha_x^{s-2} = \Sigma P_i \varphi_i,$$

wo:

$$P_i = (a b' b)_i (\varkappa a a' b)(\varkappa c c' a') a_x^{n-2} b_x^{n-2} a_x'^{m-2} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1}.$$

Den Ausdruck für $\Phi_{IV}$ wollen wir noch weiter behandeln. Es ist:

$$\Phi^{IV} = (a b b' a)[(\varkappa c c' a)(\alpha a a' b) + (b c c' a)(a a' \varkappa \alpha) + (a \varkappa b \alpha)(a' c c' a)] c_x \Pi.$$

Das 1. Glied wird gleich $\Phi''$, das dritte verschwindet durch Vertauschung von $a'$ mit $c'$ identisch, und es bedeutet:

$$\Pi = a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} \alpha_x^{s-2} c_x^{n-2} c_x'^{m-1}.$$

Dann ist:

$$\Phi^{IV} = -\Phi'' - \tfrac{1}{2}(b c c' a)(a a' \varkappa \alpha)[(a b b' \alpha) c_x - (a c b' \alpha) b_x] \cdot \Pi.$$

$$= -\Phi'' - \tfrac{1}{2}(b c c' a)(a a' \varkappa \alpha)[a_x(\alpha b b' c) - \alpha_x(b b' a c)$$

$$+ b_x'(a b \alpha c)] \cdot \Pi$$

$$= \Phi'' + \tfrac{1}{2}(b c c' a)(a a' \varkappa \alpha)(c b' a b) a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-2} c_x'^{m-1} \alpha_x^{s-1}$$

da das 3. Glied verschwindet wegen $b_x'^m = 0$ und das 1. Glied wird:

$$\tfrac{1}{3}(a a' \varkappa \alpha)(\alpha b b' c)(b c c' a)$$

$$= \tfrac{1}{3}[(a a' \varkappa \alpha)(\alpha b b' c) - (c a' \varkappa \alpha)(\alpha b b' a) - (b a' \varkappa \alpha)(\alpha a b' c)](b c c' a) = 0.$$

Definieren wir noch:

$$\Phi^{V} = (bcc'a)(aa'\varkappa a)(cb'ab)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}c_x^{n-2}c_x'^{m-1}\alpha_x^{s-1}$$
$$= \Sigma S_i \varphi_i, \qquad (5^b)$$

so geht die rechte Seite des Ausdruckes (5) über in:

$$\frac{s-2}{2}\varkappa_x^3\,\Phi' - \frac{2n+3s-8}{2}\varkappa_x^2\,\Phi'' + (2n+s-5)\varkappa_x\,\Phi'''$$
$$+ \frac{s-1}{2}\varkappa_x^2\,\Phi^{V} \qquad (6)$$
$$+ A\varphi + B\,d\varphi - (m-1)\varkappa_x^2\,\Phi^{VI} + 2(m-1)\varkappa_x\,\Phi^{VII}.$$

Studiert man den Ausdruck $\alpha_x^{s-3}\alpha_{dx}^3$, so kommt:

$$\varrho^3\alpha_{dx}^3\alpha_x^{s-3} = (\alpha aa'\varkappa)(\alpha bb'\varkappa)(\alpha cc'\varkappa)a_x^{n-1}b_x^{n-1}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1}\alpha_x^{s-3}$$
$$= \tfrac{1}{2}\varkappa_x^2(\alpha aa'b)(\alpha bb'a)(\alpha cc'\varkappa)a_x^{n-2}b_x^{n-2}a_x'^{m-2}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1}\alpha_x^{s-3} \quad (7)$$
$$+ \varkappa_x(aa'\varkappa b)(\alpha bb'a)(\alpha cc'\varkappa)a_x^{n-2}b_x^{n-2}a_x'^{m-2}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1}\alpha_x^{s-2}$$
$$+ A'\varphi + B'\,d\varphi.$$

Durch Anwendung der Relation:

$$(\alpha cc'\varkappa)a_x c_x^{n-1}c_x'^{m-1} = [(\alpha cc'a)\varkappa_x - (cc'\varkappa a)\alpha_x]c_x^{n-1}c_x'^{m-1} \qquad (8)$$

erhält man:

$$\varrho^3\alpha_x^{s-3}\alpha_{dx}^3 = \tfrac{1}{2}\varkappa_x^3\Phi' - \tfrac{1}{2}\varkappa_x^2\,\Phi'' + \varkappa_x^2\,\Phi^{IV} + \varkappa_x\,\Phi''' + A'\varphi + B'd\varphi$$
$$= \tfrac{1}{2}\varkappa_x^3\Phi' - \tfrac{3}{2}\varkappa_x^2\,\Phi'' + \tfrac{1}{2}\varkappa_x^2\,\Phi^{V} + \varkappa_x\,\Phi''' + A'\varphi + B'd\varphi \qquad (9)$$

Multipliziert man die Gleichung (5) bzw. (6) mit $\frac{3}{2}(s-1)$ und zieht davon die mit $\frac{1}{2}(s-1)(s-2)$ multiplizierte Gl. (9) ab, so erhält man das Resultat:

$$3\varrho^3(s-1)\alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}\alpha_{d^2x} + \varrho^3(s-1)(s-2)\alpha_x^{s-3}\alpha_{dx}^3$$
$$= -3(s-1)\varrho^2 d\varrho\,\alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}^2 + A''\varphi + B''d\varphi + \frac{s-1\cdot s-2}{2}\Phi'\varkappa_x^3$$
$$-\tfrac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\Phi''\varkappa_x^2 + \tfrac{1}{2}(s-1)(6n+2s-13)\Phi'''\varkappa_x$$
$$+\tfrac{1}{4}(s-1)(2s-1)\Phi^{V}\varkappa_x^2 - \tfrac{3}{2}(m-1)(s-1)\varkappa_x^2\Phi^{VI}$$
$$+3(m-1)(s-1)\varkappa_x\Phi^{VII}.$$

Auf dieselbe Weise erzielt man andere Relationen, die aus (10) hervorgehen, indem man $\alpha$ durch $\beta$, $\gamma$, $\delta$ nacheinander ersetzt. Nimmt man aber $d$ an Stelle von $a\,(d_x^n = a_x^n = 0)$, so gehen die Ausdrücke (5ᵃ) über in:

$$\Delta' = (daa'b)(dbb'a)(dcc'a)a_x^{n-3} b_x^{n-2} d_x^{n-3} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} = 0 \quad (11)$$

$$\Delta'' = (daa'b)(dbb'a)(\varkappa cc'a)a_x^{n-3} b_x^{n-2} d_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1}$$

$$\Delta''' = (\varkappa aa'b)(dbb'a)(\varkappa cc'a)a_x^{n-3} b_x^{n-2} d_x^{n-1} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} = \Sigma R_i f_i$$

$$\Delta^{V} = (bcc'a)(aa'\varkappa d)(cb'ab)a_x^{n-3} b_x^{n-2} d_x^{n-1} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-2} c_x'^{m-1} = \Delta''$$

$$\Delta^{VI} = (daa'b)(dbb'a)(\varkappa cc'a')a_x^{n-2} b_x^{n-2} d_x^{n-2} a_x'^{m-2} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1}$$

$$\Delta^{VII} = (\varkappa aa'b)(dbb'a)(\varkappa cc'a')a_x^{n-2} b_x^{n-2} d_x^{n-1} a_x'^{m-2} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1}.$$

Daß $\Delta'$ identisch verschwindet, sieht man sofort bei Vertauschung der Symbole $a$ und $d$. Vertauscht man in $\Delta'''$ $b$ mit $d$, so wird:

$$\begin{aligned}\Delta''' &= \tfrac{1}{2}(\varkappa cc'a)(dbb'a)[(\varkappa aa'b)\,d_x \\ &\qquad -(\varkappa aa'd)\,b_x]\,a_x^{n-3} b_x^{n-2} d_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} \\ &= \tfrac{1}{2}(\varkappa cc'a)(dbb'a)[(\varkappa a'bd)\,a_x \\ &\qquad -(aa'bd)\,\varkappa_x]\,a_x^{n-3} b_x^{n-2} d_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} \\ &= \tfrac{1}{2}\varkappa_x \Delta'' \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}(\varkappa a'bd)(\varkappa cc'a)(dbb'a)a_x^{n-2} b_x^{n-2} d_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1}.\end{aligned}$$

Letzteres Glied ist aber Null, da:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{3}[(\varkappa a'bd)(\varkappa cc'a) - (\varkappa a'ad)(\varkappa cc'b) - (\varkappa a'ba)(\varkappa cc'd)] \\ &\qquad = \tfrac{1}{3}(\varkappa a'bd)(\varkappa cc'a) = 0\end{aligned}$$

Ebenso behandelt man $\Delta^{VII}$:

$$\begin{aligned}\Delta^{VII} &= \tfrac{1}{2}(\varkappa cc'a')(dbb'a)[(\varkappa aa'b)\,a_x \\ &\qquad -(\varkappa aa'd)\,b_x]\,a_x^{n-2} b_x^{n-2} d_x^{n-2} a_x'^{m-2} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1} \\ &= \tfrac{1}{2}(\varkappa cc'a')(dbb'a)[(\varkappa a'bd)\,a_x - (\varkappa abd)\,a'_x \\ &\qquad -(aa'bd)\,\varkappa_x]\,a_x^{n-2} b_x^{n-2} d_x^{n-2} a_x'^{m-2} b_x'^{m-1} c_x^{n-1} c_x'^{m-1}.\end{aligned}$$

Das 3. Glied ist gleich $\Delta^{VI}$, das 2. verschwindet bei Vertauschung von $a'$ und $c'$ identisch. und geht bei Vertauschung von $a$ mit $d$ in $\Delta^{VII}$ über. Also wird:

$$\Delta^{VII} = \tfrac{1}{3}\varkappa_x \Delta^{VI}.$$

Gleichung (10) nimmt dann die Form an:

$$\begin{aligned} 3\varrho^3(n-1)a_x^{n-2}a_{dx}a_{d^2x} + \varrho^3(n-1)(n-2)a_x^{n-3}a_{dx}^3 \\ = -3(n-1)\varrho^2 d\varrho a_x^{n-2}a_{dx}^2 - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)\Delta''\varkappa_x^2 \\ - \tfrac{1}{2}(m-1)(n-1)\varkappa_x^2\Delta^{VI}. \end{aligned} \tag{12}$$

Ebenso erhält man ähnliche Relationen, wenn noch $a = d'$ ($d_x'^m = a_x'^m = 0$) in (10) gesetzt wird:

$$\begin{aligned} G' &= (d'aa'b)(d'bb'a)(d'cc'a)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1}d_x'^{m-3} \\ G'' &= (d'aa'b)(d'bb'a)(\varkappa cc'a)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1}d_x'^{m-2} \\ G''' &= (\varkappa aa'b)(d'bb'a)(\varkappa cc'a)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1}d_x'^{m-1} = 0 \\ G^{V} &= (bcc'a)(aa'\varkappa d')(cb'ab)a_x^{n-3}b_x^{n-2}a_x'^{m-1}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1}d_x'^{m-1} = 0 \\ G^{VI} &= (d'aa'b)(d'bb'a)(\varkappa cc'a')a_x^{n-2}b_x^{n-2}a_x'^{m-2}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1}d_x'^{m-2} \\ G^{VII} &= (\varkappa aa'b)(d'bb'a)(\varkappa cc'a)a_x^{n-2}b_x^{n-2}a_x'^{m-2}b_x'^{m-1}c_x^{n-1}c_x'^{m-1}d_x'^{m-1} = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

$G'''$, $G^{V}$ und $G^{VII}$ verschwinden identisch. wie man durch Vertauschung der Symbole $b'$ mit $d'$, $a'$ mit $d'$ und $b'$ mit $d'$ sieht, so daß man für Gleichung (10) erreicht:

$$\begin{aligned} 3\varrho^3(m-1)a_x'^{m-2}a'_{dx}a'_{d^2x} + \varrho^3(m-1)(m-2)a_x'^{m-3}a_{dx}'^3 \\ = -3(m-1)\varrho^2 d\varrho a_x'^{m-2}a_{dx}'^2 - \tfrac{3}{2}(m-1)(n+m-3)\varkappa_x^2 G'' \\ + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\varkappa_x^3 G' - \frac{3}{2}(m-1)^2\varkappa_x^2 G^{VI}. \end{aligned} \tag{14}$$

Nach denselben Methoden wie bei § 2 kann man die Glieder

$$-3(s-1)\varrho^2 d\varrho a_x^{s-2}a_{dx}^2, \ldots, -3(n-1)\varrho^2 d\varrho a_x^{n-2}a_{dx}^2,$$
$$-3(m-1)\varrho^2 d\varrho a_x'^{m-2}a_{dx}'^2$$

vernachlässigen, wie auch in Hinsicht auf $f = 0$, $df = 0$ und $g = 0$, $dg = 0$ diejenigen, welche die Faktoren $\varphi$ und $d\varphi$ u. s. w. enthalten.

Damit auch die Glieder, welche $\Phi'''$, $\Psi'''$, $X'''$ und $\Omega'''$ enthalten, wegfallen, muß man von dem 4. und 5. der Ausdrücke (2) abziehen:

$$\tfrac{1}{2}(s-1)(6n+2s-13)\,\Delta'''\varkappa_x = \tfrac{1}{4}(s-1)(6n+2s-13)\,\Delta''\varkappa_x^2,$$
$$\tfrac{1}{2}(s-1)(6n+2s-13)\,G'''\varkappa_x = 0.$$

Ebenso entfernt man $\Phi^{\mathrm{V}}\ldots$, bzw. $\Phi^{\mathrm{VII}}\ldots$ durch Subtraktion von:

$$\frac{s-1}{4}(2s-1)\,\Delta^{\mathrm{V}}\varkappa_x^2 = \frac{s-1}{4}(2s-1)\,\Delta''\varkappa_x^2,$$
$$\frac{s-1}{4}(2s-1)\,G^{\mathrm{V}}\varkappa_x^2 = 0,$$
$$\text{bzw. } 3(m-1)(s-1)\varkappa_x\Delta^{\mathrm{VII}} = (m-1)(s-1)\,\Delta^{\mathrm{VI}}\varkappa_x^2,$$
$$3(m-1)(s-1)\varkappa_x G^{\mathrm{VII}} = 0.$$

Auf diese Weise erhalten die Glieder der 1. Reihe unserer Determinante folgende Form:

$$\begin{gathered}
\tfrac{1}{2}(s-1)(s-2)\varkappa_x^3\Phi' - \tfrac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\varkappa_x^3\Phi'' \\
-\tfrac{3}{2}(m-1)(s-1)\Phi^{\mathrm{VI}}\varkappa_x^2, \\
\tfrac{1}{2}(s-1)(s-2)\varkappa_x^3\Psi' - \tfrac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\varkappa_x^2\Psi'' \\
-\tfrac{3}{2}(m-1)(s-1\,\Psi^{\mathrm{VI}}\varkappa_x^2, \\
\tfrac{1}{2}(s-1)(s-2)\varkappa_x^3 X' - \tfrac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\varkappa_x^2 X'' \\
-\tfrac{3}{2}(m-1)(s-1)X^{\mathrm{VI}}\varkappa_x^2, \\
\tfrac{1}{2}(s-1)(s-2)\varkappa_x^3\Omega' - \tfrac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\varkappa_x^2\Omega'' \\
-\tfrac{3}{2}(m-1)(s-1)\Omega^{\mathrm{VI}}\varkappa_x^2, \\
-\left[\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)+\tfrac{1}{2}(s-1)(3n+2s-7)\right]\varkappa_x^2\Delta'' \\
-\tfrac{1}{2}(m-1)(n+2s-3)\varkappa_x^2\Delta^{\mathrm{VI}}, \\
\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)\varkappa_x^3 G' - \tfrac{3}{2}(m-1)(m+n-3)\varkappa_x^2 G'' \\
-\tfrac{3}{2}(m-1)^2\varkappa_x^2 G^{\mathrm{VI}}.
\end{gathered} \tag{15}$$

Die Determinante selbst nimmt den Wert an:

$$D = \tfrac{1}{2}\,\varkappa_x^3 A \quad \tfrac{3}{2}\,\varkappa_x^2 B - \tfrac{3}{2}(m-1)\,\varkappa_x^2 C \tag{16}$$

wenn man setzt:

$$A = \begin{vmatrix} r'\Phi' & r'\Psi' & r'X' & r'\Omega' & 0 & t\cdot G' \\ (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)X & (s-1)\Omega & \sigma'\Delta & (m-1)G \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & f_1 & g_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & f_2 & g_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & f_3 & g_3 \\ \varphi_4 & \psi_4 & \chi_4 & \omega_4 & f_4 & g_4 \end{vmatrix}, \tag{17}$$

$$B = \begin{vmatrix} \sigma\Phi'' & \sigma\Psi'' & \sigma X'' & \sigma\Omega'' & r\Delta'' & \varrho G'' \\ (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)X & (s-1)\Omega & \sigma'\Delta & (m-1)G \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & f_1 & g_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & f_2 & g_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & f_3 & g_3 \\ \varphi_4 & \psi_4 & \chi_4 & \omega_4 & f_4 & g_4 \end{vmatrix}, \tag{18}$$

$$C = \begin{vmatrix} (s-1)\Phi^{VI} & (s-1)\Psi^{VI} & (s-1)X^{VI} & (s-1)\Omega^{VI} & \sigma'\Delta^{VI} & (m-1)G^{VI} \\ (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)X & (s-1)\Omega & \sigma'\Delta & (m-1)G \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & f_1 & g_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_1 & f_2 & g_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & f_3 & g_3 \\ \varphi_4 & \psi_4 & \chi_4 & \omega_4 & f_4 & g_4 \end{vmatrix}, \tag{19}$$

ferner:

$$\begin{aligned} r' &= (s-1)(s-2), & \varrho &= (m-1)(m+n-3), \\ t &= (m-1)(m-2), & \sigma' &= \frac{n+2s-3}{3}, \\ \sigma &= (s-1)(n+s-3), & t' &= \frac{m-1}{s-1}, \\ r &= \tfrac{1}{3}\,[(n-1)(n-2)+(s-1)(3n+2s-7)]. \end{aligned} \tag{20}$$

Es bleibt noch übrig, von den Determinanten $B$ und $C$ einen Faktor $\varkappa_x$ abzuspalten. Setzt man:

$$d_x^n = e_x^n = f_x^n \quad \text{und} \quad d_x'^m = e_x'^m = f_x'^m,$$

$$\Pi' = M' \cdot N',$$

$$M' = \alpha_x^{s-2} \beta_x^{s-2} \gamma_x^{s-2} \delta_x^{s-2} a_x^{n-3} b_x^{n-3} c_x^{n-1} d_x^{n-2} e_x^{n-3} f_x^{n-3},$$

$$N' = a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x'^{m-1} d_x'^{m-2} e_x'^{m-1} f_x'^{m-1},$$

ferner:

$$E = \begin{vmatrix} \sigma(\alpha a a' b)(\alpha b b' a) \ldots r(d a a' b)(\alpha b b' a), & \varrho(d' a a' b)(d' b b' a) \\ (s-1)(\alpha e e' f)(\alpha f f' e) \ldots \sigma'(d e e' f)(d f f' e), & (m-1)(d' e e' f)(d' f f' e) \\ \alpha_1 \alpha_x \quad \ldots \quad d_1 d_x, & d_1' d_x \\ \alpha_2 \alpha_x \quad \ldots \quad d_2 d_x, & d_2' d_x \\ \alpha_3 \alpha_x \quad \ldots \quad d_3 d_x, & d_3' d_x \\ \alpha_4 \alpha_x \quad \ldots \quad d_4 d_x, & d_4' d_x \end{vmatrix},$$

Die zweite, dritte und vierte Kolonne dieser Determinante sind wie die erste gebaut, nur ist das Symbol $\alpha$ bzw. durch die Symbole $\beta, \gamma, \delta$ ersetzt.

Es wird dann:

$$B = E \cdot (\varkappa c c' a) b_x e_x f_x \cdot \Pi';$$

nun wendet man die Idenditát an:

$$(\varkappa c c' a) e_x = a_x(\varkappa c c' e) - c_x'(\varkappa c a e) + c_x(\varkappa c' a e) - \varkappa_x(c c' a e).$$

Dadurch wird $B$ in eine Summe von vier Gliedern transformiert. Das zweite und dritte Glied dieser Summe verschwinden, weil sie die Faktoren $c_x^n = 0$ und $c_x'^m = 0$ enthalten; das 1. Glied ist gleich $B$, wie man erkennt, wenn man $a$ mit $e$, $b$ mit $f$, $a'$ mit $e'$ und $b'$ mit $f'$ vertauscht. Man erhält also:

$$B = \tfrac{1}{2} \cdot \varkappa_x \cdot E \cdot (e c c' a) b_x f_x \cdot \Pi'. \tag{21}$$

Ebenso behandelt man die Determinante $C$:

$$C = F \cdot (\varkappa c c' a') b'_x c'_x f'_x \cdot H''.$$

wo:

$$H'' = M'' \cdot N'',$$

$$M'' = a_x^{s-2} \beta_x^{s-2} \gamma_x^{s-2} \delta_x^{s-2} a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-1} d_x^{n-2} e_x^{n-2} f_x^{n-2},$$

$$N'' = a_x'^{m-2} b_x'^{m-2} c_x'^{m-1} d_x'^{m-2} e_x'^{m-2} f_x'^{m-2},$$

und $F$ aus $E$ hervorgeht, wenn in $E$ man ersetzt $r$ durch $\sigma'$, $\varrho$ durch $m-1$, und $\sigma$ durch $(s-1)$.

Durch Anwendung der Idendität:

$$(\varkappa c c' a') e'_x = a'_x (\varkappa c c' e') - c'_x (\varkappa c a' e') + c_x (\varkappa c' a' e') - \varkappa_x (c c' a' e')$$

geht die Determinante $C$, in ähnlicher Weise wie oben $B$, über in:

$$C = \tfrac{1}{2} \varkappa_x \cdot F (e' c c' a') b'_x f'_x \cdot H''. \tag{22}$$

Das Resultat unserer Untersuchung ist also:

Die Punkte, in denen eine Raumkurve von einer Fläche des linearen Systems:

$$\varphi(x) + \varkappa \psi(x) + \lambda \chi(x) + \mu \omega(x) = 0$$

von der 3. Ordnung berührt wird, sind ihre Schnittpunkte mit der Fläche:

$$D = A - 3 B_0 - 3(m-1) C_0 = 0 \tag{23}$$

wo $A, B, C$ durch die Ausdrücke (17), (21) und (22) definiert sind, und:

$$B = \varkappa_x \cdot B_0, \quad C = \varkappa_x \cdot C_0$$

gesetzt ist.

Setzt man in der Fläche (23) $s = 1$, so erhält man eine Fläche von der Ordnung $6m + 6n - 20$, welche die Kurve $f = 0$, $g = 0$ in den $nm(6m + 6n - 20)$ Berührungspunkten von Wendungsberührebenen schneidet.

Die Gleichung dieser Fläche erscheint in der Form:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}(m-2) \cdot \Delta \cdot G' - (b c c' a) R \cdot [&(n-2)(d a a' b)(d b b' a)(d' e e' f)(d' f f' e) \\ &-(m+n-3)(d' a a' b)(d' b b' a)(d e e' f)(d f f' e)] \quad (24) \\ -(m-1)(e' c c' a') S \cdot [&(d a a' b)(d b b' a)(d' e e' f)(d' f f' e) \\ &-(d' a a' b)(d' b b' a)(d e e' f)(d f f' e)] = 0. \end{aligned}$$

Hier sollen die Definitionen gelten: .

$$R = a_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1} d_x^{n-2} e_x^{n-3} f_x^{n-2} a_x'^{m-1} b_x'^{m-1} c_x'^{m-1} d_x'^{m-2} e_x'^{m-1} f_x'^{m-1},$$

$$S = a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-1} d_x^{n-2} e_x^{n-2} f_x^{n-2} a_x'^{m-2} b_x'^{m-1} c_x'^{m-1} d_x'^{m-2} e_x'^{m-2} f_x'^{m-1},$$

und für $\Delta$ und $G'$ gelten die Bezeichnungen von p. 219 und 226.

Die Gleichung (24) kann aber noch weiter vereinfacht werden, da die beiden Glieder in der 2. und 3. Summe durch Vertauschung von $a$ mit $e$, $b$ mit $f$, $a'$ mit $e'$ und $b'$ mit $f'$ ineinander übergehen. Es wird Gleichung (24) jetzt in der Gestalt erscheinen:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}(m-2)\Delta G' - [(m+2n-5)(ecc'a)R + 2(m-1)(e'cc'a')S] \\ \cdot (daa'b)(dbb'a)(d'cc'f)(d'ff'e) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Dies ist die Gleichung der Clebsch'schen Fläche in symbolischer Form. Die Unsymetrie rührt davon her, daß der Ausdruck (5) p. 216 in verschiedener Weise behandelt werden kann, wie am Schlusse von § 2.



## Öffentliche Sitzung

zur Feier des 148. Stiftungstages

am 16. März 1907.

---

Die Sitzung eröffnete der Präsident der Akademie, Geheimrat Dr. Karl Theodor v. Heigel, mit folgender Ansprache:

Mit Frühlingsanfang findet ein Arbeitsjahr unserer Akademie, heuer seit der Stiftung das 148., seinen Abschluß. Die Wende bietet Anlaß, wenigstens einen Blick auf die jüngste Vergangenheit zu werfen, auf die Tätigkeit unserer Körperschaft und der mit ihr vereinigten Sammlungen und Institute im abgelaufenen Jahre.

Die Mitteilungen über die Klassensitzungen, sowie die gedruckten Referate und Abhandlungen geben Zeugnis — ich darf wohl sagen — von ehrlicher, emsiger Arbeit zur Förderung menschlicher Erkenntnis auf allen Wissensgebieten, um, wie es Bacon in seinem Buche De dignitate et augmentis scientiarum von den Gelehrten fordert, unser wehbeladenes Geschlecht mit neuen Kräften und Werken (novis operibus et potestatibus) zu bereichern, die feindselige Natur zur Helferin zu wandeln, die zahllosen Übel auszurotten oder doch zu mildern und allmählich der heiligen Zone des höchsten Wissens näher zu kommen.

Den Akademien ist gerade in unserer Zeit eine wichtige Aufgabe beschieden. Die Wissenschaft hat sich im 19. Jahrhundert so unendlich ausgedehnt und so mannigfach gespalten, daß auch erleuchtete Geister nur noch einen Bruchteil über-

schauen und nur ein kleines Gebiet mit Aussicht auf Erfolg anbauen können. In dieser allgemeinen Zerteilung und Zersplitterung bietet eine Akademie, wie die unsere, für die nach allen Richtungen auseinandergehenden Disziplinen einen Mittel- und Sammelpunkt, einen Fokus, in welchem die in Folge der weit verästelten Spezialisierung gebrochenen Licht- und Wärmestrahlen der Wissenschaft zusammentreffen. Der Einzelne vermag heute nicht mehr eine Universalität des Wissens zu erreichen, doch was dem Individuum nicht vergönnt ist, vermag eine verständig aus jüngeren Kräften sich immer wieder ergänzende und dadurch verjüngende Körperschaft. Durch sie und in ihr ist im Wechsel der Zeiten und Menschen eine segensvolle Kontinuität ermöglicht: reife Früchte entwickeln aus sich Keime, die sich zu Blüten entfalten und dann ihrerseits auch wieder Frucht werden.

Auf die Tätigkeit unserer wissenschaftlichen Institute brauche ich an dieser Stelle nicht einzugehen, da sie als Lehranstalten in näherem Zusammenhang mit den Hochschulen stehen. Ich kann mich beschränken auf die mit den Instituten verbundenen Sammlungen und darf auch hier, um die Geduld meiner Hörer nicht über Gebühr in Anspruch zu nehmen, nur die wichtigsten Veränderungen und die wertvollsten Erwerbungen herausgreifen.

„Am Ausbau der Wissenschaft“ sagt Du Bois-Reymond, „beteiligen sich alle Kulturvölker in dem Maß, wie sie diesen Namen verdienen“. Doch kommt auch in Betracht, welche materiellen Mittel zur Verfügung stehen. Wissenschaft ist an sich ebensowenig für Geld zu haben, wie Kunst, aber hier wie dort spielt das allgemeine Wertausgleichungsmittel eine leider gar bedeutsame Rolle. Zur Untersuchung der Naturkräfte braucht man Laboratorien und Maschinenhallen, Apparate und Ingredienzien aller Art; die Geisteswissenschaften haben Büchereien und Kunstsammlungen nötig; nicht bloß die eigentlichen Forschungsreisen beanspruchen namhafte Summen, auch Reisen zur Besichtigung fremder Institute, zur Benützung auswärtiger Archive und Bibliotheken sind unumgänglich erforder-

lich. Und nur das Neueste und Beste ist für diese Zwecke gut genug, denn in der Wissenschaft darf es keinen Stillstand geben, ebensowenig in Sprach- und Geschichtsforschung, wie in den exakten Wissenschaften.

Nur Unverstand könnte behaupten, daß es in den deutschen Staaten den Unterrichtsverwaltungen und den Volksvertretungen an Verständnis für den Segen der geistigen Arbeit und an gutem Willen zu ausgiebiger Unterstützung mangelt. Doch der Staat allein kann nicht allen Anforderungen Genüge leisten. Die Wissenschaft wie die Kunst kann der opferwilligen Hilfe der Privaten nicht entraten.

Da möchte die Frage berechtigt erscheinen: Wie kommt es, daß gerade im Lande der Denker und Dichter so selten wirklich bedeutende Schenkungen und Stiftungen zu Förderung wissenschaftlicher Forscherarbeit zu verzeichnen sind? Darauf dürfte zu erwidern sein: Deutschland ist heute glücklicher Weise nicht mehr bloß das vom Ausland so liebevoll und geringschätzig angesehene Land der Denker und Dichter. Das neue deutsche Reich ist nicht nur eine politische Macht geworden, sondern auch in wirtschaftlicher Beziehung gewachsen und erstarkt. Doch auch heute noch sind Multimillionäre in Berlin und München und Dresden seltener anzutreffen, als in St. James Street oder in der 5. Avenue in New York.

Immerhin fehlt es in Deutschland nicht an großmütigen und verständigen Gönnern der Künste und Wissenschaften. Man braucht nur die Museen in Leipzig, Hamburg, Frankfurt zu besuchen, um dafür tröstliche Gewähr zu finden.

Vielleicht würde rühmliche Freigebigkeit noch häufiger betätigt werden, wenn nicht die Opferwilligen ein eigentümliches Vorurteil der öffentlichen Meinung: „Es geschieht ja doch bloß aus Eitelkeit!“ zu scheuen hätten.

Mag sein, daß das Streben, sich und seinen Besitz zu zeigen, an manchen öffentlichen Spenden Anteil hat. Mag sein, daß neben anderen Gründen, die den Pariser Bankier Osiris vor einigen Wochen bewogen, dem Pasteur'schen Institut drei Millionen Franks zu schenken, auch die Absicht mitwirkte,

von sich sprechen zu machen. Jedenfalls ist selbst diese Eitelkeit nicht so verwerflich, wie es mancher Diogenes in seiner Biertonne glauben machen will. Rühmlicher Eitelkeit verdankt die Welt die ägyptischen Pyramiden und das Grab des Hadrian, den Moses von Michel Angelo und Mozarts Requiem. Rühmlicher Eitelkeit hat es Amerika zu danken, daß seine Kunstsammlungen und Lehranstalten von Jahr zu Jahr den europäischen Schwesterinstituten ebenbürtiger werden. Wenn ein Mitbürger zu wissenschaftlichen oder künstlerischen Zwecken einen Teil seines Vermögens opfert, so dient er dem Gemeinwohl und verdient den Dank des Vaterlandes.

Ich erfülle freudig diese Dankespflicht, indem ich daran erinnere, daß auch unserer Akademie im abgelaufenen Jahre wertvolle Gaben und Stiftungen zugewendet worden sind.

Auf gnädige Anregung Ihrer Königlichen Hoheit Prinzessin Therese, unseres Ehrenmitglieds, wurde mit Unterstützung von Gönnern, die nicht genannt sein wollen, eine reiche Sammlung peruanischer Altertümer für das ethnographische Museum erworben. Um dem Publikum Gelegenheit zu bieten, die seltenen Reste einer untergegangenen Kultur kennen zu lernen, und zugleich um den Bestrebungen unserer Akademie die Sympathie weiterer Kreise zu gewinnen, wurden die Peruana ein paar Wochen lang öffentlich in unserem Festsaal ausgestellt. Ich lade wohl kaum den Vorwurf der Ruhmredigkeit auf mich, wenn ich von einem durchschlagenden Erfolg spreche und den Zuwachs für unser Museum als einen hocherfreulichen bezeichne, und ich weiß mich Eins mit allen Kollegen, wenn ich der großmütigen Stifter dankbar gedenke und auch an dieser Stelle unserem hochverehrten Ehrenmitglied herzlichen und ehrerbietigen Dank ausspreche.

Die von dem deutschen Arzt Dr. Gaffron in Lima angelegte Sammlung bietet ein nahezu erschöpfendes Bild der Kultur jenes Landes der Gegensätze, wo Kunst und Natur in großartigen und mannigfaltigen Formen wetteifern, wo am Fuße himmelanstrebender Berge und an den Ufern geheimnisvoller Seen, inmitten unzugänglicher Wüsten und lachender

Fluren die Reste imposanter Baudenkmäler und die düsteren Grabstätten der Incas und der von ihnen bezwungenen Urbevölkerung sich erheben. Von Kennern und Technikern wird dem in unserer Sammlung befindlichen Gold- und Silberschatz, den Geweben, den Holzschnitzereien, den keramischen Objekten ein hoher künstlerischer und antiquarischer Wert beigemessen. Die Geschichte der Ornamentik wird durch diese Nascakrüge und Ponchos um manches neue Blatt bereichert werden. Nur wenige Sammlungen der Welt haben so köstliche Reliquien ältester indianischer Kultur aufzuweisen. Um so dankbarer ist anzuerkennen, daß die K. Staatsregierung für die neue Erwerbung, die im überfüllten ethnographischen Museum nicht mehr Platz finden kann, in provisorischer Weise geeignete Räume im Studiengebäude des Nationalmuseums zur Verfügung gestellt hat.

Ein hochherziger Stifter im idealsten Sinne war unser lieber Kollege, Professor Wilhelm Königs, den uns der neidische Tod im vorigen Jahre entrissen hat. Ohne jeden Hintergedanken, nur weil er edel, hilfreich und gut, hat er einen beträchtlichen Teil seines Vermögens für wissenschaftliche Zwecke bestimmt. 50000 M. hat er seiner eigenen Adolf von Baeyer-Jubiläums-Stiftung für chemische Forschungen zugewendet, 50000 M. der Münchener Bürgerstiftung, außerdem noch besonders 10000 M. dem chemischen Laboratorium. Er schied aus dem Leben, ehe er seine von vollem Verständnis für die wirklichen Bedürfnisse zeugende Absicht, für botanische, zoologische, chemische Forschung noch etwas zu tun, ins Testament aufnehmen konnte. In pietätvoller Weise wurde nichts desto weniger der letzte Wunsch des Verblichenen von seiner Familie erfüllt. Herr Regierungsrat Richard Königs in Düsseldorf richtete, als ihm die Annahme der Stiftung von Seite der K. Staatsregierung bekannt gegeben war, an das Präsidium die hochherzigen Worte: „Dies ist die schönste Ehrung für den Verstorbenen, der bei Lebzeiten wiederholt dem Wunsche Ausdruck gegeben hat, daß die besitzenden Kreise in Deutschland mehr noch als bisher angeregt werden möchten, den Uni-

versitäten und wissenschaftlichen Instituten reiche Zuwendungen zur Förderung wichtiger Forschungen zu machen.“ Ehre dem edlen Spender und seinen Angehörigen!

Zahlreiche kleinere Geschenke an das Münzkabinett, an die anthropologisch-prähistorische, die geologische und paläontologische, die mineralogische und die zoologische Sammlung werden im gedruckten Bericht bekannt gegeben werden. Heute sei nur darauf hingewiesen, daß das Antiquarium durch den neuen Konservator Professor Furtwängler eine durchgreifende Reform erfahren hat. Wenn auch die räumlichen Verhältnisse nichts weniger als günstig sind, so wird doch die mustergiltige Aufstellung auch weiteren Kreisen zum Bewußtsein bringen, daß München im Antiquarium eine Sammlung der neuerdings so hochgeschätzten antiken Kleinkunst besitzt, die gegenwärtig zwar noch nicht umfangreich ist, dafür aber Stücke von erlesener Schönheit aufzuweisen hat. Diese Erkenntnis hat auch bereits Frucht gezeitigt. Unter einer stattlichen Anzahl neu aufgestellter, besonders reizender Gegenstände findet sich die zur Nacheiferung spornende Bezeichnung: „Leihgabe des bayerischen Vereins der Kunstfreunde“ (Museumsverein).

Die Erforschung der Urgeschichte Bayerns, für welche in der jüngsten Zeit ein lebhaftes Interesse auch in den historischen Vereinen des Königreiches erwacht ist, hat von Seite des Staates eine dankenswerte Förderung durch Erhöhung des Jahresetats von 4000 auf 8000 M. erfahren. Um auch die Wünsche der auswärtigen Gesellschaften kennen zu lernen, lud die akademische Kommission für Urgeschichte Vertreter des neu gegründeten „Verbands der bayerischen Geschichts- und Urgeschichtsvereine“ zu einer kombinierten Sitzung am 16. Dezember vorigen Jahres ein. Von dieser Versammlung wurde ein systematisches Arbeitsprogramm gemeinsam festgestellt; in einer Sitzung der akademischen Kommission am 27. Februar wurde es nach nochmaliger Beratung der einzelnen Punkte genehmigt. Als die drei vordringlichsten Hauptaufgaben der prähistorischen Forschung in Bayern haben demgemäß zu gelten: 1. die Vollendung der Untersuchung der

römischen Kastelle, 2. die Erforschung der vorzeitlichen, zum Teil bis in die Steinzeit zurückreichenden Wohnungsstätten, 3. die Inventarisierung der Bodenaltertümer und der prähistorischen Sammlungen.

Es ist zu hoffen, daß es bei gutem Willen aller Beteiligten gelingen wird, die zur Mitarbeit an der urgeschichtlichen Forschung berufenen Kräfte zu vereinigen, insbesondere die berechtigten Ansprüche der Archäologie zu erfüllen, ohne die ebenso unanfechtbaren Rechte der naturwissenschaftlichen Disziplinen zu beeinträchtigen.

Vom Thesaurus linguae latinae sind während des verflossenen Jahres ausgegeben worden: die Schlußlieferung des II. Bandes, die 1. Lieferung von Band III und die 1. und 2. Lieferung von Band IV. Für den rascheren Fortgang des großen Unternehmens war es von Wert, daß vom III. Bande ab die Eigennamen gesondert bearbeitet und herausgegeben werden sollen. Auch der Druck dieses Eigennamen-Supplements hat bereits begonnen. An Stelle des nach Halle berufenen Redaktors Professor Ihm trat am 1. April 1906 Dr. Berthold Maurenbrecher, bisher Privatdozent an der Universität Halle. Die Frage der Räumlichkeiten hat sich leider noch nicht in befriedigender Weise lösen lassen. Mit der gesamten wissenschaftlichen Welt beklagt der Thesaurus das Hinscheiden des hochverdienten Vorsitzenden der Thesaurus-Kommission, Seiner Exzellenz Herrn Dr. von Hartel in Wien.

Auf Antrag der Wiener Akademie haben die fünf deutschen kartellierten Akademien im Jahre 1906 beschlossen, eine Sammlung und kritische Ausgabe der mittelalterlichen Bibliothekkataloge Deutschlands in Angriff zu nehmen. Es sollen damit diese wichtigen, aber weit zerstreuten und schwer benützbaren Dokumente der literarischen Kultur und Überlieferungsgeschichte des Mittelalters in einer ihrer Bedeutung entsprechenden Weise zugänglich gemacht werden. Die Arbeit wurde so verteilt, daß die Wiener Akademie die Kataloge Österreichs, die Münchener Akademie die übrigen deutschen Kulturkreise übernahm. Die Münchener Akademie erfreut sich dabei der

weitgehenden Unterstützung der Berliner Akademie und der Gesellschaften der Wissenschaften zu Leipzig und Göttingen. Die gleichmäßige Ausführung des Unternehmens wird verbürgt durch Einsetzung der von den einzelnen Kartell-Genossen ernannten „Bibliothek-Kommission“ (Berlin Burdach, Göttingen Schröder, Leipzig Hauck, München Traube, Wien v. Ottenthal). Die Münchener Akademie ihrerseits setzte zur Durchführung ihrer besonderen Aufgabe eine Kommission ein, die aus den Professoren Traube, Grauert und Vollmer besteht. Diese Kommission ernannte zum Redaktor der Ausgabe den Privatdozenten an hiesiger Universität Dr. Sigmund Hellmann. An einzelnen großen Bibliotheken läßt sie durch eigene Mandatare das Material sammeln und zum Teil selbständig bearbeiten.

## Zographos-Preis.

Auf die von der Kommission der Zographos-Stiftung an unserer Akademie am 14. März 1904 gestellte Preisaufgabe „Die Metrik der kirchlichen und profanen Poesie der Byzantiner“ ist rechtzeitig eine Abhandlung mit dem Motto: „Oriens Graecus“ eingelaufen.

Der Schwerpunkt der Arbeit fällt auf die literarisch wertvollste Gattung der byzantinischen Poesie, die alten Kirchenlieder. Auf diesem Gebiete hat der Verfasser die eingehendsten Studien gemacht und viel Neues gefunden. Auch über die spätere Kirchendichtung wird das Wesentliche mitgeteilt. In den der Profanpoesie gewidmeten Kapiteln beschreibt der Verfasser vor allem auf Grund peinlichster Detailuntersuchungen die Entwickelungsgeschichte und die Gesetze des byzantinischen Zwölfsilbers, dann auch die übrigen Metren, besonders den sogenannten „politischen“ Vers. Wichtige Nachweise gibt der Verfasser auf Grund metrischer Beobachtungen über gewisse sprachliche Eigentümlichkeiten und besonders die Akzentverhältnisse. Die Bedeutung der Metrik für die Textkritik wird treffend hervorgehoben und die Stellung unserer Handschriften zu den Eigentümlichkeiten der metrischen Form scharf charakterisiert.

Die Darstellung bewegt sich größtenteils in objektiver Form, ist aber immer interessant und oft spannend. Der Verfasser hat außer einem reichen Handschriftenmaterial und den vorhandenen Ausgaben auch die älteren theoretischen Untersuchungen in gewissenhafter Weise verwertet; er ist aber durch scharfsinnige und mühevolle Studien sowohl in vielen Einzelheiten als auch in der vergleichenden Betrachtung der metrischen Formen, in der Prüfung ihres Verhältnisses zur literarischen Entwickelung und in anderen allgemeinen Fragen erheblich über die Vorgänger hinausgekommen. Ihm gebührt das Verdienst, zum erstenmale ein auf breiter Grundlage aufgebautes, sowohl zur Einführung geeignetes, als zu weiteren Studien anregendes Lehrbuch der byzantinischen Metrik geliefert zu haben. Die Arbeit erscheint als eine vortreffliche, in den meisten Punkten erschöpfende Lösung der gestellten Aufgabe und die Akademie hat daher beschlossen, der Abhandlung den Preis von 1500 M. zu erteilen.

Als Name des Autors ergab sich Dr. Paul Maas, München.

Als neue Preisaufgabe mit dem Termin 31. Dezember 1910 stellt die Akademie:

„Das Plagiat in der griechischen Literatur", untersucht auf Grund der philologischen Forschung über *κλοπή* und *συνέμπτωσις*, der rhetorisch-ästhetischen Theorie und der literarischen Praxis des Altertums.

Aus den Zinsen des **Thereianosfonds** konnten zwei Preise von je 800 M. verteilt werden:

1. an den Gymnasialprofessor Dr. Otto Stählin für den I. und II. Band seiner Ausgabe des Clemens Alexandrinus.

2. an den Gymnasialprofessor Dr. Th. Preger in Ansbach für Band I und II seiner Ausgabe der Scriptores originum Costantinopolitanarum.

Außerdem erhielten: 1. Kustos Dr. Curtius für Untersuchungen zur Geschichte der korinthischen und protokorinthischen Keramik 900 M.

2. Prof. Furtwängler und Prof. Reichhold zur Fortsetzung ihres Werkes: „Griechische Vasenmalerei“ 2000 M.

3. Prof. Krumbacher zur Fortführung der „Byzantinischen Zeitschrift“ 1500 M.

Aus den Renten des **Mannheimer Fonds** wurden genehmigt:

1. 3000 M. zum Ankauf eines herrlichen Bronzeklapp-Spiegels mit versilberter Gravierung, sowie mehrerer Tanagrafiguren für das K. Antiquarium.

2. 2000 M. zur Erwerbung der vom verstorbenen Zoologen Selenka auf Borneo gesammelten Affen- und Reptilien-Skelette.

Aus der **Münchener Bürger- und Cramer-Klett-Stiftung** konnten folgende Unterstützungen gewährt werden:

1. 720 M. an Prof. v. Groth für Arbeiten zur „chemischen Kristallographie“.

2. 600 M. an Prof. Bürker in Zürich zu Untersuchungen der physiologischen Wirkung des Höhenklimas.

3. 1000 M. an den Privatdozenten Dr. Gürber in Würzburg zu Forschungen über Veränderungen des Blutes unter dem Einfluß der Luftverdünnung.

4. 900 M. an den Gymnasialprofessor und Privatdozenten der technischen Hochschule Dr. Hermann Stadler für seine Studien zur Herausgabe der zoologischen Schriften des Albertus Magnus.

Aus der **Wilhelm Königs-Stiftung** zu Ehren Adolfs v. Baeyer wurden verliehen:

1. 300 M. an Prof. Karl Hofmann zur Beschaffung norwegischer Mineralien.

2. 200 M. an Prof. Dimroth zu Untersuchung der Carminsäure.

Aus dem **Etat für naturwissenschaftliche Erforschung des Königreiches**:

1. 700 M. an die paläontologische Sammlung des Staates zu Aufsammlungen in Bayern und den Nachbargebieten.

2. 300 M. an die ornithologische Gesellschaft zu weiteren ornithologischen Forschungen.

3. 400 M. an die Bayerische botanische Gesellschaft zur pflanzengeographischen Erforschung des Landes.

4. 300 M. an den Kuraten Dr. Familler in Karthaus Prüll für bryologische Arbeiten.

Vielleicht darf ich zum Schluß meiner Mitteilungen noch an ein zweites Wort Francis Bacons erinnern: „Wer die Wissenschaft fördert, ehrt die Menschheit und nützt den Menschen!"

---

Aus den Erwerbungen der **wissenschaftlichen Staatssammlungen** und den Geschenken des Jahres 1906 seien die folgenden hervorgehoben:

**Anthropologisch-prähistorische Sammlung.** Erwerbungen: Gipsabgüsse von bayerischen Funden aus den Sammlungen der historischen Vereine in Regensburg, Dillingen, Landshut, Augsburg, Traunstein, Friedberg, St. Ottilien, des Germanischen Museums in Nürnberg und des Museums für Völkerkunde in Berlin. 2 Goldohrringe aus dem Reihengräberfeld bei Allach, einige La-Tène-Fundgegenstände aus Manching, ein Reitergrab aus der Karolingerzeit (ausgegraben bei Schwabmühlen). Geschenke: von Dr. Hugo Obermaier Pseudoeolithen aus der Kreidemühle in Mantes; von Dr. Schweinfurth (Berlin) eine Kollektion von Eolithen aus Ägypten; von Dr. Rutot (Brüssel) eine systematische Kollektion von eolithischen und paläolithischen Silexartefakten aus Belgien; von Dr. Jacobs Funde aus Vojkovici in Bosnien; von Stud. Sprater bemalte neolithische Scherben aus Erösd

(Ungarn); von Medizinalrat Dr. Thenn in Beilngries sämtliche Ergebnisse seiner Reihengräberforschungen bei Beilngries; von Kommerzienrat Ludowici in Jockgrim das Modell eines römischen Bades; von der Stadtgemeinde München als Leihgabe die Funde aus 6 Hockergräbern vom Ende der Steinzeit bzw. Anfang der Bronzeperiode und aus 170 Reihengräbern der Völkerwanderungszeit, die bei der Kanalisation der Wolfratshauserstraße von der städtischen Baubehörde ausgehoben wurden.

**Antiquarium.** Erwerbungen: Bronzespiegel mit Sirene als Grifffigur, strengen Stiles; Bronzefigur eines Stieres als Votiv; archaisches Gorgoneion aus Euboea; Gorgoneion freien Stiles, von einem Gefäße stammend; griechischer Spiegel mit Palmettenornament. Von Terrakotten: Europa auf dem Stier, Frau auf Kline, beide strengen Stiles; Göttin auf dem Greif, freier Stil phidiasischer Zeit; Kind in der Wiege, hellenistisch; geflügelter Knabe mit Hündchen, auf der Rückseite Töpfername; eine Gruppe zweier Kinder; Hermes Kriophoros, archaisch; brodbackende Frau; Göttin mit Vogel auf der Schulter; Reiter, geometrisch-böotisch; Atthis, sitzend; primitives glockenförmiges Idol; Kopf eines Nubiers, aus Smyrna; Herakles mit Keule, Motiv einer großen Statue; Eros auf Delphin; Knabe mit Schusserbeutel. Aus Marmor: Statuette eines bekleideten Mädchens, praxitelisch. Aus Stuck: ägyptischer Porträtkopf. Aus Glas: mehrfarbige Perle mit menschlichen Köpfen verziert.

**Ethnographisches Museum.** Erwerbungen: 77 Nummern, von denen keine hervorragend ist.

**Botanischer Garten.** Geschenke: Nordische Pflanzen von Frau Dr. Retvoll; Alpenpflanzen aus Südtirol und der Schweiz von Professor Goebel und Kustos Dr. Hegi. Eine Sammlung neuseeländischer Moose von Prof. Goebel und eine größere Anzahl bayerischer Moose von Kurat Dr. Familler in Karthaus Prüll bei Regensburg.

**Botanisches Museum.** Erwerbungen: 100 Arten aus Sizilien (Centuria V des Herbarium Siculum von Dr. Ross); 100 aus den canarischen Inseln; 136 aus British Columbia; 250 von Paraguay; 150 aus Süd-Bolivien; 50 aus dem Salicetum exsicatum von Ad. Toepffer. Geschenke: 51 Arten aus Australien von Professor Goebel; 47 aus dem Herbarium des botanischen Gartens zu Calcutta; 133 aus Guatemala und Honduras von Donell Smith (Baltimore); 26 Sapindaceen aus den Philippinen von dem Government Laboratorium in Manila; 4 aus Aden von Hofrat Martin; 18 Sapindaceen aus den Philippinen; 84 Arten der Flora exsiccata Bavarica fasc. XII von der botanischen Gesellschaft in Regensburg; 36 Stammstücke von Gewächshauspflanzen des botanischen Gartens in München; 6 der Gattung Brownea aus belgischen Gärten.

**Geologische und paläontologische Sammlung.** Erwerbungen: Fossile Fische aus dem Silur und Devon Schottlands, der Trias von Adnet bei Hallein und von Seefeld, aus dem Eocän des Monte Bolca und aus dem Miocän von Bordeaux. Fossile Säugetiere aus der Lybischen Wüste und von Quercy (Eocän) sowie aus dem Pliocän von Terual in Spanien. Eine wertvolle Sammlung oligocäner Foraminiferen, deren gegen 300 Arten schon bestimmt waren. Die Sammlung von 227 Handstücken und zugehörigen Dünnschliffen der Eruptivgesteine Norwegens, welche Prof. Brögger in Christiania zusammengestellt hat. Steinkohlenpflanzen aus dem Saar- und Rheinpfalzgebiet. Triasische Versteinerungen aus Dalmatien. Medusen aus dem lithographischen Schiefer von Solnhofen. Geschenke: von Dr. Klessin in Regensburg diluviale Landschnecken; von Konservator Maurer-Reichenhall Hippuriten aus der Kreide; von Kommerzienrat Ludowici diluviale Elephantenreste aus der Pfalz; von Oberleutnant Rubner Juraversteinerungen aus Franken; von Dr. Wanderer Versteinerungen aus der Oberpfalz; von Dr. Knauer Gesteine und Versteinerungen aus dem Herzogstandgebiet; von Dr. K. Leuchs Gesteine und Versteinerungen aus dem Kaisergebirge; von Haniel und Mylius, cand. geol. Steinkohlenpflanzen des Ruhr-

gebietes. Von Konservator Rothpletz aus Canada silurische Versteinerungen und ein Block des „Eozoon canadense“; Versteinerungen aus Mexiko (Jura-Kreide), aus der Gegend von S. Francisco (Tertiär); Bronzerelief von Zittel.

Münzkabinett. Mit Rücksicht auf die im vorigen Jahre erfolgte umfangreiche Erwerbung der Sammlung Sattler traten die Antiken-Erwerbungen in diesem Jahr quantitativ zurück. Hervorzuheben sind: Elektronstater von Kyzikos; Goldstater von Philippi: Goldmünzen des Hadrian; Bronzemünzen des Hadrian von Elis; Didrachme von Velia; Silbermünzen von Gortyna; Bronzemünzen der Tranquillina von Myra. Von neueren Münzen und Medaillen (Mittelalter und Neuzeit bis ca. 1850): Vier Funde von Mittelaltermünzen (darunter einer von circa 360 Stück): ein neuzeitlicher Fund von 26 Stück; ferner 102 Münzen und Jetons, sowie 12 Medaillen, darunter viele bayerische Gepräge; 30 Prämien-Medaillen der Universität Altdorf in Silber; Pesttaler von 1528; 9 Brandenburger Goldgulden. Von Renaissance-Medaillen: 4 wertvolle Wachsmodelle aus dem Anfang des XVI. Jahrhunderts oberdeutschen Ursprungs und eine Bronzemedaille auf Pico della Mirandola. Von Modernen Kunstmedaillen: 56 Stück Medaillen und Plaketten, darunter 33 Stück von Münchener Künstlern, 13 Stück von anderen deutschen Bildhauern und Medailleuren, 8 Stück belgischen und 2 Stück französischen Ursprungs. Das Fach der Gemmen erhielt einen Zuwachs von 5 Stück, darunter mykenischer Stein mit Tierdarstellung, etruskischer Scarabäus mit Perseus, Amethyst mit Kopf einer Bakchantin. Das Kabinet empfing Schenkungen von S. K. Hoheit Prinz Rupprecht von Bayern, Staatsminister von Frauendorfer, der Numismatisch-antiquarischen Gesellschaft in Montreal, dem Geschichts- und Altertums-Verein in Frankenthal, Stadtmagistrat Freiburg, Stadtmagistrat Nürnberg, ferner von Sanitätsrat Jaquet in Berlin, Maler Freiherr von Cederström, Freiherrn von Löffelholz-Colberg, Obermünzmeister Riederer und der Firma Deschler und Sohn hier, von C. F. Gebert in Nürnberg, Generaldirektor Thieme hier und J. Pittowski in

Lemberg. Im Ganzen beträgt die Zahl der im Jahre 1906 der Staatssammlung einverleibten Münzen und Medaillen 1636 Nummern, wobei jedoch größere und kleinere Funde, die als Ganzes in den Besitz des Münzkabinets übergingen, nur mit einer Akzessionsnummer bezeichnet sind.

**Museum für Abgüsse antiker Bildwerke.** I. An Ergänzungen wurden ausgeführt: 1. an der Athena Lemnia die beiden Arme mit Helm und Lanze, 2. an der kapitolinischen Amazone der rechte Arm mit Lanze, 3. an der neugefundenen Sphinx von Aegina die Flügel und Teile der Beine, 4. an dem Westmacottschen Athleten im British Museum mit Benutzung der Wiederholung Barraco der rechts einen Kranz haltende Arm, außerdem der Kopf durch die bessere Wiederholung in Petersburg. II. Neugeformt im Gipsmuseum wurden 1. hellenistischer Porträtkopf, Sammlung Jacobsen, Kopenhagen, 2. römischer Porträtkopf, ebendaher, 3. Bronzestatuette des Hermes, München (Privatbesitz), 4. Basaltkopf eines ägyptischen Priesters aus dem Kunsthandel, 5. drei Fragmente vom Schatzhaus des Atreus, München, Antiquarium. III. Von käuflichen Abgüssen wurden erworben: 40 Stück (4 Statuen, 4 Statuetten, 3 Reliefs, 29 Köpfe aus Boston, Rom, Berlin, Paris, Dresden, Athen, Kopenhagen, Petersburg). IV. Neugeformt in auswärtigen Museen wurden auf Veranlassung des Konservatoriums 1 Kopf in Amsterdam, 5 Köpfe und 1 Relief in Petersburg (Eremitage), 2 Statuetten und 6 Köpfe in Rom (Museo Barraco und Lateran). V. Geschenke: 1. Bronzefigürchen im Münchener Privatbesitz, 2. linker Arm eines neugefundenen Diskuswerfers in Rom, 3. 12 Stück römisches aes grave. VI. Die Photographiensammlung wurde vermehrt um 648 Stück.

**Zoologische Staatssammlung.** Unter den Erwerbungen ragen hervor: etwa 300 Reptilien und Amphibien aus Kamerun, Vögel aus Neuguinea, sowie Vögel und Reptilien aus Nordaustralien, Amphibien und Reptilien aus China, eine Sammlung antarktischer und südafrikanischer Crustaceen, sowie Medusen vom malayischen Archipel und stillen Ozean, endlich eine

größere Kollektion Reptilien, Conchylien und Insekten aus Annam und Siam, und Affen aus Südamerika. Geschenke: von Oberleutnant O. Kauffmann in Marburg eine wertvolle Sammlung von Säugetieren aus Kaschmir und Mysore; von Plantagenbesitzer Widnmann in Deli eine größere Sammlung sumatranischer Säugetiere; ferner von S. K. Hoheit Prinz Rupprecht ein Dammhirsch und ein Schneehase; von S. K. Hoheit Prinz Alfons ein Wapiti; von Notar Braun (Arnstorf) einheimische Vögel; von Rentner J. Brückmann siebenbürgische Säuger und Vögel; von Dr. Brügel Conchylien und Insekten aus Malakka; von Postadjunkt Fischer (Augsburg) Bälge und Eier seltener einheimischer Vögel; von Major Hauser (München) transkaspische Reptilien; von Dr. Hoseus Muscheln und Reptilien aus Siam; von Gutsbesitzer Kotzbauer in Diessen Vögel vom Ammersee; von K. Lankes Reptilien; von Kunstmaler L. Müller (Mainz) Conchylien aus Griechenland; vom ornithologischen Verein Bälge zahlreicher Vogelarten; von Dr. Parrot (München) europäische und javanische Vögel; von Institutsdirektor Roemer (München) südafrikanische Reptilien: von Jos. Scherer (München) Reptilien und Fische vom unteren Senegal.

Hierauf teilt der Sekretär der mathematisch-physikalischen Klasse, Herr C. v. Voit, mit, daß die mathematisch-physikalische Klasse in dem vergangenen Jahre fünf Mitglieder durch den Tod verloren hat:

Zwei einheimische ordentliche Mitglieder:

den Mathematiker Gustav Bauer, gestorben den 3. April 1906

und den Chemiker Wilhelm Koenigs, gestorben den 15. Dezember 1906

und drei auswärtige Mitglieder:

den Physiker Ludwig Boltzmann in Wien, gestorben den 6. September 1906,

den Direktor des meteorologischen Instituts in Berlin Wilhelm v. Bezold, gestorben den 17. Februar 1907,

den Chemiker Henri Moissan in Paris, gestorben den 21. Februar 1907.

## Gustav Bauer.[1])

Am 3. April 1906 ist das an Jahren älteste Mitglied der math.-phys. Klasse, der Mathematiker Gustav Bauer, im hohen Alter von 85 Jahren gestorben. Während 50 Jahren hat er ungemein tätig und erfolgreich an dem Ausbau der mathematischen Wissenschaften mitgearbeitet und war als ein bewährter und vielseitiger Forscher auf einer Anzahl von Gebieten derselben bei seinen Fachgenossen hoch geschätzt. Es ist ihm gelungen, schwierigen Problemen, welche vor ihm die hervorragendsten Mathematiker beschäftiget hatten, neue Seiten abzugewinnen und die Kenntnisse seiner Wissenschaft zu vertiefen. Sein Leben

---

[1]) Siehe Aurel Voß, Zur Erinnerung an Gustav Bauer. Allg. Zeitung, Beilage 1906, Nr. 271 und 272, und Jahresbericht der Deutschen Mathemat. Vereinigung Bd. 16, Heft 1, S. 54. — Gustav Bauer, Erinnerungen aus meinen Studienjahren. Festvortrag zum 16. Stiftungsfeste des mathem. Vereins zu München 1893.

gibt uns ein lehrreiches Beispiel, wie beharrliche Ausdauer trotz größter Schwierigkeiten zum ersehnten Ziele führt.

Bauer wurde am 18. November 1820 zu Augsburg geboren. Nach dem frühzeitigen Tode des Vaters, eines geachteten Kaufmanns, leitete die vortreffliche Mutter, deren er bis an sein Lebensende in Dankbarkeit gedachte, seine erste Erziehung. Er besuchte sodann das protestantische Gymnasium zu St. Anna, an dem damals der ausgezeichnete Rektor und Schulmann Kaspar Mezger wirkte, der seinen Schülern nicht nur Kenntnisse beibrachte, sondern sie auch zum Denken anleitete und sie für die Schönheiten des Altertums zu begeistern wußte.

Schon frühe war bei dem jungen Bauer die Vorliebe und Begabung zur Mathematik hervorgetreten; in dem Abgangszeugnisse vom Gymnasium sind seine reichen Kenntnisse in der Mathematik hervorgehoben und besonders spricht dafür, daß er vor dem Übertritt an die Universität während eines Jahres die von dem Rektor Leo geleitete polytechnische Schule in Augsburg als Hospitant besuchte, um eingehenderen mathematischen Studien zu obliegen. Aber nicht nur in der Mathematik war er vortrefflich vorgebildet, er hatte lebhaftes Interesse für alle Zweige des Wissens und sich eine reiche allgemeine Bildung erworben. Seine Vaterstadt liebte er schwärmerisch wegen ihrer altertümlichen Schönheit und ihrer hohen Bedeutung in der Geschichte.

Es stand in ihm von Anfang an fest, daß er Lehrer und Forscher in der Mathematik werden wolle; es war aber damals, namentlich in Bayern, nicht so leicht wie jetzt sich auf der Universität zum akademischen Berufe vorzubereiten und tiefer in die mathematische Wissenschaft einzudringen. An den meisten deutschen Universitäten, insbesondere an den bayerischen, wurde die Mathematik noch nicht als reine Wissenschaft betrieben, sondern nur insoweit, als es das Bedürfnis der Gymnasien und Gewerbeschulen zu erfordern schien. So lehrten hierin in München um diese Zeit der frühere Wundarzt im österreichischen Heere und Hofbediensteter bei dem Churfürsten Karl Theodor Dr. med. Franz Paula Gruithuisen, von dem über alle möglichen

Fächer der Naturwissenschaft eigentümliche Beobachtungen und Versuche herrühren,[1] als Professor der Astronomie, ferner Eduard Hierl als Professor der Vermessungskunde für Forstkandidaten und der durch Herausgabe mehrerer mathematischer Lehrbücher bekannte außerordentliche Professor Dr. Georg Recht, alle drei ohne jede Bedeutung für die mathematische Wissenschaft. Nur Karl G. Chr. v. Staudt in Erlangen förderte dieselbe später durch seine berühmte Schrift über die „Geometrie der Lage“, war aber als Lehrer von geringer Wirksamkeit.

Bauer bezog, 19 Jahre alt, die Universität zu Erlangen, welche die Abiturienten des protestantischen Augsburger Gymnasiums zumeist wählten. Er mußte zunächst die vor dem Fachstudium noch jetzt vorgeschriebenen acht philosophischen Vorlesungen hören; er hörte Naturgeschichte bei K. v. Raumer, Botanik bei dem trefflichen Wilhelm Daniel Joseph Koch, der die ihm zeitlebens gebliebene Lust an den Pflanzen und dem Botanisieren in ihm erweckte. Mathematik trieb er nur für sich, offenbar da darin in den Vorlesungen an der Universität nichts mehr für ihn zu holen war.

Er verließ nach einem Semester Erlangen und beschloß nach einem kurzen Aufenthalt in Wien, wo er bei Andreas v. Ettinghausen Physik und bei Jos. Joh. v. Littrow Astronomie hörte, zu seiner Ausbildung in der Mathematik nach Berlin zu gehen.

Von der östlichen Universität Königsberg war zu dieser Zeit eine neue Auffassung und eine Reform in dem mathematischen Unterricht durch den genialen Astronomen Friedrich Wilhelm Bessel und den ausgezeichneten Mathematiker C. G. J. Jacobi ausgegangen, denen sich F. Richelot und der berühmte Lehrer der mathematischen Physik, Franz Neumann, anschlossen. Nach ihnen sollte der mathematische Unterricht nicht wie bisher in einigen allgemeinen und elementaren Vorlesungen bestehen, sondern sein Schwerpunkt in die Übungen und in die Anleitung der Studierenden zu eigenen Arbeiten im Seminar im Anschluß

---

[1]) Siehe seine Beiträge zur Physiognosie und Eautognosie.

an die ihrer Lehrer verlegt werden. Durch diese Vereinigung von Mathematikern ersten Ranges entstand in Deutschland eine glänzende wissenschaftliche Schule der mathematischen Forschung und von ihr aus das neue Aufleben der Mathematik in unserem Vaterlande.

Das gleiche Prinzip hatte schon in einigen Naturwissenschaften Eingang gefunden und drang allmählich auch in anderen Wissenschaften durch. Durch die unausbleibliche Erweiterung desselben wird die Ausbildung an den Hochschulen eine Umwälzung von Grund aus erfahren, indem vieles, was man jetzt in ausführlichen Vorlesungen lehrt, dem Privatstudium der Lehrbücher überlassen werden muß, und an deren Stelle der Anschauungsunterricht und das Arbeiten in den Laboratorien treten wird.

Von Königsberg aus pflanzte sich die neue Art des mathematischen Unterrichts nach Berlin fort, woselbst die hervorragenden Mathematiker, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet und Jakob Steiner wirkten, welche Bauer zu hören wünschte. Insbesonders übten die geistvollen Vorträge des ersteren über partielle Differentialgleichungen und über bestimmte Integrale und Zahlentheorie einen großen Einfluß auf ihn aus; er traf unter den sechs Zuhörern seinen späteren Münchener Kollegen Philipp Ludwig Seidel, der dann zu Bessel nach Königsberg ging, wo auch der früh verstorbene, für Mathematik und Musik hochbegabte Augsburger Freund Bauers, Gustav v. Hößlin, zog. Zur Charakteristik Bauers sei angegeben, daß er außerdem noch die Vorlesungen von Poggendorf, Seebeck und Ohm über Physik, von Dove über Meteorologie, von Steffens über Naturphilosophie, von Werder über Geschichte der Philosophie und die der Gebrüder Grimm über Rechtsaltertümer und über das Gudrunlied besuchte.

Nach einjährigem Aufenthalte in Berlin (1840/41) nach München zurückgekehrt, bestand er eine eben ausgeschriebene staatlich theoretische Prüfung mit ausgezeichnetem Erfolge und erhielt dann zur Aushilfe einen Lehrauftrag für Mathematik am Augsburger Gymnasium, wobei die Lehrgabe und der Eifer des

21 Jährigen viel Anerkennung fanden. Darnach beschäftigte er sich in München, wohin die Mutter gezogen war, bei Joh. Lamont an der Sternwarte und bearbeitete seine der mathematischen Physik entnommene Dissertation: „Von der Theorie der Wärme“, mit der er (1842) in Erlangen (mit dem Prädikat insigne) den Doktorgrad erwarb.

Nun sollte noch ein Aufenthalt in Paris folgen. Bekanntlich hatte zu Anfang des 19. Jahrhunderts eine Ansammlung eminenter Mathematiker und Physiker wie Carnot, Cauchy, Dulong, Fourier, Lagrange, Laplace, Legendre, Monge, Poisson Paris zum Zentrum der mathematisch-physikalischen Wissenschaft gemacht. Ihr Ruhm zog lange Zeit die jungen Gelehrten aller Länder nach Paris, um ihre Ausbildung zu vollenden. Auch Liebig mußte daselbst bei dem Chemiker Gay Lussac das suchen, was er in Deutschland nicht fand. Als Bauer nach Paris kam, wirkten daselbst die Mathematiker Chasles, Lacroix, Lamé, Libri, Liouville, Poncelet, Sturm und die Physiker Arago, Dumas, Pouillet, Regnault. Man kann sich denken, wie der wissensdurstige Jüngling seine Zeit verwertete und auch sonst in der großen Stadt neue Eindrücke für das Leben empfing. Besonders zogen ihn die Vorlesungen von Liouville über die Theorie der Attraktion nach dem Newtonschen Gesetz und die von Libri über höhere Mathematik an.

Mit dem Pariser Aufenthalt (1842/43) waren die Lehrjahre Bauers abgeschlossen, und er mußte sich nun einen seinen reichen Kenntnissen entsprechenden Wirkungskreis zu verschaffen suchen. Sein sehnlicher Wunsch war die akademische Laufbahn, aber in Bayern tat sich unter dem den wissenschaftlichen Bestrebungen wenig geneigten Ministerium Abel keine Aussicht auf.

In dieser Sorge wurde er von dem Redakteur der Augsburger Allgemeinen Zeitung Gustav Kolb auf eine Erzieherstelle bei dem Fürsten Nikolaus Ghykha in Rumänien, der mit seiner Familie abwechselnd in Jassy und auf dem ausgedehnten Gute Comanesty in einem einsamen, von dichten Wäldern umgebenen Schlosse lebte, aufmerksam gemacht. Mit schwerem Herzen entschloß er sich, diese Stelle, welche sonst sehr günstige

Bedingungen bot, (1845) anzunehmen; drängte sie ihn doch von der gewöhnlichen Laufbahn eines Gelehrten ab und brachte ihm ungewisse Wanderjahre. Er hatte die Aufgabe, die Erziehung der drei fürstlichen Söhne zu leiten und sie in allen Schulfächern zu unterrichten, wozu er durch seine allgemeine Ausbildung und sein pädagogisches Talent in hohem Maße befähiget war. Er hat sich durch den Erfolg seiner Tätigkeit befriediget gefühlt, und die fürstliche Familie sowie seine Zöglinge dankten es ihm durch innige Verehrung und Anhänglichkeit. Er blieb daselbst acht Jahre lang, bis die Erziehung in den oberen Gymnasialklassen zu München ihren Abschluß fand. Er bedauerte nur, daß er in der Einsamkeit in Rumänien die literarischen Hilfsmittel und den Verkehr mit der wissenschaftlichen Welt entbehrte.

Bauer hatte sich dadurch endlich die Mittel erworben, die akademische Laufbahn einschlagen zu können, allerdings erst im Alter von 37 Jahren, in dem andere wohlbestallte ordentliche Professoren sind und einen guten Teil ihrer wissenschaftlichen Tätigkeit hinter sich haben. Sein um ein Jahr jüngerer früherer Studiengenosse in Berlin, Seidel, war schon seit zwei Jahren ordentlicher Professor.

Im Jahre 1857 habilitierte sich Bauer an unserer Universität als Privatdozent der Mathematik mit einer wertvollen Abhandlung: „Über die Integrale gewisser Differentialgleichungen, welche in der Theorie der Anziehung vorkommen.“ Es war nach der Doktordissertation seine erste wissenschaftliche Arbeit. Seitdem war er unablässig bemüht, der Wissenschaft zu nützen und durch seine Vorlesungen die mathematischen Studien an der Universität zu fördern und zu heben, was ihm auch in reichem Maße gelungen ist. Durch den Einfluß seines Kollegen und späteren Freundes Seidel, der ihn besonders hoch schätzte, wurde er 1865 außerordentlicher und 1869 ordentlicher Professor.

Die wissenschaftlichen Arbeiten Bauers bewegen sich auf zwei ganz verschiedenen Gebieten der Mathematik.

Die erste Art derselben handelt von der theoretisch interessanten und für die mathematische Physik so wichtigen Theorie

der Kugelfunktionen. Die Vorlesungen von Dirichlet und Liouville hatten ihn in die Anwendungen der Potentialtheorie auf das Problem der Wärmeleitung, insbesondere in die Lehre von den Kugelfunktionen, eingeführt, der seine hauptsächlichsten Arbeiten bis in die Mitte der siebenziger Jahre angehören; dieselben sind größtenteils in dem Crelle-Borchardtschen Journal, später in den Sitzungsberichten unserer Akademie veröffentlicht. Die vorher erwähnte Dissertation zeigte, daß er sich schon damals eingehend mit der Theorie der Kugelfunktionen abgegeben hatte. Vor allem war es seine allerdings durch die Arbeiten von Franz Neumann überholte Habilitationsschrift, in der er völlig selbständig die Theorie der Kugelfunktionen zweiter Art entwickelte. Hierher gehören noch mehrere weitere Abhandlungen, wie die über die Gammafunktionen, über die Bernouillischen Zahlen und über Erweiterungen der Lehre von den Kugelfunktionen. Er lieferte dadurch neue Beiträge zur Erkenntnis der Art der Darstellung beliebiger Funktionen durch Reihen, die nach solchen Gebilden geordnet sind, und zeigte den Weg zu einem neuen Beweise der Konvergenz solcher Entwicklungen, der wesentlich verschieden von dem berühmten Dirichletschen sich gestaltet. Er hat dadurch die Wissenschaft mit schönen Sätzen über die vor ihm von einer Anzahl der ausgezeichnetsten Mathematiker bearbeiteten Kugelfunktionen bereichert, welche Sätze bereits in die Lehrbücher übergegangen sind.

Die zweite Art seiner Arbeiten ist geometrischer Natur. Die Lehrtätigkeit an der Universität wies ihn besonders auf das mit so vielem Erfolge kultivierte Feld der Anwendungen der Algebra auf die Geometrie hin. Es galt die weitere Verfolgung der analytisch-geometrischen Methode, welche er im Anschluß an die Arbeiten der englischen Geometer sich selbständig zu eigen gemacht. Auch in dieser Richtung hat er sich mit sehr gutem Erfolg betätiget und verwickelte Aufgaben zu lösen gewußt. Es gehört hierher die Untersuchung über die Reziprozitätsverhältnisse des in der Theorie der Kegelschnitte so wichtigen Paskalschen Sechsecks, durch welche er die Kenntnis der

interessanten Eigenschaften desselben einerseits bereicherte, andererseits aber, was noch wichtiger ist, dieselben unter gemeinsamem Gesichtspunkte in ihrer bisher vermißten Einheit erkennen ließ, so daß er das Problem, über welches vorher Hesse nicht zur Entscheidung gekommen war, in höchst anschaulicher Weise völlig löste.

Ferner sind hervorzuheben die schönen Arbeiten über die Theorie der Flächen dritter Ordnung, die ihm einen ihrer wesentlichsten Sätze verdankt, sowie über eine Eigenschaft des geradlinigen Hyperboloids, welche bis dahin den Mathematikern entgangen war. Noch im Alter von 85 Jahren legte er in der Sitzung der Akademie vom 4. März 1905 seine letzte Arbeit vor: „Von der Kurve sechster Ordnung, welche der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte ist, welche durch vier Kegelschnitte gehen."

Ein Hauptverdienst Bauers liegt in seiner fruchtbaren Lehrtätigkeit. Er las über die geometrischen Wissenschaften, die sich zu jener Zeit, namentlich durch die deutschen Mathematiker, so gewaltig entwickelt hatten, und dann über Algebra und analytische Mechanik. Er war ein beliebter Lehrer; die vielen im Lehramt für Mathematik und Physik an den bayerischen Mittelschulen Angestellten waren fast alle seine Schüler. Man kann nicht sagen, daß er einen glänzenden Vortrag hatte; bei seinem ungemein lebhaften Naturell pflegten, wie Kollega A. Voß in seinem schönen Nachruf sich ausdrückt, seine Gedanken nicht selten dem gesprochenen Worte und damit auch dem Verständnis des Hörers voranzueilen: aber die an die originelle Vortragsweise einmal Gewöhnten erkannten, daß es ihm heiliger Ernst war und er mit aller seiner Kraft bestrebt war, ihnen das richtige Verständnis für die Lehren der Wissenschaft beizubringen. Besondere Sorgfalt widmete er dem Unterricht in dem mathematischen Seminar sowie der Ausgestaltung desselben mit Büchern und Modellen, und hier war es vor allem, wo er den Studierenden nahe trat. Er hatte ein warmes Herz für den fleißigen Studenten und er war für sein Wohl mit Rat und Tat wie ein gütiger Vater besorgt.

Die allgemeine Verehrung zeigte sich bei seinem 70. und 80. Geburtstage, welche Feste er in vollster Rüstigkeit feiern konnte. Bei dem 16. Stiftungsfeste des mathematischen Vereins am 7. Juli 1893 hielt er den Festvortrag: „Erinnerungen aus meinen Studienjahren, insbesondere mit Rücksicht auf die Entwicklung der Mathematik in jener Zeit", in dem er eine meisterhafte Darstellung der ruhmvollen Geschichte der Mathematik und der mathematischen Studien gab. An seinem 80. Geburtstage brachte ihm der mathematische Verein als Festgabe seine „Vorlesungen über Algebra" dar. Dieselben sind aus den von ihm revidierten Heften der Studierenden von seinem Schüler Professor Karl Döhlemann im Auftrage des Vereins herausgegeben worden.

Bauer ist jugendfrisch an Körper und Geist bis in das höchste Alter geblieben. Niemals ernstlich krank erhielt er seinen Körper leistungsfähig durch Leibesübungen und weite Ausflüge in die schöne Umgebung unserer Stadt. In rastloser geistiger Tätigkeit hielt er, obwohl er mit dem Sommersemester 1901 von der Verpflichtung, Vorlesungen zu halten, entbunden worden war, doch noch im Winter 1904/05 seine gewohnte, ihm lieb gewordene Vorlesung. Er war eine frohe, sinnige Natur, wahrheitsliebend und zuverlässig, ein durch und durch edler, reiner Charakter; als solcher wird er in unserem Gedächtnis bewahrt bleiben. Sein Leben ist ein wahrhaft glückliches gewesen.

## Wilhelm Koenigs.

Am 15. Dezember 1906 starb im Alter von 55 Jahren das ordentliche Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse, der verdiente Chemiker Wilhelm Koenigs. Er hat sich mit großem Erfolg an der Aufhellung des Baues der verwickelten Kohlenstoffverbindungen beteiliget und sich namentlich von Anfang seiner Tätigkeit an der planmäßigen Erforschung der China-Alkaloide gewidmet.

Koenigs wurde am 22. April 1851 zu Dülken bei Düsseldorf als Sohn eines wohlhabenden Kaufmanns geboren. Den

ersten Unterricht erhielt er in dem Friedrich Wilhelms-Gymnasium zu Köln (1862—1868), wohin die Familie übergesiedelt war. Nach Absolvierung des Gymnasiums bezog er (im Herbst 1868) die Gewerbeakademie zu Berlin in der Absicht Maschinenbaukunde zu studieren; nebenher hörte er mathematische und naturwissenschaftliche Vorlesungen an der Universität und an der Bauakademie. Dabei entwickelte sich in ihm die Neigung zur Chemie, die ihn veranlaßte, ein Semester im Laboratorium des berühmten Chemikers Aug. Wilh. Hofmann, des Begründers der Teerfarbenchemie, und ein zweites bei Professor Finkener auf der Bergakademie zu arbeiten. Im Herbst 1871 verließ er Berlin und ging zur Fortsetzung seiner naturwissenschaftlichen und speziell chemischen Studien nach Bonn, woselbst er drei Jahre lang in der organischen Abteilung des Laboratoriums von August Kekulé, des damals auf der Höhe seines Ruhms stehenden Schöpfers der Strukturchemie, sich beschäftigte.

Nach einem in Heidelberg bei dem Altmeister der Chemie, Robert Bunsen, zugebrachten Semester (1874/75) promovierte er in Bonn auf Grund einer im dortigen Institut ausgeführten Untersuchung: „Über die Einwirkung von Phosphorsuperchlorid auf Äthylendisulfosäure.“

Nachdem er den Sommer 1875 noch analytische Chemie bei Professor Finkener in Berlin getrieben und den Winter 1875/76 im Technologischen Laboratorium des Polytechnikums zu Zürich tätig war, kam er als junger Doktor im Sommer 1876 mit reichen Vorkenntnissen ausgerüstet nach München. Nach dem Tode Liebigs war mit glücklichem Griff als Nachfolger der angesehene Chemiker Adolf Baeyer aus Straßburg berufen worden. Während vorher eine Ausbildung in der Chemie dahier nicht möglich war, entstand rasch ein großes Laboratorium, das bald mit an erster Stelle im Unterricht und in der wissenschaftlichen Forschung stand. Eine große Anzahl talentvoller Schüler hatte sich um den in vollster Kraft stehenden Leiter gesammelt, von denen einige zu großer Berühmtheit gelangt sind. In diesen Kreis strebsamer Jünger trat Koenigs ein; hier fand er die ihm zusagende Wirksamkeit

für sein Leben, so daß er in München seßhaft blieb; alle seine Arbeiten hat er von nun an hier ausgeführt.

Im Jahre 1881 habilitierte er sich als Privatdozent für Chemie mit einer bemerkenswerten Abhandlung: „Studien über die Alkaloide." 1892 bekam er den Titel und Rang eines außerordentlichen Professors an der Universität; seit 1896 war er außerordentliches und seit 1903 ordentliches Mitglied unserer Akademie; 1897 lehnte er einen ehrenvollen Ruf als ordentlicher Professor an die Technische Hochschule zu Aachen ab, er fühlte sich durch seine hiesige Tätigkeit voll befriediget.

Koenigs begann seine wissenschaftliche Laufbahn vor fast 30 Jahren mit einer Untersuchung der Einwirkung von schwefliger Säure und von Sulfinsäuren auf Diazobenzol (1877). Er erhielt dabei eine Substanz, welche einerseits ein Azokörper und andererseits ein Sulfobenzid ist, und die er dementsprechend aus Benzolsulfinsäure und Diazobenzol aufbauen konnte. Durch diese Beobachtungen wurde er veranlaßt, die Einwirkung der salpetrigen Säure auf Benzosulfinsäure zu studieren, und entdeckte dabei die Dibenzsulfhydroxamsäure, welche der Ausgangspunkt für höchst interessante Untersuchungen über die Oxydation des Hydroxylamins geworden ist.

Seit dem Jahre 1880 wandte sich Koenigs dem Gebiete der stickstoffhaltigen Kohlenstoffverbindungen von basischem Charakter, der natürlichen Alkaloide, zu, das er seitdem unablässig und mit reicher Ernte bebaut hat. Zunächst gelang es ihm, zwei fundamentale Reaktionen aufzufinden, nämlich die Synthese des Chinolins, das man durch Destillation von Chinin oder Cinchonin gewinnt, aus Allylanilin, und die Überführung des aus dem Piperin des Pfeffers dargestellten Piperidins in Pyridin.

Die Beschäftigung mit diesen Basen führten ihn zu einer neuen Auffassung der in der Natur vorkommenden Alkaloide, die er in seiner vorhergenannten Habilitationsschrift zusammenfaßte. In dieser Schrift setzte er auseinander, daß zahlreiche Pflanzenbasen als Derivate des Pyridins und hydrierter Pyridine aufzufassen seien und daher zu den Pyridinen in einem ähn-

lichen Verhältnis ständen wie die Terpene und Kampherarten zu den aromatischen Verbindungen. Die Schrift bildet gewissermaßen das Programm für seine umfangreichen, in ununterbrochener Reihe veröffentlichten Untersuchungen über die Pflanzenbasen.

Die erste, auch für weitere Kreise interessante Entdeckung war die des durch Reduktion des Chinolins und darauf folgende Methylierung gewonnenen Methyltetrahydrochinolins oder Kairolins; dasselbe hat stark fieberstillende Eigenschaften und gab den Anstoß zu den Untersuchungen, welche zur Auffindung des besser wirkenden Antipyrins durch Knorr geführt haben.

Darauf wandte sich Koenigs mit aller Kraft dem Studium der in medizinischer Hinsicht so wichtigen Chinabasen zu; es gelang ihm, durch eine sehr große Reihe von Experimentaluntersuchungen die Konstitution derselben soweit festzustellen, daß die künstliche Darstellung des Chinins nur mehr eine Frage der Zeit ist. In diesen seinen Arbeiten ist eine Fülle von neuen Gesichtspunkten für den Aufbau derartiger Pflanzenbasen enthalten, die eine höchst wertvolle Bereicherung der chemischen Wissenschaft bilden.

Im weiteren Verfolg dieser Untersuchungen über die Alkaloide erhielt er durch Oxydation von Cinchonin neben anderen Oxydationsprodukten das Merochinen. Es glückte ihm nun, den Zusammenhang zwischen diesen Substanzen aufzuklären und damit eine neue Stütze für die Richtigkeit der Formel des Merochinens beizubringen. Ferner stellte er Methylierungsprodukte von Desoxycinchonidin und Desoxycinchonin dar und untersuchte das Verhalten der Jodwasserstoffadditionsprodukte von Cinchoninchlorid und von Cinchonin sowie die der Sulfoderivate des Cinchens. Das aus Cinchonin gewonnene Lepidin wurde einer genaueren Prüfung unterworfen und eine Anzahl neuer Derivate dargestellt, welche für dieses Kapitel großes Interesse haben.

Durch Behandlung der Cinchoninsäure mit rauchender Salpetersäure stellte er eine Nitrocinchoninsäure dar, welche sich bei der Reduzierung als ein Ana-Substitutionsprodukt er-

wies, indem es sich ebenso wie das entsprechende Derivat der Naphtonsäure in ein inneres Anhydrit verwandelte.

Besonders erfolgreich gestaltete sich seine Untersuchung über die Produkte der Einwirkung von Formaldehyd auf Chinaldin, indem es ihm möglich war, nicht nur ein Molekül des ersteren, sondern auch zwei und drei in das Alkaloid einzuführen. Die neuen Basen enthalten nach seinen Ermittelungen nur eine einzige Seitenkette, wie die Oxydation derselben zu Chinaldinsäure beweist, der Kohlenstoff ist aber ein verzweigter, da der doppelte Alkohol durch Reduktion in Isopropylchinolin verwandelt wird. Hieran reihen sich seine Versuche über die Einwirkung von Aldehyden auf solche Chinolinderivate, welche eine Methyl- oder Methylengruppe in der $\alpha$- oder $\gamma$-Stellung enthalten, sowie die Arbeiten, welche bestimmt waren, das neu gewonnene Gebiet abzugrenzen.

In der Sitzung der mathematisch-physikalischen Klasse vom 2. Dezember 1905 hielt er seinen letzten, in Liebigs Annalen der Chemie veröffentlichten Vortrag: „Über die Konstitution der Chinaalkaloide“, in dem er den damaligen Stand dieses Problems, an dessen Klärung ihm ein so hervorragender Anteil zufällt, darlegte.

Eine andere Reihe wichtiger Arbeiten ist endlich die über Derivate von Zuckerarten, in denen er einen neuen und leicht gangbaren Weg für die Synthese von Glucosiden nachwies.

Nicht nur die Wissenschaft sondern auch das chemische Laboratorium unserer Universität hat durch das Ableben von Koenigs einen schweren Verlust erlitten. Er war dem Vorstand eine getreue Hilfe seit fast drei Dezennien bei dem Unterricht im organischen Laboratorium und bei der Ausführung der wissenschaftlichen Arbeiten der Schüler. Den Anfänger wußte er aufzumuntern, wenn er an dem Erfolg seiner Arbeit verzweifeln wollte, und den älteren Fachgenossen war er ein fördernder Berater.

Als Dank dafür, was er in dem Laboratorium genossen, und in Begeisterung für die Wissenschaft, machte er in hochherziger Gesinnung im Jahre 1900 mit seinen Geschwistern

eine Stiftung zur Förderung wissenschaftlich-chemischer Forschungen, welche er später am 70. Geburtstage seines geliebten Lehrers zur Adolf von Baeyer-Jubiläumsstiftung mit einem Kapitale von 50 000 Mark erweiterte; in seinem Testamente führte er der Münchener Bürgerstiftung 50 000 Mark zu, außerdem noch besonders 10 000 Mark dem chemischen Laboratorium und eine weitere ansehnliche Summe für botanische, zoologische und chemische Forschung.

Als Wohltäter der Akademie ist sein Name in den Tafeln der Spender der Akademie für immer eingegraben; er wird aber auch in den Annalen seiner Wissenschaft als der eines feinen Denkers und Experimentators fortleben.

## Ludwig Boltzmann.

Ludwig Boltzmann, der hervorragende Physiker, ist am 6. September zu Duino bei Triest, wo er Erholung suchte, eines jähen Todes gestorben. Mit ihm hat die Wissenschaft den Meister und Führer in der theoretischen Physik verloren, dem es, wie nur wenigen, gelungen ist, auf diesem schwierigen Gebiete in die Tiefe zu dringen; er war einer der bedeutendsten Denker in seiner Wissenschaft, von größtem mathematischen Scharfsinn und ein äußerst gewandter Experimentator.

Ludwig Boltzmann wurde in Wien am 20. Februar 1844 geboren; er machte seine akademischen Studien hauptsächlich in seiner Vaterstadt, wo Joseph Stefan und Lohschmidt seine Lehrer waren. Als Assistent Stefans habilitierte er sich (1867) an der Universität als Privatdozent. Man erkannte bald das ungewöhnliche mathematische Talent des jungen Gelehrten, denn schon im Alter von 25 Jahren (1869) wurde er als ordentlicher Professor der mathematischen Physik an die Universität Graz berufen. Er war eine unstete Natur, die nirgends dauernde Ruhe fand und immer glaubte, einen mehr zusagenden Wirkungskreis erreichen zu können. Er blieb in Graz nur vier Jahre, ging dann als Professor der reinen Mathematik an die Wiener Universität, hierauf nach zwei Jahren als Professor der Experi-

mentalphysik und Vorstand des neu errichteten physikalischen Institutes wiederum nach Graz. Seine glänzende Entwicklung und die hohe Bedeutung, die er in der Wissenschaft erlangt hatte, brachten es mit sich, daß man von vielen Seiten bestrebt war, ihn zu gewinnen. Seine bereits erfolgte Ernennung zum Nachfolger Kirchhoffs in Berlin machte er wieder rückgängig, folgte aber im Jahre 1890 gerne einem Rufe an die hiesige Universität als Professor für theoretische Physik. Er lebte sich dahier bald ein und versammelte einen Kreis vorgeschrittener Schüler um sich; wir waren stolz darauf, ihn als tätiges Mitglied unserer Universität und Akademie zu besitzen; um so größer war unsere Überraschung, als er nach vier Jahren sich bestimmen ließ abermals nach Wien als Professor der theoretischen Physik als Nachfolger seines Lehrers Stefan zu gehen. Er hielt es jedoch auch in seiner Vaterstadt nur sechs Jahre aus; es zog ihn nach Leipzig, weil er glaubte, an dieser Universität mit ihrer glänzenden mathematischen Schule in der Anregung eines größeren, besser vorgebildeten Schülerkreises eine befriedigendere Wirksamkeit zu finden. Er fand aber auch da nicht das Gesuchte und kehrte (1902) endlich als Professor der theoretischen Physik nach Wien zurück. Er wäre nicht abgeneigt gewesen nochmals nach München zu kommen. In den letzten drei Jahren erhielt er noch einen Lehrauftrag für Methode und allgemeine Theorie der Naturwissenschaften als Erbe der Lehrkanzel des Physikers Ernst Mach, welcher über Geschichte und Theorie der induktiven Wissenschaften Vorlesungen zu halten hatte.

Boltzmann stand nach dem Tode von Clausius, Kirchhoff und Helmholtz nach dem übereinstimmenden Urteil aller Fachgenossen unter den theoretischen Physikern Deutschlands an erster Stelle. Seine zahlreichen, zum größten Teil in den Sitzungsberichten der Wiener und unserer Akademie, sowie in Clebschs mathematischen Annalen und in Wiedemanns Annalen der Physik veröffentlichten Arbeiten bewegen sich fast sämtlich auf dem Gebiete der theoretischen Physik, und wenn er im Laboratorium Beobachtungen und Messungen ausführte, so geschah es immer im Anschluß an theoretische Untersuchungen und zur Prüfung

ihrer Konsequenzen. Dabei zeigte sich der eminente Theoretiker zugleich als Erfinder der sinnreichsten Beobachtungsmethoden und fein ausgedachter Apparate. Seine hervorragende Begabung für theoretische Untersuchungen in Verbindung mit einer seltenen Beherrschung des mathematischen Rüstzeuges haben ihn befähiget, die physikalischen Theorien von Clausius und insbesondere von Maxwell in glücklichster und erfolgreicher Weise weiter auszubilden und zu ergänzen, sowie eine Reihe anderer schwieriger Fragen zu lösen oder der Lösung näher zu führen.

Seine Lehrer Lohschmidt und Stefan hatten ihn als angehenden Forscher auf die kinetische Gastheorie und die Theorie der elektrischen Erscheinungen von Maxwell, dem er die tiefsten Anregungen verdankte, aufmerksam gemacht. Den größten Teil seines Lebens widmete er der Klärung dieser schwierigen Probleme.

Die Untersuchungen über die mechanische Theorie der Wärme und der auf die Gase bezügliche Teil dieser Theorie, die kinetische Theorie der Gase, waren wohl seine größten Leistungen: schon als 21 jähriger Student schrieb er seine erste Abhandlung, in der ihm die mechanische Begründung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie durch Zurückführung auf das Hamiltonsche Prinzip gelang; dieselbe blieb aber ganz unbeachtet, bis eine Polemik mit Clausius, der vier Jahre nachher zu ähnlichen Resultaten gekommen war, die Aufmerksamkeit auf sie lenkte.

Später deckte er die Beziehungen auf zwischen diesem Satze und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sowie den Sätzen über das Wärmegleichgewicht. Er verfolgte denkend bis in die letzten Konsequenzen den Vorgang beim Zusammenstoß zweier Teilchen nach den Grundsätzen der Mechanik und stellte fest, in welcher Weise sich die Geschwindigkeiten beider Teilchen beim Stoß ändern, und berechnete sodann, wie oft in einer gegebenen Zeit jede Art von Zusammenstößen vorkömmt.

So erhielt er das Gesetz, nach dem sich in einem Gas während des stationären Zustandes die Geschwindigkeiten auf

die verschiedenen Moleküle verteilen, so daß er davon ausgehend die Erscheinungen: den Druck, die innere Reibung, die Diffusion, die Wärmeleitung etc. abzuleiten vermochte.

Nur wenige konnten ihm anfangs in die abstrakten Höhen seines Denkens folgen, so daß seine Lehren längere Zeit vielen fremd geblieben sind; in England, wo Maxwell vorher mit solchen Problemen beschäftiget war, fand er früher Verständnis und Anerkennung. Die Zusammenstellung seiner diesbezüglichen Arbeiten in dem zweibändigen Werke: „Vorlesungen über kinetische Gastheorie" (1895 – 1899) gab eine unvergleichliche Einführung in das schwierige Gebiet und rückte ihn in Deutschland in die Stellung neben Clausius und Maxwell.

Die mechanische Begründung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik war ihm die Veranlassung, sein merkwürdiges Buch: „Vorlesungen über die Prinzipien der Mechanik" in zwei Bänden (1897 und 1904) zu schreiben; es ist eines der hervorragendsten deutschen theoretisch-physikalischen Werke, eine Darstellung und Prüfung der allgemeinen Sätze der Mechanik von unerreichter Genauigkeit und meisterhafter Kritik.

Nächst der Gastheorie hat sich Boltzmann am eingehendsten mit der Elektrodynamik beschäftiget, insbesondere mit der Erweiterung der klassischen Theorie der elektromagnetischen Schwingungen in Nichtleitern von Maxwell. Mit besonderer Vorliebe war, wie gesagt, Boltzmann den von letzterem eröffneten Pfaden gefolgt. Maxwell hatte vorausgesagt, daß das Licht auf elektro-magnetischen Schwingungen beruhe, und auf der von Faraday geschaffenen breiten induktiven Grundlage einen theoretischen Bau kühnster Konstruktion aufgeführt, dessen Schlußstein jener Zusammenhang zwischen Licht und Elektrizität bildete, welcher später (1888) durch die bewundernswerten Versuche des leider zu früh verstorbenen Heinrich Hertz eine so überraschende experimentelle Bestätigung fand. Die Schriften des genialen Schotten sind jedoch nicht immer von klarer und logisch gegliederter Darstellung, und deshalb oft dunkel und schwer verständlich. Für Boltzmann, der die Tragweite der Maxwellschen Konzeption alsbald erfaßte und deren begeisterter

Apostel in Deutschland wurde, gab es jedoch auch hier keine Schwierigkeiten; sein Scharfsinn erkannte leicht die einfachen Prämissen, welche sich hinter der manchmal nebelhaften Darstellung Maxwells verbargen, und er entwickelte daraus mit der ihm eigenen Eleganz und Durchsichtigkeit ein logisch konsequentes Lehrgebäude der Elektrodynamik. Er hat als erster Maxwells Theorie der Elektrizität experimentell geprüft und gerade hierin sich als Meister in der Kunst des Experimentierens durch Überwindung der größten Schwierigkeiten gezeigt. Hierher gehören vor allem seine in den Jahren 1873 und 1874 gemachten berühmten Untersuchungen über die dielektrischen Körper mit experimentellen Bestimmungen der Dielektrizitätskonstanten einiger Gase und des kristallinischen Schwefels, wodurch er die Maxwellsche Theorie stützte, indem er sie in Beziehung zu dem optischen Brechungsvermögen brachte. In seinem im Wintersemester 1890 an unserer Universität gehaltenen „Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichts“, welche 1891 im Druck erschienen sind, treten jene Vorzüge in glänzender Weise hervor.

Wir besitzen von ihm noch eine eingehende Theorie der elastischen Nachwirkungen nebst bestätigenden Versuchen, Abhandlungen über das Hall-Phänomen, über die molekulare Theorie der Dissoziation, über das Strahlungsvermögen, wonach die Gesamtstrahlung eines Körpers proportional ist der vierten Potenz seiner absoluten Temperatur.

Er war ein überzeugter Anhänger der Annahme von Atomen und der kinetischen Theorie der Materie. Alle seine Werke ruhten auf dieser Voraussetzung, seine Lehren in der kinetischen Gastheorie sowie in den Prinzipien der Mechanik. Immer wieder verteidigte er seine Anschauung gegen Machs Beschreibung oder Phänomenologie und gegen Ostwalds Energetik auf das energischste.

Boltzmann war ein ausgezeichneter, höchst anregender akademischer Lehrer, welcher dem nach Erkenntnis strebenden denkenden Studierenden auch schwierige Themata verständlich zu machen wußte. Gerne hielt er auch Vorträge und Reden

vor einem größeren Kreise, z. B. bei Naturforscherversammlungen und Festsitzungen der Akademie, die sich durch Klarheit, ungemeine Lebendigkeit und Schönheit der Darstellung auszeichneten. In der wissenschaftlichen Debatte war er ein ungemein schlagfertiger und gefürchteter Gegner.

Im Jahre 1905 gab er seine gesammelten Reden und populären Abhandlungen von allgemeiner Bedeutung heraus. Nicht alle sind in gewöhnlichem Sinne populär, aber der naturwissenschaftlich gebildete Leser wird die geistvollen Darlegungen mit dem größten Interesse verfolgen. Seine Nekrologe auf Kirchhoff, Lohschmidt und Stefan zeigen eine rührende Pietät und Dankbarkeit für die Männer, welche ihm als Lehrer die Wege geebnet haben. Die letzte Abhandlung darin, eine Beschreibung seiner Reise nach Amerika, ist voll von Humor und feinem Witz, die man dem sonst so ernst erscheinenden Gelehrten nicht zugetraut hätte.

In den letzten Jahren hielt er an der Universität vor einem Zuhörerkreis von mehr als 600 Studierenden aus allen Fakultäten Vorträge über philosophische Themata; es war wohl die wahre Naturphilosophie, reich an Gedanken, geschöpft aus den tiefsten Kenntnissen der Naturwissenschaft.

Boltzmann war eine eigenartige, in sich geschlossene Persönlichkeit. Sein ganzes Denken und Sinnen war erfüllt von seiner wissenschaftlichen Arbeit und seinen Ideen, so daß anderes keinen Platz mehr fand. Daher kam es, daß ihm die Gebräuche und Gewohnheiten des gewöhnlichen Lebens unbekannt blieben und er ihnen als Fremdling gegenüberstand; er war darin von einer Einfachheit und Kindlichkeit, die in grellem Gegensatz stand zu der Höhe seines Geistes.

Es bildete sich bei ihm, hervorgerufen durch körperliche Leiden, allmählich eine tiefe Melancholie aus, die auch die Ursache war, daß er Hand an sich legte.

Boltzmann wird stets als einer der größten Denker in der Naturwissenschaft gepriesen werden.

## Wilhelm von Bezold.

Am 17. Februar 1907 ist der Direktor des K. Preußischen Meteorologischen Instituts und Professor der Meteorologie an der Universität zu Berlin, Wilhelm von Bezold, im Alter von nicht ganz 70 Jahren gestorben. Er hat bis zum Jahre 1885 an den beiden hiesigen Hochschulen in ausgezeichneter Weise gewirkt und war seit 1875 ein hochgeschätztes und tätiges einheimisches ordentliches Mitglied unserer Akademie. Mit ihm ist einer der angesehensten Physiker und Meteorologen, der sowohl als Forscher wie als Organisator sich hohe Verdienste erworben hat, aus einem großen Wirkungskreise geschieden.

Bezold wurde am 21. Juni 1837 zu München als der Sohn eines höheren Ministerialbeamten geboren. Die Familie der Bezolde stammt aus der alten ehemaligen freien Reichsstadt Rothenburg ob der Tauber, die 1806 mit den protestantischen fränkischen Landen an Bayern gekommen war. Schon frühe zeigten sich an ihm ein ungemein lebendiger Geist und ungewöhnliche Talente. namentlich trat seine Vorliebe für Mathematik und Physik hervor; aber auch für andere Wissenszweige hatte er das größte Interesse und wie andere Mitglieder der Familie ein tiefes Verständnis für die Kunst.

Von Anfang an entschied er sich für das Studium der Physik als Lebensaufgabe. Zunächst besuchte er die Universität München, an der seit 1854 Philipp Jolly als Physiker wirkte, wandte sich aber bald nach Göttingen. wo der bedeutendste Physiker der damaligen Zeit, Wilhelm Weber, sein Lehrer war. In Göttingen erwarb er (1860) den Doktorgrad mit einer Dissertation „Zur Theorie des Condensators“. Nach München zurückgekehrt, wurde er Assistent am Physikalischen Institut und habilitierte sich (1861) an der Universität für Physik unter Vorlage einer Schrift „Über die physikalische Bedeutung der Potentialfunktion“. Nachdem er als Privatdozent und seit 1866 als außerordentlicher Professor an der Universität gelehrt hatte, erhielt er bei Errichtung der Technischen Hochschule (1868) eine ordentliche Professur für Physik und zwar für mathe-

matische und angewandte Physik an derselben. Außerdem wurde er infolge seiner ausgezeichneten meteorologischen Studien (1878) zum Vorstand der neu begründeten K. Bayerischen Meteorologischen Zentralstation ernannt und ihm die Organisation des meteorologischen Dienstes übertragen, welche er mit ebenso großem Eifer als Erfolg ins Leben rief. Sowohl die für die Beobachter ausgearbeiteten Instruktionen als auch die Publikationen der Beobachtungsresultate wichen in vielen Beziehungen von den herkömmlichen Formen ab und können als mustergültig bezeichnet werden. Er führte auch die tägliche Herausgabe von Wetterkarten und Wetterberichten mit Wetterprognosen ein und organisierte einen weit ausgebildeten Dienst für die Untersuchung der Gewitter.

Das hohe wissenschaftliche Ansehen, das er sich durch die letzteren Arbeiten erworben, veranlaßte die preußische Regierung ihn (1885) als ersten ordentlichen Professor der Meteorologie in Deutschland an die Universität zu Berlin und als Direktor des Meteorologischen Instituts daselbst zu berufen. Es ist ihm ungemein schwer gefallen, München zu verlassen, da er dadurch den Entschluß fassen mußte, der Physik, der er so lange treu gedient und in der er durch seine elektrischen Forschungen eben an einen ihm die weitesten Aussichten eröffnenden Punkt gelangt war, zu entsagen und sich einer neuen Lebensaufgabe zuzuwenden. Er sollte den damals noch sehr daniederliegenden Wetterdienst in Preußen reorganisieren; es ist ihm auch durch sein organisatorisches Talent und durch unablässige Wirksamkeit als Leiter des enormen, viel verzweigten Verwaltungsapparates gelungen, das Institut zu einer mustergültigen Anstalt auszubauen, die im In- und Auslande das größte Ansehen genießt.

Bei seiner wissenschaftlichen Tätigkeit befaßte sich Bezold dementsprechend in der ersten Zeit mit rein physikalischen Problemen, später insbesondere mit solchen der Meteorologie.

Von seiner physikalischen Arbeit bewegt sich der größere Teil auf dem Gebiete der Elektrizitätslehre. An den vorher erwähnten ersten größeren Aufsatz über die physikalische Bedeutung der Potentialfunktion schließen sich Untersuchungen

an: über das Verhalten der starren Isolatoren gegen Elektrizität, über die elektrische Entladung, über die elektromotorische Kraft des galvanischen Lichtbogens, über die Theorie des Elektrophors, über den Zusammenhang zwischen Temperatur eines glühenden Drahtes und der Zusammensetzung des von ihm ausgehenden Lichtes sowie über die Brechung von Strom- und Kraftlinien; seine Versuche über elektrische Staubfiguren gaben ihm ein elegantes Mittel zur experimentellen Prüfung für die Art der Entladung. Die hohe Bedeutung seiner Untersuchungen über elektrische Entladungen ist anfangs nicht genügend beachtet worden, bis später Heinrich Hertz die Aufmerksamkeit darauf lenkte; sie kamen den bahnbrechenden Entdeckungen des letzteren über den Zusammenhang von Licht und Elektrizität, die unter anderem für die Begründung der drahtlosen Telegraphie den Ausgang bildeten, sehr nahe.

Eine zweite Reihe von Arbeiten Bezolds gehört der Optik und der Farbenlehre an. Es sind namentlich auch schwierige Fragen der physiologischen Optik, welche er mit tiefem Verständnis und feiner Beobachtungsgabe zu lösen bemüht war; es sind hierher zu zählen seine Untersuchungen über binokulares Sehen und über binokulare Farbenmischung, über Zerstreuungsbilder auf der Netzhaut, über das Gesetz der Farbenmischung und die physiologischen Grundfarben, seine Vergleichung von Pigmentfarben mit Spektralfarben und seine Arbeit zur Lehre von den identischen Netzhautpunkten. Ganz eigenartig ist sein 1874 erschienenes Werk: „Die Farbenlehre im Hinblick auf Kunst und Kunstgewerbe“, wozu er durch den Umgang mit Künstlern, besonders mit seinem Schwager, dem feinfühlenden Maler Anton Seitz, veranlaßt worden war.

Seit der Gründung der Bayerischen Meteorologischen Zentralstation und seiner Berufung als Direktor des Meteorologischen Instituts nach Berlin wurde Bezolds Arbeitskraft fast ganz von der Meteorologie in Anspruch genommen. Schon frühe interessierten ihn die Erscheinungen in der Atmosphäre, die er auf das genaueste beobachtete. Er bezeichnete die Meteorologie als eine Physik der Atmosphäre; seine Arbeiten hierin haben die

Meteorologie in bahnbrechender Weise gefördert. Durch statistische Zusammenstellungen fand er, daß gewisse Gesetzmäßigkeiten in der Häufigkeit der Gewitter existieren und darin eine säkulare Periode auftritt, welche zu den schon bekannten Perioden der Sonnenflecken und der Nordlichter in einfacher Beziehung steht. Hierher gehört seine Abhandlung über die Kälterückfälle im Mai, die „strengen Herren", sowie die über die Verteilung des Luftdruckes und der Temperatur bei Gewittern. Die Vorgänge während der Dämmerung und den Ablauf der Farbenerscheinungen während derselben wurden von ihm in München und im Gebirge genau verfolgt und beschrieben. In Berlin beschäftigte er sich mit einer neuen Klasse von Untersuchungen über die Thermodynamik der Atmosphäre, in denen er den Zusammenhang zwischen Meteorologie und Physik herzustellen verstand und die Meteorologie erst eigentlich zu einer der exakten Naturwissenschaften erhoben hat. Seine Forschungen zur Gaußschen Theorie des Erdmagnetismus haben diesem Wissenszweige neue Wege gewiesen.

Noch im vorigen Jahre erschienen seine gesammelten Abhandlungen über Meteorologie und Erdmagnetismus, welche dartun, wie sehr er hierin die Wissenschaft bereichert hat.

Bezold war auch ein ausgezeichneter akademischer Lehrer; namentlich hat er in öffentlichen Vorträgen in weiteren Kreisen über viele allgemeine Fragen der Meteorologie ein Verständnis für letztere zu erwecken gewußt.

Die physikalischen und meteorologischen Arbeiten Bezolds sichern ihm ein ehrenvolles Andenken in der Geschichte der Wissenschaft.

## Henri Moissan.

Am 21. Februar 1907 ist das auswärtige Mitglied unserer Akademie, der berühmte Chemiker Henri Moissan, Professor der Chemie an der Universität zu Paris und Membre de l'Institut, im rüstigsten Alter von 55 Jahren und in voller Schaffenskraft auf der Höhe seines Ruhmes der tückischen Blinddarmentzündung

erlegen, nachdem er eben von einer Reise nach Stockholm, wo er den Nobelpreis in der schwedischen Akademie in Empfang genommen, zurückgekehrt war. Seine unermüdliche Tätigkeit, durch die er für die Wissenschaft und die Technik die größten Erfolge errang, bewegte sich fast ausschließlich auf dem Gebiete der anorganischen Chemie, welche durch die mächtige Entwicklung der Chemie der Kohlenstoffverbindungen sehr zurückgedrängt worden war.

Moissan wurde am 28. September 1852 zu Paris geboren. Er begann an der Pariser Universität seine den Naturwissenschaften, besonders der Chemie und Physik, gewidmeten Studien. Den ersten chemischen Unterricht empfing er am Muséum d'Histoire naturelle in dem Laboratorium von Fremy; hierauf trat er in das Institut von Decaisne und Dehérain ein, wo er im Alter von 22 Jahren seine erste wissenschaftliche Arbeit über die Aufnahme und Abgabe von Kohlensäure und Sauerstoff durch die Pflanze in der Abhängigkeit von der Belichtung ausführte. Nachdem er die verschiedenen Grade erlangt hatte, wurde er (1879) Repetitor der Physik an dem Institut agronomique, dann (1883) Professor der Toxikologie an der École supérieure de Pharmacie und zuletzt (1900) Professor der Chemie an der Faculté des Sciences an der Sorbonne, wo er das ausschließlich wissenschaftlicher Forschung gewidmete Laboratoire de Chimie générale leitete.

Seine ersten Arbeiten in der unorganischen Chemie waren die über verschiedene Chromverbindungen und über neue Amalgame der Metalle der Eisengruppe.

Von 1884 an beschäftigte er sich mit Untersuchungen über Fluor und Fluorverbindungen, welche er 20 Jahre lang fortsetzte. Im Jahre 1886 gelang ihm dabei eine der glänzendsten Entdeckungen in der Chemie des vorigen Jahrhunderts, nämlich die Isolierung und Reindarstellung des Elementes Fluor, ein Problem, dessen Lösung vorher die bedeutendsten Chemiker, wie Davy und Fremy, erfolglos versucht hatten. Er stellte zunächst eine große Anzahl merkwürdiger Fluorverbindungen dar: die Fluoride des Kohlenstoffs, Jods und Schwefels, die Oxyfluor-

verbindungen des Schwefels und Stickstoffs, das wasserfreie Platinfluorid, das Phosphor-, Mangan- und Arsentrifluorid, das Phosphorpenta- und Phosphoroxyfluorid; er machte ferner Versuche über die Einwirkung von elektrischen Funken auf das Phosphortrichlorid und studierte die Additionsprodukte von Brom auf Phosphortrifluoride. Von besonderem Interesse ist das von ihm entdeckte Schwefelhexafluorid, welches ein höchst beständiges Gas bildet, das weder von Wasser noch von Alkali angegriffen wird, sowie das in der letzten Zeit von ihm dargestellte sehr reaktionsfähige Nitrofluorid aus Stickoxyd und Fluor.

Das Wichtigste war aber die Reindarstellung des Fluors. Es ist seinem Scharfsinn und seiner hervorragenden Experimentierkunst durch dreijährige unermüdliche Arbeit gelungen, die enormen Schwierigkeiten zu überwinden, welche sich wegen der außergewöhnlichen Reaktionsfähigkeit dieses Elementes seiner Isolierung entgegenstellen. Er erhielt es durch Elektrolyse, die er in größerer Ausdehnung in die Wissenschaft einführte, und zwar der wasserfreien, durch einen Zusatz von Fluorkalium leitungsfähig gemachten Flußsäure, an der Anode in Form eines gelben Gases, welches durch flüssige Luft in eine gelbe Flüssigkeit sich verwandeln läßt. Das Fluor zeigt von allen Elementen die größte Reaktionsfähigkeit, d. h. es hat eine sehr große Fähigkeit, sich mit anderen Stoffen zu verbinden: in Wasserstoff entzündet es sich von selbst, Wasser zerlegt es augenblicklich unter Bildung eines indigoblauen Dampfes, der aus Ozon besteht; Silizium entzündet sich darin von selbst, Kienruß bei 150° unter Bildung von Tetrafluorkohlenstoff. Die Reindarstellung des Elementes Fluor ist die bedeutendste Tat von Moissan, die ihm auch den Nobelpreis eingebracht hat. Alle seine Erkenntnisse über das Fluor und die Fluorverbindungen sind in seinem Werke: „Le Fluor et ses Composés“ zusammengefaßt.

Daran schlossen sich seine Untersuchungen über das von ihm zuerst rein gewonnene Bor und seine Verbindungen an.

Ein weiteres Verdienst Moissans ist die Erfindung des ungeheuere Hitzegrade liefernden elektrischen Lichtbogenofens

und seine systematische Anwendung für die Wissenschaft. Er erreichte damit bis 3500°. Die strengflüssigsten Metalle wurden dadurch geschmolzen und verflüchtigt und neue Verbindungen erzeugt. Durch Reduktion der Metalloxyde von Uran, Wolfram, Vanadin, Titan, Kalzium etc. mit Kohle im elektrischen Ofen erhielt er die Karbide der Metalle; nur wenige Metalle zeigten sich unfähig zur Karbidbildung. In ähnlicher Weise stellte er auch Verbindungen des Siliziums und Bors mit den Metallen her, die Salizide und Boride; dann durch Reduktion der Phosphate, Arseniate und Antimoniate mit Kohle die Phosphide, Arsenide und Antimonide.

Die Karbide zeigen die wichtige Eigenschaft, durch Wasser unter Bildung von flüssigen und festen Kohlenwasserstoffen, wie Acetylen, Methane etc. zersetzt zu werden. Von besonderer Bedeutung ist in dieser Hinsicht das Kalziumkarbid durch seine Verwendung in der Technik geworden, da es mit Wasser das Azetylen liefert; Moissan ist dadurch der hauptsächlichste Begründer der großartigen Azetylenindustrie geworden.

In seinem Werke: „Le four électrique“ (1897) finden sich seine Erfahrungen mit dem elektrischen Ofen beschrieben.

Die Entdeckung, welche Moissans Namen besonders populär gemacht hat, ist die künstliche Herstellung von Diamanten, ein Problem, das bekanntlich schon viele Chemiker beschäftigt hatte; er erhielt dabei jedoch anfangs nur kleinste Kristalle in sehr geringer Menge. Später machte er, angeregt durch die winzige Diamanten führenden eisenhaltigen Meteoriten von Cañon-Diablo, abermalige Versuche über künstliche Herstellung von Diamanten. Er kam nämlich durch diesen Fund auf die Idee, daß der Diamant ein aus Eisen unter hohem Druck kristallisierender Kohlenstoff wäre. Er ließ daher den Kohlenstoff unter hohem Druck aus einer Lösung von flüssigem Eisen sich ausscheiden. Um diesen Druck zu erzeugen, ließ er geschmolzenes, kohlenstoffhaltiges Eisen in Wasser fließen, und erhielt dann aus dem erkalteten Eisen Kriställchen, welche in ihren physikalischen und chemischen Eigenschaften vollständig den natürlichen Diamanten entsprachen.

In den letzten Jahren war er noch mit den Nitriden, Hydriten und den Metallammoniumverbindungen beschäftiget; er isolierte dabei die Hydrüre der Alkali- und Erdalkalimetalle und stellte reines metallisches Kalzium her. Auch führte er den Nachweis, daß den Metallhydriden jeder Metallcharakter fehlt und daß sie den elektrischen Strom ebensowenig leiten wie der flüssige Wasserstoff, wodurch die Metalloidnatur des letzteren bewiesen wurde.

Mit einer Anzahl von Mitarbeitern gab er das wertvolle große Lehrbuch der anorganischen Chemie: „Traité de Chimie minérale“ in 4 Bänden heraus.

Durch alle diese Entdeckungen gehört Moissan zu den hervorragendsten Forschern auf dem Gebiete der unorganischen Chemie.

Er sprach einmal die Idee aus, daß die Bildung der natürlich vorkommenden Kohlenwasserstoffe durch Zersetzung von im Erdinnern befindlichen Karbiden durch Wasser zustande gekommen sei; man sagt, es wäre dies die einzige von ihm geäußerte Theorie gewesen, und doch hat er die Wissenschaft der Chemie mit einer großen Anzahl wichtigster Erkenntnisse bereichert wie wenige seiner Zeitgenossen.



# Sitzungsberichte

der

# Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften.

## Mathematisch-physikalische Klasse.

### Sitzung vom 2. November 1907.

1. Herr S. Günther machte eine Mitteilung: „Über einen portugiesischen Portulanatlas des Entdeckungszeitalters“.

Das kostbare Dokument alter Kartographie gehört der an literarischen Schätzen reichen Bibliothek des Fürsten Öttingen-Wallerstein in Maihingen an. Es wird beabsichtigt, dasselbe, welches bisher noch keine literarische Verwertung gefunden hat, durch eine mit Kommentar versehene Ausgabe in den „Abhandlungen“ weiteren Kreisen zugänglich zu machen.

2. Herr W. C. Röntgen legt eine Mitteilung des Herrn Dr. A. Joffé vor: Eine Bemerkung zu der Arbeit von E. Ladenburg: „Über Anfangsgeschwindigkeit und Menge der photoelektrischen Elektronen“.

Es wird in dieser Notiz nachgewiesen, daß die Versuche des Herrn E. Ladenburg in einigen wesentlichen Punkten

die Folgerungen aus der Einsteinschen Theorie der Erzeugung und Verwandlung des Lichtes bestätigen.

3. Herr W. C. Röntgen legt eine Erklärung des Herrn A. Sommerfeld bezüglich einer in den Sitzungsberichten Bd. 37 1907 p. 177 veröffentlichten Mitteilung von Herrn F. Lindemann: „Zur Elektronentheorie“ vor.

# Eine Bemerkung zu der Arbeit von E. Ladenburg: „Über Anfangsgeschwindigkeit und Menge der photoelektrischen Elektronen etc.“ [1])

Von **A. Joffé.**

(Mit Tafel II.)

(*Eingelaufen 2. November.*)

Die Ergebnisse der von Herrn E. Ladenburg veröffentlichten Arbeit bestätigen in einigen wesentlichen Punkten die Voraussagungen, die Herr A. Einstein[2]) aus der atomistischen Hypothese der Strahlungsenergie gezogen hat. Stellt man nämlich die Beobachtungen der Tabellen 3 oder 2 im Koordinatensystem $P$, $\nu$ dar, so kommt man zu der von A. Einstein geforderten linearen Beziehung für alle drei untersuchten Metalle (vgl. Tafel II). Nur ist nach den vorliegenden Messungen die Neigung dieser Geraden nicht universell, wie es die Einsteinsche Theorie fordert, sondern variiert etwas mit der Substanz. Andererseits wird die Unabhängigkeit der Geschwindigkeit der Elektronen von der Lichtstärke bestätigt. Berechnet man aus diesen Geschwindigkeiten das Plancksche Wirkungsquantum $h$, so kommt man zu Zahlen, die zwischen $2{,}2 \cdot 10^{-27}$ und $3{,}5 \cdot 10^{-27}$ liegen, während die Strahlungstheorie $6{,}5 \cdot 10^{-27}$ ergibt. Das

---

[1]) E. Ladenburg, Phys. Zeitschrift 8, S. 590, 1907.

[2]) A. Einstein, Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. Ann. d. Phys. 17, S. 132, 1905.

Zur Theorie der Lichterzeugung und Lichtabsorption. Ann. d. Phys. 20, S. 199, 1906.

Kontaktpotential liegt für die drei Metalle zwischen + 0,9 und + 1,6 Volt.

Herr E. Ladenburg gelangt zu der Bezeichnung $\nu = a\sqrt{P}$, die seine Beobachtungen fast ebensogut widergiebt, mit der Strahlungstheorie aber in keiner Beziehung steht. Es wäre für die Einsteinsche Theorie von großem Interesse, die Beobachtungen auf ein größeres Gebiet und besonders auf lange Wellen auszudehnen.

St. Petersburg. Physikalisches Laboratorium des Polytechnikums, 23. Oktober 1907.

# Zur Diskussion über die Elektronentheorie.

Von **A. Sommerfeld.**

*(Eingelaufen 2. November.)*

Herr Lindemann hat in seiner Entgegnung vom 6. August (diese Sitzungsberichte p. 177) auf's Neue seiner Meinung nach wesentliche Einwände gegen meine Behandlung der Elektronentheorie vorgebracht. Wie unberechtigt dieselben sind, dürfte schon daraus hervorgehen, daß sein Haupteinwand, die von mir mit $\varphi$ bezeichnete Potentialfunktion genüge nicht den fundamentalen partiellen Differentialgleichungen, lediglich auf einem Rechenfehler (vgl. Zeile 8, p. 203) beruht. Auch die übrigen Einwände des Herrn Lindemann habe ich in einem Manuskript, das ich Herrn Lindemann zur Verfügung gestellt hatte, meiner Meinung nach vollständig widerlegt. Unter diesen Umständen halte ich eine Fortsetzung der Diskussion in diesen Sitzungsberichten nicht für angemessen, umsomehr, als die Schwierigkeiten, die sich zur Zeit der Elektronentheorie entgegenstellen, gar nicht auf dem Gebiete der mathematischen Durchführung, sondern auf dem der physikalischen Grundlagen (insbesondere Michelson-Versuch) liegen. Selbstverständlich behalte ich mir vor, falls es erforderlich erscheinen sollte, meine Erwiderung auf die Einwände des Herrn Lindemann an anderem Orte zu veröffentlichen.

Sitzung der math.-phys. Klasse vom 7. Dezember 1907.

1. Herr Karl Andreas Hofmann hält einen Vortrag: „Über die Struktur der Cyanide." Der Vortrag wird an anderer Stelle veröffentlicht werden.

Die im Hinblick auf das Verhalten der Komponenten auffallende Beständigkeit der Doppelcyanide von der Art des gelben und roten Blutlaugensalzes hat zu vielfachen Erörterungen über diese wichtigen Verbindungen geführt, deren Aufbau um so merkwürdiger erschien, als die Valenzlehre hier versagte, insoferne sich kein Grund dafür finden ließ, daß zwei gesättigte Moleküle wie Schwermetallcyanür und Cyankalium mit ganz besonders starker Kraft sich zu einem neuen Ganzen vereinigen. Zwar hat man versucht, durch Annahme von Tricyangruppen den Zusammenhang zu erklären, aber die Arbeiten des Verfassers zeigten, daß parallel zu den Hexacyaniden $FeCy_6K_4$ und $FeCy_6K_3$ eine Reihe von Pentacyaniden existiert, die vom Nitroprussidsalz $FeCy_5NOMe^I_2$ ausgehend, die heterogensten Gruppen neben dem Cyan fest gebunden enthalten: in den Pentacyaniden $FeCy_5NO_2Na_4$; $FeCy_5NH_3Na_3$; $FeCy_5H_2ONa_3$; $FeCy_5SO_3Na_5$; $FeCy_5AsO_2Na_4$ können zwei Ticyangruppen nicht vorhanden sein, also muß der Zusammenhalt des ganzen Moleküls eine andere Ursache haben.

Nach Werner kommt dem zentralen Eisenatom die Fähigkeit zu, die Säuregruppen und die übrigen Bestandteile des Komplexes in bestimmter Weise, nämlich in oktaedrischer Anordnung zu gruppieren, aber jede chemische Kraft kann nur gegenseitig binden und die Tatsache, daß bei den Cyaniden

solche beständige Gebilde ungleich häufiger als sonst auftreten, führt zu dem Schluß, daß die Eigenart des Cyans die gegenseitige Bindung mit bedingt.

Für das Cyan sind nun im Cyanwasserstoff und seinen Salzen zwei Gruppierungen möglich, nämlich als Nitril $HC \equiv N$, oder als Carbylamin $C = NH$.

Der direkte Vergleich der Nitrile mit den Carbylaminen hinsichtlich ihrer Bindungsfähigkeit an Metallsalze mußte hier entscheiden.

In Gemeinschaft mit Herrn Günther Bugge wurden dargestellt und untersucht die Verbindungen von Phenyl- und Äthylkarbylamin mit Platinchlorür, Iridiumchlorür, Palladiumchlorür, Eisenchlorid, Kobaltchlorür:

$PtCl_2 \cdot (C_6H_5NC)_2$; $PtCl_2 \cdot (C_2H_5NC)_2$; $IrCl_3 \cdot (C_6H_5NC)$;
$PdCl_2 \cdot (C_6H_5NC)_3$; $FeCl_3 \cdot (C_2H_5NC)_2$; $FeCl_3 \cdot (C_6H_5NC)_3$;
$OFe_2Cl_4 \cdot (C_2H_5NC)_4$; $OFe_2Cl_4 \cdot (C_2H_5NC)_5$; $CoCl_2 \cdot (C_2H_5NC)_2$,

sowie die Verbindungen mit Benzonitril und Acetonitril:

$$PtCl_2 \cdot (C_6H_5CN)_2 \text{ und } PtCl_2 \cdot (CH_3CN)_2.$$

Von diesem letzteren leitet sich infolge eines hydrolytischen Vorganges das indigoblaue Platodiacetamid

$$Pt(NHCOCH_3)_2 + H_2O$$

ab. Kobalt- und Eisensalze vereinigen sich nicht mit den beiden Nitrilen.

Unverkennbar entsprechen nach Bildungsenergie und Verhalten nur die Carbylamine, nicht die Nitrile, den Cyangruppen der Doppelcyanide.

Da somit zweiwertiger, also ungesättigter Kohlenstoff in den Cyaniden vorliegt, kommt neben dem zentralen Metallatom diesem die bindende Kraft zu. Damit stimmt überein, daß auch andere ungesättigte Kohlenstoffgruppen, wie z. B. das Aethylen, Metallsalze wie besonders Quecksilberchlorid, aber auch Eisen- und Platinchlorür aufnehmen. Hieher gehören

noch die kürzlich in Gemeinschaft mit Herrn v. Narbutt dargestellten Anlagerungen von Dicyklopentadiïn an Platinsalz z. B.

$$C_{10}H_{12}OCH_3PtCl \text{ und } C_{10}H_{12}OC_2H_5PtCl.$$

Die von den Cyangruppen infolge der ungesättigten Stufe ihrer Kohlenstoffatome ausgehende Bindungsfähigkeit kann zu merkwürdigen Störungen im analytischen Verhalten führen, wie am Quecksilbercyanid nachgewiesen wird. Ostwald sagt von diesem Salz: „es kann als Typus einer durch Fehlen der elektrolytischen Dissoziation reaktionsunfähig gemachten Verbindung angesehen werden.“

In der Tat fällt Silbernitrat aus Quecksilbercyanidlösung kein Cyansilber aus und verdünnte Kalilauge läßt kein Quecksilberoxyd austreten. Es wurde aber gefunden, daß in beiden Fällen sogleich Reaktion erfolgt; denn es bilden sich stabile Additionen von Silbernitrat resp. Kalilauge an das Quecksilbercyanid. Um die normalen Umsetzungen zu erreichen, muß man konzentrierte Lauge auf das trockene Cyanid wirken lassen, wodurch Quecksilberoxyd und Kaliumcyanid entstehen, oder um die Cyangruppen sich betätigen zu lassen, muß man statt Silbernitrat das Silberacetat oder das Silbernitrit zur Lösung von Quecksilbercyanid hinzugeben; sofort fällt weißes Cyansilber nieder. Daraus folgt, daß Quecksilbercyanid, trotzdem es in wässeriger Lösung elektrolytisch nicht dissoziiert ist, also keine Ionen bildet, dennoch normale Quecksilber- und Cyanreaktion zeigt. Der Mangel oder das Vorhandensein von elektrolytisch wirksamen Bruchstücken der Moleküle: „von Ionen“, ist für das chemisch-analytische Verhalten nicht entscheidend, sondern es können außer den Ionen auch nicht dissoziierte Moleküle in Lösung sofortige Umsetzung erfahren.

2. Herr Ferdinand Lindemann macht zwei Mitteilungen:

a) „Über das sogenannte letzte Theorem von Fermat“;

b) „Zur Elektronentheorie.“

3. Herr H. v. Seeliger legt eine Arbeit des Herrn Konservators Dr. J. B. Messerschmitt vor: „Magnetische Ortsbestimmungen in Bayern.“ (III. Mitteilung.)

Die Störungen des Erdmagnetismus am Observatorium in München haben sich durch die Eröffnung der neuen Trambahnlinie am linken Ufer der Isar sehr vermehrt, wodurch die Genauigkeit der Beobachtungen wieder verringert wird.

Die Feldbeobachtungen wurden für das Hauptnetz in der Rheinpfalz vollendet. Ein Vergleich mit den älteren Messungen von Lamont und Neumayer ergab eine gute Übereinstimmung. Eine weitere Anzahl Stationen im rechtsrheinischen Bayern dient zur Verdichtung des Netzes der magnetischen Landesaufnahme, sowie zur Vorbereitung für die Detailaufnahme der wichtigeren Störungsgebiete.

4. Herr R. Hertwig überreicht eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung des Herrn Dr. Wassilieff über: „Japanische Aktinien.“

Die Arbeit behandelt die Aktinien, welche Herr Professor Doflein auf seiner ostasiatischen Reise in der Sagami-Bucht gefischt hat. Bei der Untersuchung hat sich herausgestellt, daß fast die Hälfte der gefundenen Arten für die Wissenschaft neu ist, was sich daraus erklärt, daß die Sagami-Bucht sich durch einen ganz außergewöhnlichen Tierreichtum auszeichnet und daß die Aktinienfauna des stillen Ozeans bisher wenig Berücksichtigung gefunden hat.

5. Herr Alfred Pringsheim legt zwei Arbeiten des Herrn Dr. Oskar Perron vor:

a) „Über die Konvergenz der Jacobi-Kettenalgorithmen mit komplexen Elementen“;
b) „Über die Kettenbruchentwicklung des Quotienten zweier Besselscher Funktionen.“

In der ersten: „Über die Konvergenz der Jakobi-Kettenalgorithmen mit komplexen Elementen“ gibt der Verfasser, der

in seiner Habilitationsschrift bereits die Konvergenz solcher Algorithmen für den Fall positiver Elemente, sowie periodischer Algorithmen mit komplexen Elementen behandelt hat, ein allgemeines Kriterium für die Konvergenz beliebiger Algorithmen mit komplexen Elementen, im wesentlichen eine Ausdehnung des Pringsheimschen Fundamental-Kriteriums für gewöhnliche Kettenbrüche. Durch Spezialisierung leitet dann der Verfasser nicht nur umgekehrt jenes Kettenbruch-Kriterium, sondern auch noch einige andere aus dem seinigen ab. Weiter zeigt er, wie sich auch der bekannte Legendresche Irrationalitäts-Satz auf Jacobische Algorithmen übertragen und wie diese Verallgemeinerung sich verwerten läßt, um die Nichtexistenz linearer Relationen zwischen gewissen Transcendentien zu beweisen. Daran knüpfen sich weitere Analogien mit verschiedenen Kettenbruch-Entwickelungen.

In der zweiten Abhandlung: „Über die Kettenbruchentwicklung des Quotienten zweier Besselschen Funktionen" gibt der Verfasser einen neuen Beweis für die Konvergenz dieser Entwicklung, deren Ursprung bis auf Euler (1737) zurückgeht, während nach mancherlei mißglückten, vom Verfasser ausgeführten kritischen Versuchen überhaupt erst im Jahre 1895 von Herrn Graf ein brauchbarer Beweis geliefert wurde.

6. Protokoll über die am 26. Oktober 1907 dahier stattgefundene Sitzung der luftelektrischen Kommission der deutschen kartellierten Akademien.

# Über das sogenannte letzte Fermatsche Theorem.

Von **F. Lindemann.**

*(Eingelaufen 7. Dezember 1907.)*

In einer früheren Mitteilung[1]) hatte ich die von Abel ohne Beweis mitgeteilten Formeln abgeleitet, welche drei der Gleichung $x^n = y^n + z^n$ genügende ganze Zahlen $x, y, z$ durch die $n^{\text{ten}}$ Potenzen dreier anderer Zahlen darstellen. Die weiteren daran geknüpften Folgerungen waren aber nicht korrekt. Trotzdem hielt ich an der Überzeugung fest, daß die damals benutzten Hilfsmittel geeignet sein müßten, der Lösung des Problems näher zu kommen, und glaube dies Ziel nunmehr erreicht zu haben.

Zur Erleichterung der Übersicht wiederhole ich im folgenden meine frühere Ableitung der Abelschen Formeln (deren Aufstellung durch Abel mir damals erst nachträglich bekannt wurde) unter Hinzufügung einiger Ergänzungen.

Bekanntlich hat Fermat, ohne einen Beweis anzugeben, den Satz aufgestellt, daß die Gleichung $x^n = y^n + z^n$ nicht durch drei ganze Zahlen $x, y, z$ befriedigt werden könne, sobald die ganze Zahl $n$ größer als 2 ist. Diese Angabe wird uns in der von Bachet veranstalteten Diophant-Ausgabe[2])

---

[1]) Diese Sitzungsberichte, Jahrgang 1901.

[2]) Diophanti Alexandri arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Cum commentariis C. G. Bacheti V. C. et observationibus D. P. de Fermat Senatoris Tolosani. Accessit Doctrinae Analyticae inventum novum, collectum et varijs eiusdem D. de Fermat epistolis. Tolosae, MDCLXX.

überliefert, in welcher gelegentliche Randbemerkungen aus Fermats Handexemplare abgedruckt wurden. Die Quaestio VIII im zweiten Buche von Diophants Arithmetik handelt nämlich von der Aufgabe, ein gegebenes Quadrat in die Summe zweier Quadrate zu zerlegen; und am Schlusse dieser Quaestio findet sich folgender Passus: [1])

„Observatio Domini Petri De Fermat.

„Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum „in duos quadratoquadratos et generaliter nullam in infini- „tum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis „fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane „detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.“

Für den Fall $n = 3$ betont Fermat seinen Satz auch in einem Briefe an Digby vom 7. April 1658,[2]) in einem anderen Briefe vom 15. August 1657 stellt er die Aufgabe eine Zahl $x^3$ in der Form $y^3 + z^3$ darzustellen.[3])

Für eine gewisse Klasse von Zahlen $n$ (zu welcher z. B. alle Zahlen unter 100 gehören) hat bekanntlich Kummer bei Gelegenheit anderer Untersuchungen den Fermatschen Satz verifiziert.[4]) Einzelne einfache Fälle sind schon vielfach behandelt worden.

---

[1]) Vgl. auch Oeuvres de Fermat, publiés par Paul Tannery et Charles Henry, 1891, t. 1, p. 291.

[2]) Vgl. Wallis, Opera Mathematica, t. II, p. 844, Oxford 1693.

[3]) Beide Briefe abgedruckt in den Oeuvres de Fermat, t. II, p. 343 ff. und p. 376; vgl. ferner Henry, Recherches sur les manuscripts de Pierre de Fermat, Bulletino di bibliographia e di storia delle scienze matematiche e fisiche publ. da B. Boncompagni, Bd. XII, 1879, wo insbesondere auch die Frage erörtert wird, ob Fermat im Besitze von Beweisen für seine Sätze war; vgl. dazu Mansion, Nouvelle correspondance de mathématiques, t. V.

[4]) Monatsberichte der Berliner Akademie, April 1847 und Crelles Journal, Bd. 45, p. 93, 1847. ferner Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1857; vgl. die Darstellung bei H. J. Stephen Smith: Report on the theory of numbers, Part II, Reports of the Brit. Association for the advancement of science for 1860, London 1861, sowie

## § 1. Zerlegung der Zahlen $x, y, z$ in Faktoren.

Mit $x$, $y$, $z$ seien drei ganze positive Zahlen bezeichnet, welche der Größe nach geordnet sind, so daß:

$$x > y > z. \tag{1}$$

Es bedeute $n$ eine ungerade Primzahl; es ist also:

$$n > 2. \tag{2}$$

Wir nehmen an, es bestehe eine Gleichung der Form:

$$x^n = y^n + z^n \tag{3}$$

und wollen zeigen, daß diese Annahme zu Widersprüchen führt. Da gemeinsame Faktoren aus dieser Gleichung herausfallen, so können die Zahlen $x$, $y$, $z$ jedenfalls als relativ prim zueinander vorausgesetzt werden.

Die Differenz $x^n - y^n$ ist sofort in die Faktoren:

$$x - y \text{ und } x^{n-1} + x^{n-2} y + \ldots + y^{n-1} \tag{4}$$

zerlegbar; es muß deshalb auch die Zahl $z$ in entsprechender Weise in Faktoren zerfallen. Ist die Zahl $R$ ein Faktor von $z$, so müssen die beiden Ausdrücke (4) zusammen den Faktor $R^n$ enthalten; ist $R$ eine Primzahl und kommt die Potenz $R^{n-i}$ in $x - y$ vor, so muß die Potenz $R^i$ in dem anderen Ausdrucke (4) enthalten sein. Ist $R$ Potenz einer Primzahl, etwa $R = M^m$, so kann die Potenz $M^{(n-i)m+k}$ in $x - y$ vorkommen, und dann muß die Potenz $M^{im-k}$ in dem anderen Faktor enthalten sein. Eine solche Zerlegung wird auf mannigfache Weise möglich

---

bei Hilbert: Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4, 1894/95, p. 517 ff., wo auch die ältere Literatur angegeben ist; hinzuzufügen sind die Arbeiten von Genocchi in Band 3 und 6 der Annali di matematica und Crelles Journal, Bd. 99, ferner Pepin, Comptes rendus, t. 82. Einen eingehenden Bericht über Fermats Nachlaß gibt Henry: Bulletino di bibliografia, a. a. O.; einzelne Notizen findet man auch bei Rouse Ball: Mathematical recreations and problems. 2nd edit. London 1892.

sein; jedenfalls kann man die folgende Darstellung der drei in Betracht kommenden Faktoren erreichen.

Eine solche Zahl $R$ werde mit $r_i$ bezeichnet; dann ist

$$z = r \cdot r_1 \cdot r_2 \ldots r_n, \tag{5}$$

$$x - y = r^n \cdot r_1^{n-1} \cdot r_2^{n-2} \ldots r_{n-2}^2 \cdot r_{n-1} = r^n \cdot \varrho, \tag{6}$$

wobei also:

$$\varrho = r_1^{n-1} \cdot r_2^{n-2} \ldots r_{n-2}^2 \cdot r_{n-1}$$

gesetzt ist, ferner:

$$x^{n-1} + x^{n-2} y + \ldots + y^{n-1} = r_1 \cdot r_2^2 \cdot r_3^3 \ldots r_{n-1}^{n-1} \cdot r_n^n. \tag{7}$$

Jede dieser Zahlen $r_i$ kann wieder in verschiedene Faktoren zerfallen; für das Folgende kommen hauptsächlich die Zahlen $\varrho$, $r$ und $r_n$ in Betracht. Ist die hier angegebene Zerlegung auf mehrfache Weise möglich, so gelten für jede einzelne Zerlegung dieser Art die folgenden Betrachtungen.

In gleicher Weise kann die Differenz $x - z$ in Faktoren zerlegt werden; es ist:

$$x - z = q^n \cdot \varkappa = q^n \cdot q_1^{n-1} \cdot q_2^{n-2} \ldots q_{n-2}^2 \cdot q_{n-1}, \tag{6a}$$

ferner:

$$x^{n-1} + x^{n-2} z + \ldots + z^{n-1} = q_1 \cdot q_2^2 \ldots q_{n-1}^{n-1} \cdot q_n^n, \tag{7a}$$

$$y = q \cdot q_1 \ldots q_n. \tag{5a}$$

Eine analoge Zerlegung kann auch für die Summe $y + z$ zur Anwendung kommen, so daß:

$$y + z = p^n \cdot \pi = p^n \cdot p_1^{n-1} \cdot p_2^{n-2} \ldots p_{n-2}^2 \cdot p_{n-1}, \tag{6b}$$

$$\begin{aligned} &y^{n-1} - y^{n-2} z + y^{n-3} z^2 - \ldots + (-1)^{n-1} z^{n-1} \\ &\qquad = p_1 \cdot p_2^2 \ldots p_{n-1}^{n-1} \cdot p_n^n, \end{aligned} \tag{7b}$$

$$x = p \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_n. \tag{5b}$$

## § 2. Ableitung einer Hilfsformel.

Offenbar läßt sich, wenn $n$ eine ungerade Zahl bezeichnet, die Zahl $N_1$ so bestimmen, daß die Differenz:

$$x^n - y^n - N_1 (x - y)^n$$

durch das Produkt $xy$ teilbar wird; und zwar ergibt sich:

$$N_1 = 1.$$

Ferner kann $N_2$ so gewählt werden, daß der Ausdruck:

$$x^n - y^n - N_1 (x - y)^n - N_2 x y (x - y)^{n-2}$$

durch $x^2 y^2$ teilbar wird. Man muß zu dem Zwecke den Faktor von $x^{n-1} y$ gleich Null setzen und findet $N_1 n - N_2 = 0$, oder:

$$N_2 = n.$$

Der Faktor von $xy^{n-1}$ fällt dann von selbst heraus. Um ebenso das Aggregat:

$$x^n - y^n - N_1(x - y)^n - N_2 x y (x - y)^{n-2} - N_3 x^2 y^2 (x - y)^{n-4}$$

durch $x^3 y^3$ teilbar zu machen, muß man den Faktor von $x^{n-2} y^2$ (welcher bis auf das Vorzeichen gleich dem Faktor von $x^2 y^{n-2}$ ist) zum Verschwinden bringen, d. h. es muß:

$$- N_1 \binom{n}{2} + N_2 (n - 2) - N_3 = 0,$$

also:

$$N_3 = \frac{n (n - 3)}{2}$$

sein. In gleicher Weise wird:

$$x^n - y^n - N_1 (x - y)^n - N_2 x y (x - y)^{n-2} - N_3 x^2 y^2 (x - y)^{n-4} \\ - N_4 x^3 y^3 (x - y)^{n-6}$$

durch $x^4 y^4$ teilbar, wenn:

$$N_1 \binom{n}{3} - N_2 \binom{n-2}{2} + N_3 (n - 4) - N_4 = 0$$

ist, oder:

$$N_4 = \frac{n (n - 4)(n - 5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Ebenso kann man weiter schließen und findet, daß das Aggregat:

$$(8)\quad \begin{aligned} &x^n - y^n - N_1 (x-y)^n - N_2\, x\, y\, (x-y)^{n-2} \dots \\ &\qquad - N_s\, x^{s-1}\, y^{s-1} (x-y)^{n-2s+2} \end{aligned}$$

durch $x^s y^s$ teilbar ist, wenn $N_s$ durch die Gleichung:

$$(8^a)\quad \begin{aligned} &N_1 \binom{n}{s-1} - N_2 \binom{n-2}{s-2} + N_3 \binom{n-4}{s-3} - \dots \\ &+ (-1)^s N_{s-1} \binom{n-2s+4}{1} + (-1)^{s+1} N_s = 0 \end{aligned}$$

bestimmt wird, welche aussagt, daß in dem Aggregate (8) der Faktor von $x^{n-s+1} y^{s-1}$ (oder $x^{s-1} y^{n-s+1}$) verschwindet; und durch ein Rekursionsverfahren erhält man leicht (wie wir sogleich auch direkt bestätigen werden):

$$(9)\quad \begin{aligned} N_s &= \frac{n(n-s)(n-s-1)\dots(n-2s+4)(n-2s+3)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(s-1)} \\ &= \frac{n}{s-1}\binom{n-s}{s-2}. \end{aligned}$$

Aus der Rekursionsformel ($8^a$) folgt sofort: Sind $N_1$, $N_2$, $\dots N_{s-1}$ ganze Zahlen, so ist auch $N_s$ eine ganze Zahl.

Sei nun $n = 2\nu + 1$ und setzen wir $s = \nu$, so wird:

$$(10)\quad N_\nu = \frac{(2\nu+1)\,\nu\,(\nu+1)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

und wir haben identisch:

$$\begin{aligned} &x^n - y^n - N_1 (x-y)^n - N_2\, x y\, (x-y)^{n-2} - \dots \\ &\qquad - N_\nu\, x^{\nu-1} y^{\nu-1} (x-y)^3 = N x^\nu y^\nu (x-y), \end{aligned}$$

wo $N$ noch zu bestimmen ist; die linke Seite nämlich ist teilbar durch $x^\nu y^\nu$ und ist gleich Null für $x = y$. Der Wert von $N$ wird schließlich durch Fortsetzung derselben Schlußweise gefunden, die wir bisher anwandten, nämlich indem wir verlangen, daß aus dem Ausdrucke:

$$x^n - y^n - N_1 (x-y)^n - \dots - N_\nu x^{\nu-1} y^{\nu-1} (x-y)^3 - N x^\nu y^\nu (x-y)$$

der Term $x^{\nu+1}y^{\nu}$ (und folglich auch $x^{\nu}y^{\nu+1}$) herausfalle; es wird daher:

$$(11)\qquad N = N_{\nu+1} = 2\nu + 1 = n.$$

Zwischen beliebigen Zahlen $x$ und $y$ besteht hiernach die folgende Identität:

$$(12)\quad n x^{\nu} y^{\nu}(x-y) = x^n - y^n - (x-y)^n - \sum_{s=2}^{s=\nu} N_s x^{s-1} y^{s-1} (x-y)^{n-2s+2}.$$

Ist $n$ eine Primzahl, so sind nach obigem $N_2$ und $N_3$ durch $n$ teilbar; aus der Rekursionsformel ($8^a$) folgt also dann:

Die in der Identität (11) auftretenden und durch (9) gegebenen Zahlen $N_s$ sind sämtlich ganze Zahlen und (wenn $s > 1$) durch die Primzahl $n$ teilbar.

Die Bestimmung der Zahlenfaktoren $N_s$ hätte übrigens auch in der folgenden einfachen Weise geschehen können, indem man $x$ und $y$ durch spezielle Werte ersetzt und so die Aufgabe auf ein bekanntes Resultat zurückführt. Nehmen wir

$$x = e^{i\varphi},\ y = -e^{-i\varphi},$$

so wird:

$$x \cdot y = -1,\ \ x - y = 2 \cdot \cos\varphi,\ \ x^n - y^n = 2 \cdot \operatorname{cosin} n\varphi;$$

und aus (12) folgt (für $n$ ungerade):

$$\operatorname{cosin} n\varphi = 2^{n-1}\operatorname{cosin}^n\varphi + \sum_{s=2}^{\nu} N_s 2^{n-2s+1}(-1)^{s-1}(\operatorname{cosin}\varphi)^{n-2s+2}$$
$$+ n(-1)^{\nu}\operatorname{cosin}\varphi;$$

und diese Formel ist in der Tat mit der bekannten Entwicklung von cosin $n\varphi$ nach Potenzen von cosin $\varphi$ identisch,[1]) wenn man unter $N_s$ die obigen Zahlenwerte versteht.

---

[1]) Vgl. z. B. Serret, Traité d'algèbre, vol. 1, Nr. 109.

## § 3. Die Abelschen Formeln.

Setzen wir nun in (12) für $z$ und $x - y$ die Werte (5) und (6) ein, so ergibt sich die Relation:

$$n x^\nu y^\nu r^n \varrho = r^n \cdot r_1^n \ldots r_n^n - \sum_{i=1}^{i=\nu} N_i x^{i-1} y^{i-1} r^{n(n-2i+2)} \varrho^{n-2i+2},$$

oder, wenn beiderseits mit $\varrho r^n$ dividiert wird:

$$(13) \quad n x^\nu y^\nu = r_1 \cdot r_2^2 r_3^3 \ldots r_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i x^{i-1} y^{i-1} r^{n(n-2i+1)} \varrho^{n-2i+1},$$

wobei die Zahlen $N_i$ sämtlich ganze Zahlen sind.

Die relativen Primzahlen $x$ und $y$ können wegen (6) mit den Zahlen $r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$ keinen Faktor gemein haben. Jedes Glied der rechten Seite von (13) ist durch jede dieser Zahlen teilbar, da mit $\varrho$ die Zahl $r_1^{n-1} r_2^{n-2} \ldots r_{n-1}$ bezeichnet wurde. Soll daher auch die linke Seite durch $r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$ teilbar sein, so muß die Zahl $n$ diese Faktoren enthalten. Nun sollte aber $n$ eine Primzahl bedeuten; also bleiben nur folgende Möglichkeiten:

Entweder es ist:

$$(14) \qquad r_1 = n, \; r_2 = r_3 = \ldots = r_{n-1} = 1,$$

und dann folgt aus (5) und (6):

$$(15) \qquad z = n \cdot r \cdot r_n, \quad x - y = r^n \cdot n^{n-1}.$$

Oder es ist:

$$(16) \qquad r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_{n-1} = 1,$$

und dann folgt:

$$(17) \qquad z = r \cdot r_n, \quad x - y = r^n.$$

Eine andere Möglichkeit bleibt nicht offen, denn von den Zahlen $r_2, r_3, \ldots r_{n-1}$ kann keine gleich $n$ sein; es wäre nämlich dann die rechte Seite von (13) mindestens durch $n^2$ teilbar, folglich auch die linke Seite; d. h. es müßte $x$ oder $y$ durch $n$ teilbar sein; dann aber wären nach (6) beide Zahlen

durch $n$ teilbar, während sie doch als relative Primzahlen vorausgesetzt sind. Die Zahl $r_n$ bleibt zunächst beliebig.

Da die Gleichung (12), wenn $N_s$ durch (9) bestimmt wird, eine Identität ist, können wir in ihr $y$ durch $z$ ersetzen und erhalten so in Rücksicht auf ($6^a$) und ($7^a$) an Stelle von (13) die Beziehung:

$$(13^a)\quad n x^\nu z^\nu = q_1 \cdot q_2^2 \ldots q_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i x^{i-1} z^{i-1} q^{n(n-2i+1)} \varkappa^{n-2i+1},$$

auf welche wir die gleichen Überlegungen anwenden können, Es ist also entweder:

$$(15^a)\qquad y = n \cdot q \cdot q_n, \quad x - z = q^n \cdot n^{n-1},$$

oder:

$$(17^a)\qquad y = q \cdot q_n, \quad x - z = q^n.$$

Endlich können wir in der Identität (12) auch $x$ durch $y$ und $y$ durch $-z$ ersetzen; dann ergibt sich mit Rücksicht auf ($6^b$) und ($7^b$):

$$(13^b)\qquad \begin{aligned} (-1)^\nu n y^\nu z^\nu &= p_1 p_2^2 \ldots p_n^n \\ &- \sum_{i=1}^{\nu} N_i (-1)^{i-1} y^{i-1} z^{i-1} p^{n(n-2i+1)} \pi^{n-2i+1}; \end{aligned}$$

und die nochmalige Wiederholung der gleichen Schlußweise führt zu dem Resultate, daß entweder:

$$(15^b)\qquad x = n \cdot p \cdot p_n, \quad y + z = p^n \cdot n^{n-1},$$

oder:

$$(17^b)\qquad x = p \cdot p_n, \quad y + z = p^n$$

sein muß.

Da $x, y, z$ keinen gemeinsamen Faktor enthalten sollen, so ergibt die Kombination der Gleichungen (15), (17), ($15^a$), ($17^a$), ($15^b$), ($17^b$), daß nur drei Fälle noch näher zu untersuchen sind. Die Annahme (15) nämlich ist mit ($15^a$) oder ($15_b$) nicht vereinbar, so daß aus der Annahme (15) notwendig die Gleichungen ($17^a$) und ($17^b$) folgen. Gehen wir aber von (17) aus, so kann sowohl ($15^a$) als ($15^b$) möglich sein. Betrachten wir diejenigen Möglichkeiten als gleichwertig, die durch Ver-

tauschung von $y$ mit $z$ auseinander hervorgehen, so bleiben die folgenden drei Fälle:

$$\text{I)}\quad x-y=r^n\cdot n^{n-1},\qquad z=n\cdot r\cdot r_n,$$
$$x-z=q^n,\qquad y=q\cdot q_n,$$
$$y+z=p^n,\qquad x=p\cdot p_n;$$
$$\text{II)}\quad x-y=r^n,\qquad z=r\cdot r_n,$$
$$x-z=q^n,\qquad y=q\cdot q_n,$$
$$y+z=p^n\cdot n^{n-1},\qquad x=n\cdot p\cdot p_n;$$
$$\text{III)}\quad x-y=r^n,\qquad z=r\cdot r_n,$$
$$x-z=q^n,\qquad y=q\cdot q_n,$$
$$y+z=p^n,\qquad x=p\cdot p_n.$$

Hieraus folgt im Falle I):

$$x=\tfrac{1}{2}(p^n+q^n+n^{n-1}r^n),$$
$$\text{I}^{a})\quad y=\tfrac{1}{2}(p^n+q^n-n^{n-1}r^n),$$
$$z=\tfrac{1}{2}(p^n-q^n+n^{n-1}r^n),$$

im Falle II):

$$x=\tfrac{1}{2}(n^{n-1}p^n+q^n+r^n),$$
$$\text{II}^{a})\quad y=\tfrac{1}{2}(n^{n-1}p^n+q^n-r^n),$$
$$z=\tfrac{1}{2}(n^{n-1}p^n-q^n+r^n),$$

und im Falle III):

$$x=\tfrac{1}{2}(p^n+q^n+r^n),$$
$$\text{III}^{a})\quad y=\tfrac{1}{2}(p^n+q^n-r^n),$$
$$z=\tfrac{1}{2}(p^n-q^n+r^n).$$

Daß $x$ sich durch drei Zahlen $p, q, r$ in einer dieser Formen darstellen lassen müsse, hat schon Abel ohne Mitteilung eines Beweises angegeben.[1]) Er erwähnt außerdem noch die Möglichkeit:

---

[1]) Lettre à Holmboe vom 3. August 1823. Oeuvres t. II, p. 255.

$$x = \tfrac{1}{2}[p^n + n^{n-1}(q^n + r^n)],$$
$$y = \tfrac{1}{2}[p^n + n^{n-1}(q^n - r^n)],$$
$$z = \tfrac{1}{2}[p^n - n^{n-1}(q^n - r^n)],$$

welche bei uns ausgeschlossen ist, da sie auf das nicht statthafte Zusammenbestehen der Gleichungen (15) und ($15^a$) führen würde.

## § 4. Der Fall I); Darstellung von $x$, $y$, $z$.

Wir machen zuerst die Annahme I). Die Gleichung ($13^a$) wird hier:

$$n x^\nu z^\nu = q_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i x^{i-1} z^{i-1} q^{n(n-2i+1)}. \tag{18}$$

Alle Zahlen $N_i$ mit Ausnahme von $N_1 = 1$ sind nach obigem durch $n$ teilbar; auch $z$ ist durch $n$ teilbar; vom dritten Gliede ab sind also alle Terme der rechten Seite durch $n^2$ teilbar. Die linke Seite ist mindestens durch $n^{\nu+1}$ teilbar; folglich ist auch:

$$q_n^n - q^{n(n-1)} \equiv 0 \quad \text{mod. } n^2. \tag{19}$$

Nach dem Fermatschen Satze ist:

$$q^{n(n-1)} \equiv 1 \quad \text{mod. } n^2, \tag{20}$$

denn $q$ kann, da $y$ zu $z$ relativ prim ist, nicht durch $n$ teilbar sein. Es ergibt sich:

$$q_n^n \equiv 1 \quad \text{mod. } n^2,$$

und da identisch $q_n^n \equiv q_n$ mod. $n$ ist:

$$q_n \equiv 1 \quad \text{mod. } n. \tag{21}$$

Ebenso folgt aus ($13^b$):

$$(-1)^\nu n y^\nu z^\nu = p_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i (-1)^{i-1} y^{i-1} z^{i-1} p^{n(n-2i+1)}, \tag{22}$$

und die Anwendung derselben Schlußweise führt zu der Kongruenz:

$$p_n \equiv 1 \mod. n. \tag{23}$$

Folglich ist auch:

$$\begin{aligned} x &= p \cdot p_n \equiv p \mod. n, \\ y &= q \cdot q_n \equiv q \quad \text{„} \quad n. \end{aligned} \tag{24}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} x - y = p\,p_n - q\,q_n &\equiv p - q \mod. n \\ = r^n \cdot n^{n-1} &\equiv 0 \quad \text{„} \quad n, \end{aligned}$$

also auch:

$$p^n \equiv q^n \mod. n^2. \tag{25}$$

Weiter folgt aus den Gleichungen I):

$$2z = p^n - q^n + r^n \cdot n^{n-1}, \tag{26}$$

also nach (25), da $n > 2$:

$$2z \equiv 0 \mod. n^2. \tag{27}$$

Es wäre also $z$ nicht nur durch $n$, sondern durch $n^2$ teilbar, d. h. eine der beiden Zahlen $r$ oder $r_n$ müßte den Faktor $n$ enthalten.

Setzen wir die der Annahme I) entsprechenden, in (14) und (15) gegebenen Werte der Zahlen $r_i$ in (13) ein, so ergibt sich:

$$n\,x^\nu y^\nu = n\,r_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i\, x^{i-1} y^{i-1} r^{n(n-2i+1)} n^{(n-1)(n-2i+1)},$$

und nach Division mit $n$:

$$\begin{aligned} x^\nu y^\nu &= r_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i\, x^{i-1} y^{i-1} r^{n(n-2i+1)} n^{n^2-2in+2i-2} \\ &= r_n^n - r^{n(n-1)} n^{n(n-2)} - x\,y\,r^{n(n-3)} n^{n^2-4n+2} - \dots \\ &\quad - \frac{\nu(\nu+1)}{2\cdot 3} x^{\nu-1} y^{\nu-1} r^{2n} n^{2n-3}. \end{aligned} \tag{28}$$

Wäre also $r_n \equiv 0$ mod. $n$, so müßte eine der Zahlen $x$ oder $y$ durch $n$ teilbar sein, was nicht angeht. Es kann

also nur $r$ den Faktor $n$ enthalten und $r_n$ kann nicht durch $n$ teilbar sein. Es muß also $r$ den Faktor $n$ enthalten, so daß wir:

$$r = n \cdot r' \tag{29}$$

zu setzen haben, und $z$ mindestens durch $n^2$ teilbar ist. Es wird dann:

$$\begin{aligned} x^\nu y^\nu &= r_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i x^{i-1} y^{i-1} r'^{n(n-2i+1)} n^{2n^2-(4i-1)n+2i-2} \\ &= r_n^n - r'^{n(n-1)} n^{2n^2-3n} - \ldots - N_\nu x^{\nu-1} y^{\nu-1} r'^{2n} n^{4n-3}, \end{aligned} \tag{29a}$$

oder, da $N_\nu$ nach obigem durch $n$ teilbar ist:

$$x^\nu y^\nu \equiv r_n^n \quad \text{mod. } n^{4n-2}. \tag{30}$$

Da aber nach I):

$$x - y = n^{n-1} r^n = n^{2n-1} r'^n \tag{30a}$$

ist, so haben wir auch:

$$x^\nu - y^\nu \equiv n^{2n-1} \cdot \nu \cdot r'^n \cdot y^{\nu-1} \quad \text{mod. } n^{4n-2},$$

also nach (30):

$$y^\nu (y^\nu + \nu n^{2n-1} r'^n y^{\nu-1}) \equiv r_n^n \quad \text{mod. } n^{4n-2}$$

oder, wenn wir sogleich die entsprechende Kongruenz für $x$ hinzufügen:

$$\begin{aligned} y^{n-1} &\equiv r_n^n - \nu n^{2n-1} r'^n y^{2\nu-1} \quad \text{mod. } n^{4n-2}, \\ x^{n-1} &\equiv r_n^n + \nu n^{2n-1} r'^n x^{2\nu-1} \quad \;\;\text{"}\;\; n^{4n-2}. \end{aligned} \tag{30b}$$

Nach I) war ferner:

$$x = q^n + z = q^n + n^{2n} r'^n r_n^n,$$

$$y = p^n - z = p^n - n^{2n} r'^n r_n^n;$$

die Zahlen $p^{n(n-1)} - 1$ und $q^{n(n-1)} - 1$ sind durch $n^2$ teilbar; folglich haben wir:

$$x^{n-1} \equiv y^{n-1} \equiv 1 \quad \text{mod. } n^2,$$

und somit aus (30b):

$$r_n^n \equiv 1 \quad \text{mod. } n^2$$

und weiter:

$$(30^c) \qquad r_n \equiv 1 \quad \text{mod. } n.$$

Von diesem Resultate werden wir weiterhin Gebrauch machen, nachdem wir zuvor die Zahlen $x$, $y$, $z$ noch in anderer Weise werden dargestellt haben.

Nach dem Fermatschen Satze und infolge der Relationen (21) und (23) können wir setzen:

$$(31) \qquad \begin{aligned} p^{n-1} &= 1 + n\pi, \qquad & q^{n-1} &= 1 + n\varkappa, \\ p_n &= 1 + n\pi', & q_n &= 1 + n\varkappa'. \end{aligned}$$

Es wird dann, wenn noch $r = n \cdot r'$ gesetzt wird:

$$(32) \qquad \begin{aligned} x - z &= p p_n - n r r_n = p p_n - n^2 r' r_n, \\ y + z &= q q_n + n r r_n = q q_n + n^2 r' r_n. \end{aligned}$$

Die linken Seiten sind wegen I) bzw. gleich $q^n$ und $p^n$; also folgt:

$$\begin{aligned} q^n &= q + n q \varkappa = p + n p \pi' - n^2 r' r_n, \\ p^n &= p + n p \pi = q + n q \varkappa' + n^2 r' r_n, \end{aligned}$$

und hieraus:

$$(32^a) \qquad p - q - n^2 r' r_n = n(q\varkappa - p\pi') = n(q\varkappa' - p\pi),$$

oder:

$$p(\pi' - \pi) + q(\varkappa' - \varkappa) = 0.$$

Es bestehen demnach zwei Gleichungen der folgenden Form:

$$(33) \qquad \begin{aligned} M p &= (\varkappa' - \varkappa), \\ M q &= -(\pi' - \pi); \end{aligned}$$

und hierin ist $M$ eine ganze Zahl, denn $p$ und $q$ können keinen gemeinsamen Faktor enthalten, da sonst nach I) auch $x$ und $y$ denselben Faktor enthalten müßten.

Zu den Gleichungen (32) fügen wir aus I) die dritte hinzu:

$$(33^a) \qquad x - y = n^{2n-1} r'^n = p p_n - q q_n = p - q + n(p\pi' - q\varkappa').$$

Der Vergleich mit ($32^a$) zeigt, daß auch die Relation:

$$\frac{p-q}{n} = q\varkappa - p\pi' + nr'r_n = q\varkappa' - p\pi + nr'r_n$$
$$= q\varkappa' - p\pi' + n^{2n-2}r'^n$$

bestehen muß. Multiplizieren wir beiderseits mit $M$ und benutzen die Gleichungen (33), so folgt:

$$(33^b) \quad M(r_n - n^{2n-3}r'^{n-1})r' \cdot n = -(\varkappa - \varkappa')(\pi - \pi').$$

Es ist also mindestens eine der beiden Zahlen $(\varkappa - \varkappa')$ und $(\pi - \pi')$ durch $n$ teilbar; dann aber ist nach (33) $M$ durch $n$ teilbar (da $p$ und $q$ den Faktor $n$ nicht enthalten dürfen), und es folgt aus denselben Gleichungen (33), daß auch die andere dieser beiden Zahlen den Faktor $n$ enthält. Es bestehen demnach die Kongruenzen:

$$(33^c) \qquad \pi' \equiv \pi, \quad \varkappa' \equiv \varkappa \quad \text{mod. } n,$$

so daß die Gleichungen (31) durch die folgenden ersetzt werden dürfen:

$$(34) \quad \begin{aligned} p^{n-1} &= 1 + n\pi, & q^{n-1} &= 1 + n\varkappa, \\ p_n &= 1 + n\pi + n^2\pi_1, & q_n &= 1 + n\varkappa + n^2\varkappa_1. \end{aligned}$$

Bildet man wieder die Ausdrücke $x - z$ und $y + z$, so ergibt sich jetzt aus I):

$$q^n = q + nq\varkappa = p + np\pi + n^2p\pi_1 - n^2r'r_n,$$
$$p^n = p + np\pi = q + nq\varkappa + n^2q\varkappa_1 + n^2r'r_n,$$

und hieraus an Stelle von ($32^a$):

$$(35) \quad p - q + n(p\pi - q\varkappa) - n^2r'r_n = -n^2p\pi_1 = n^2q\varkappa_1.$$

Es ist folglich auch:

$$(36) \qquad -p\pi_1 = q\varkappa_1.$$

Die dritte Gleichung (nämlich $x - y = n^{2n-1}r'^n$) gibt jetzt:

$$n^{2n-1}r'^n = pp_n - qq_n = p - q + n(p\pi - q\varkappa) + n^2(p\pi_1 - q\varkappa_1).$$

Wir haben so die Differenz $p - q$ auf doppelte Weise berechnet; es ist:

$$(37)\quad \begin{aligned} p-q &= -n(p\pi - q\varkappa) + n^2 r' r_n - n^2 p \pi_1 \\ &= -n(p\pi - q\varkappa) + n^{2n-1} r'^n - n^2(p\pi_1 - q\varkappa_1); \end{aligned}$$

und somit erhalten wir, unter Benutzung von (36):

$$(38)\quad q\varkappa_1 = -p\pi_1 = r' r_n - n^{2n-3} r'^n.$$

Da $x$, $y$, $z$ zueinander relativ prim sind, so können keine zwei der Zahlen $p$, $q$ und $r'$ einen gemeinsamen Faktor enthalten; bezeichnet $R$ eine ganze Zahl, so kann man deshalb setzen:

$$(39)\quad \pi_1 = -qRr', \quad \varkappa_1 = pRr', \quad r_n - n^{2n-3} r'^{n-1} = pqR.$$

Die Gleichungen (34) werden demnach:

$$(40)\quad \begin{aligned} p_n &= p^{n-1} - n^2 q r' R, \\ q_n &= q^{n-1} + n^2 p r' R. \end{aligned}$$

Es wird somit nach I) und I[a]):

$$(41)\quad \begin{aligned} 2x &= p^n + q^n + n^{2n-1} r'^n = 2p^n - 2n^2 pqr'R, \\ 2y &= p^n + q^n - n^{2n-1} r'^n = 2q^n + 2n^2 pqr'R, \\ 2z &= p^n - q^n + n^{2n-1} r'^n = 2n^{2n-1} r'^n + 2n^2 pqr'R. \end{aligned}$$

Aus jeder dieser Relationen folgt:

$$(42)\quad p^n - q^n = 2n^2 pqr'R + n^{2n-1} r'^n,$$

was sich in Übereinstimmung damit befindet, daß die Differenz $p^n - q^n$ nach (25) durch $n^2$ teilbar sein muß.

## § 5. Der Fall I), wenn $r'$ nicht durch $n$ teilbar ist.

Unter Anwendung der Gleichungen (31) erhalten wir aus (41) durch Potenzieren:

$$(43)\quad \left.\begin{aligned} x^{n-1} &\equiv 1 + n^2(\pi + qRr') \\ y^{n-1} &\equiv 1 + n^2(\varkappa - pRr') \end{aligned}\right\} \text{ mod. } n^3.$$

Da nun $x - y$ nach I) durch $n^{2n-1}$ teilbar ist, so folgt durch Subtraktion:[1])

[1]) Dasselbe Resultat findet man, wenn man die Differenz $p^{n^2} - q^{n^2}$ einmal aus den Gleichungen (41) und (3) bildet, das anderemal durch Potenzieren aus der Gleichung (42).

(44) $\varkappa - \pi \equiv (p+q)\,R\,r' \equiv 2\,p\,R\,r' \equiv 2\,q\,R\,r' \quad \text{mod. } n.$

Wir kehren nunmehr zu dem in der Kongruenz ($30^c$) vorliegenden Resultate zurück. Mit Rücksicht auf den in (39) gegebenen Wert von $r_n$ ist:

(45) $$r_n^n \equiv p^n\,q^n\,R^n \quad \text{mod. } n^{2n-2},$$

also nach ($30^c$):

(46) $$p\,q\,R \equiv 1 \quad \text{mod. } n,$$

woraus hervorgeht, daß $R$ nicht durch $n$ teilbar sein kann. Setzen wir demnach:

(47) $$R^{n-1} = 1 + n\,\varrho,$$

wodurch die Zahl $\varrho$ definiert sei, so wird nach (31):

(48) $$p^{n-1}\,q^{n-1}\,R^{n-1} \equiv 1 + n\,(\pi + \varkappa + \varrho) \quad \text{mod. } n^2,$$

und folglich wegen (46):

(49) $$p\,q\,R \equiv 1 - n(\pi + \varkappa + \varrho) \quad \text{mod. } n^2,$$

und durch Potenzieren:

($49^a$) $$p^n\,q^n\,R^n \equiv 1 - n^2(\pi + \varkappa + \varrho) \quad \text{mod. } n^3.$$

Nach ($30^b$) ist ferner:

($49^b$) $$x^{n-1} \equiv y^{n-1} \equiv r_n^n \quad \text{mod. } n^{2n-1},$$

also infolge von (45) und (49):

(50) $$x^{n-1} \equiv y^{n-1} \equiv 1 - n^2(\pi + \varkappa + \varrho) \quad \text{mod. } n^3;$$

und der Vergleich mit (43) läßt jetzt die Kongruenzen (44) in folgender Weise schreiben:

$$\pi + \varkappa + \varrho \equiv -\varkappa + p\,R\,r' \equiv -\pi - q\,R\,r' \quad \text{mod. } n,$$

und hieraus erhalten wir:

(51) $$\begin{aligned} 2\pi + \varkappa + \varrho &\equiv -q\,R\,r' \quad \text{mod. } n, \\ \pi + 2\varkappa + \varrho &\equiv p\,R\,r' \quad\ \ ,\quad n. \end{aligned}$$

Von den hier zuletzt abgeleiteten Relationen, d. h. den Kongruenzen (48) bis (51), werden wir keinen Gebrauch weiter machen; man würde indessen auf sie

rekurrieren müssen, wenn man das Produkt $p q R$ nicht, wie es nunmehr zunächst geschehen soll, auf das Produkt $p^\nu q^\nu$ reduziert.

Unsere Relation (28) erlaubt noch weitere Schlüsse; gemäß den Gleichungen I) können wir $x$ durch $z + q^n$ und $y$ durch $p^n - z$ ersetzen; dann ist:

$$(51^b) \quad \begin{aligned} x^\nu y^\nu &= (z + q^n)^\nu (p^n - z)^\nu = [p^n q^n + z(p^n - q^n) - z^2]^\nu \\ &\equiv p^{n\nu} q^{n\nu} \mod. n^4, \end{aligned}$$

denn $p^n - q^n$ ist nach (42) durch $n^2$ teilbar und $z$ enthält ebenfalls den Faktor $n^2$. Wir erhalten somit aus (28) bzw. (30):

$$(52) \qquad p^{n\nu} q^{n\nu} \equiv r_n^n \mod. n^4,$$

also auch:

$$(52^a) \qquad p^\nu q^\nu \equiv r_n \mod. n^3,$$

und nach (39):

$$(53) \qquad p^\nu q^\nu \equiv p q R \mod. n^3;$$

folglich gemäß (42):

$$(53^a) \qquad p^n - q^n \equiv 2 n^2 p q r' R \equiv 2 n^2 p^\nu q^\nu r' \mod. n^5.$$

Ersetzen wir andererseits in der allgemeinen Identität (12) die Zahlen $x$ und $y$ bzw. durch $p$ und $q$, so wird:

$$(53^b) \quad \begin{aligned} & n p^\nu q^\nu (p - q) \\ &= p^n - q^n - (p - q)^n - \sum_{s=2}^{\nu} N_s p^{s-1} q^{s-1} (p - q)^{n-2s+2}, \end{aligned}$$

folglich:

$$(53^c) \qquad p^n - q^n \equiv n p^\nu q^\nu (p - q) \mod. n^4,$$

und durch Vergleichung mit (53ᵃ):

$$(54) \qquad p - q \equiv 2 n r' \mod. n^3.$$

Mit Hilfe dieser Kongruenz können wir zunächst ein früheres Resultat bestätigen; es ergibt sich nämlich aus (42), daß man setzen darf:

$$(54^a) \qquad p - q = 2 p q r' R n + \delta n^2,$$

wo $\delta$ eine Zahl bezeichnet, die sich durch Potenzieren, d. h. durch Zurückgehen auf (42) leicht bestimmen läßt; es wird nämlich:

$$p^n - q^n \equiv 2n^2 pqr' R q^{n-1} + 4n^3 \nu (pqr' R)^2 q^{n-2} + \delta n^3 q^{n-1} \mod. n^4$$

$$\equiv 2n^2 pqr' R + n^3 [2\varkappa r' - 2r'^2 q^{n-2} + \delta] \quad \mod. n^4,$$

wobei benutzt ist, daß $pqR$ nach (47) im Faktor von $n^3$ durch 1 ersetzt werden darf. Durch Vergleichung mit (42) folgt dann:

$$(54^b) \qquad \delta \equiv 2r'^2 q^{n-2} - 2\varkappa r' \quad \mod. n.$$

Mittels (49) erhalten wir daher aus (54ª):

$$(54^c) \quad p - q \equiv 2r'n + 2n^2 r' [r' q^{n-2} - \varkappa - (\pi + \varkappa + \varrho)] \mod. n^3.$$

Hier muß nach (54) die eckige Klammer durch $n$ teilbar sein; d. h. wir haben:

$$\pi + 2\varkappa + \varrho \equiv r' q^{n-2} \quad \mod. n.$$

Multiplizieren wir beiderseits mit $q$, so kommen wir wegen der Relation (46) auf die Kongruenz (51) zurück, wodurch letztere von neuem bewiesen wird.

Aus den drei Kongruenzen, von denen die dritte eine Folge der Relationen (46) und (30ᶜ) ist:

$$p^{2\nu} \equiv 1, \quad q^{2\nu} \equiv 1, \quad p^\nu q^\nu \equiv 1 \quad \mod. n,$$

folgt, daß man:

$$(55) \qquad p^\nu \equiv q^\nu \equiv \varepsilon \quad \mod. n$$

setzen darf, wenn $\varepsilon$ eine Zahl bezeichnet, die entweder durch $+1$ oder durch $-1$ in Bezug auf den Modul $n$ ersetzt werden darf. Sei also:

$$(55^a) \qquad p^\nu = \varepsilon + n\pi', \quad q^\nu = \varepsilon + n\varkappa',$$

so folgt durch Quadrieren:

$$(56) \qquad \pi = 2\varepsilon\pi' + n\pi'^2, \quad \varkappa = 2\varepsilon\varkappa' + n\varkappa'^2.$$

Zunächst soll die Kongruenz (44) für das Quadrat des Moduls $n$ ergänzt werden. Es ist nach (53ª), (54) und (55ª):

$$(57) \quad \begin{aligned} p^n - q^n &= p - q + n(p\pi - q\varkappa) \\ &\equiv 2n^2 r' p^\nu q^\nu \equiv 2n^2 r' [1 + \varepsilon(\pi' + \varkappa')n + n^2 \pi' \varkappa'] \\ &\qquad \text{mod. } n^5. \end{aligned}$$

Die linke Seite ist nach (54) in Bezug auf den Modul $n^3$:

$$\equiv 2nr' + n\pi(q + 2nr') - nq\varkappa$$
$$\equiv 2nr' + nq(\pi - \varkappa) + 2n^2 r' \pi.$$

Wir erhalten also:

$$(57^a) \qquad q(\pi - \varkappa) \equiv -2r' + 2nr'(1 - \pi) \quad \text{mod. } n^2$$

und ebenso, indem man $p$ und $q$ vertauscht:

$$(57^b) \qquad p(\pi - \varkappa) \equiv -2r' + 2nr'(1 - \varkappa) \quad \text{mod. } n^2.$$

Die eine dieser Kongruenzen geht aus der anderen durch Anwendung der Relation (54) hervor.

Auch die Kongruenz (54) können wir für die nächst höhere Potenz des Moduls erweitern. Setzen wir:

$$(58) \qquad p - q = 2nr' + r'\vartheta n^3,$$

so läßt sich $\vartheta$ durch folgende Überlegung bis auf Vielfache von $n$ bestimmen. Nach (58) ist:

$$(58^a) \quad \begin{aligned} p^n - q^n \equiv\ & 2n^2 r' q^{n-1} + r'\vartheta n^4 q^{n-1} + 4n^3 \nu r'^2 q^{n-2} \\ & + 8n^3 \binom{n}{3} r'^3 q^{n-3} \quad \text{mod. } n^5. \end{aligned}$$

Der Vergleich mit (57) ergibt dann:

$$\begin{aligned} 2\varkappa + n\vartheta + 4\nu r' q^{n-2} + 8\binom{n}{3} r'^2 q^{n-3} \\ \equiv 2\varepsilon(\pi' + \varkappa') + 2n\pi'\varkappa' \quad \text{mod. } n^2, \end{aligned}$$

oder, wenn wir $2\nu$ durch $n-1$ und $\varkappa$ gemäß (56) durch $2\varepsilon\varkappa' + n\varkappa'^2$ ersetzen:

$$(58^b) \quad \begin{aligned} 2\varepsilon(\varkappa' - \pi') \equiv 2r' q^{n-2} - n\Big[\vartheta + 2\varkappa'^2 + 2r' q^{n-2} \\ + 8\binom{n}{3}\frac{1}{n} r'^2 q^{n-3} - 2\pi'\varkappa'\Big] \quad \text{mod. } n^2. \end{aligned}$$

Rechts und links addieren wir die Zahl $n(\varkappa'^2 - \pi'^2)$, multiplizieren mit $q$ und ersetzen im ersten Gliede rechts $q^{n-1}$ durch $1 + n\varkappa$; dann wird:

$$(\varkappa - \pi) q \equiv 2r' - n\left[\vartheta q + 2r'(1-\varkappa) + (\varkappa' - \pi')^2 q + 8\binom{n}{3}\frac{1}{n} r'^2 q^{n-2}\right] \text{ mod. } n^2.$$

Auf der rechten Seite ist gemäß (57ᵃ):

$$-2r'\varkappa \equiv -2r'\pi - 4r'^2 q^{n-2} \quad \text{mod. } n,$$

ferner nach (58ᵇ):

$$(\varkappa' - \pi')^2 \equiv r'^2 q^{2n-4} \equiv r'^2 q^{n-3} \quad \text{mod. } n.$$

Ferner ist:

$$8\binom{n}{3}\frac{1}{n} - 3 = 4\,\frac{(n-1)(n-2)}{3} - 3 \equiv -\frac{1}{n}\binom{n}{3} \quad \text{mod. } n.$$

Es ergibt sich somit:

$$(58^c) \qquad (\pi - \varkappa) q \equiv -2r' + n\left[\vartheta q + 2r'(1-\pi) - \frac{1}{n}\binom{n}{3} r'^2 q^{n-2}\right] \quad \text{mod. } n^2.$$

Diese Kongruenz muß mit (57ᵃ) übereinstimmen; es folgt also:

$$(59) \qquad \vartheta \equiv \frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3} r'^2 q^{n-3} \quad \text{mod. } n,$$

so daß die vervollständigte Kongruenz (54) lautet:

$$(59^a) \quad p - q \equiv 2nr' + n^3\,\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3} r'^3 q^{n-3} \quad \text{mod. } n^4.$$

Die vorstehende Betrachtung erleidet eine Ausnahme im Falle $n = 3$; dann nämlich lautet die Kongruenz (58ᶜ), da die Zahl $\binom{n}{3}$ dann gleich 1, also nicht durch $n$ teilbar ist:

$$(\pi - \varkappa) q \equiv -2r' - r'^2 q^{n-2} \quad \text{mod. } 3,$$

und die Vergleichung mit ($57^a$) oder (44) führt zu dem Resultate: $r' \equiv 0$ mod. 3.

Das entsprechende Resultat läßt sich für jede Primzahl $n$ gewinnen. Wenden wir die Kongruenz (59) auf die Kongruenz ($58^a$) an, so ergibt sich:

$$p^n - q^n = p - q + n(p\pi - q\varkappa)$$
$$\equiv 2n^2 r' q^{n-1} + 4n^3 r r'^2 q^{n-2} + 9n^3 \binom{n}{3} r'^3 q^{n-3} \quad \text{mod. } n^5$$

und die linke Seite ist nach ($59^a$):

$$\equiv 2nr' + n^2 \binom{n}{3} r'^3 q^{n-3} + nq(\pi - \varkappa) + 2n^2 \pi r' \quad \text{mod. } n^4.$$

Wir erhalten also:

$$(60) \quad \begin{aligned} (\pi - \varkappa) q \equiv & -2r' + 2nr'(1 - \pi) \\ & + n^2 r' \left[ 2\varkappa + 2(n-1) r' q^{n-2} - \frac{1}{n} \binom{n}{3} r'^2 q^{n-3} \right] \quad \text{mod. } n^3, \end{aligned}$$

womit die Kongruenz ($57^a$) für den Modul $n^3$ vervollständigt ist. Setzt man dann weiter:

$$(60^a) \qquad p - q = 2nr' + n^3 r' \vartheta + n^4 \vartheta_1,$$

so läßt sich in analoger Weise $\vartheta_1$ bestimmen, indem man durch Potenzieren den Ausdruck $p^n - q^n$ bildet und das Resultat mit demjenigen vergleicht, wie es sich ergeben würde, wenn man den Wert von $p - q$ in die Identität ($53^b$) einsetzt. Man erhält so einen zu ($58^c$) analogen Ausdruck für $\pi - \varkappa$, der mit dem Ausdrucke (60) übereinstimmen muß, woraus sich dann eine Berechnung von $\vartheta_1$ (bis auf Vielfache von $n$) ergibt. Offenbar kann man mit einem solchen Pendelverfahren fortfahren, und so die Kongruenzen (60) und ($60^a$) für immer höhere Potenzen des Moduls ergänzen.

Zur Durchführung dieser Schlußreihen ist es notwendig, die in (57) benutzte Kongruenz (53) zuvor für höhere Potenzen des Moduls sukzessive zu erweitern. Das kann auf folgende Weise geschehen. Infolge der Annahme (3) ist, wenn wir die Werte von $x$, $y$, $z$ aus (41) einsetzen:

$$(p^n - n^2 p q R r')^n - (q^n + n^2 p q R r')^n \equiv 0 \quad \text{mod. } n^{2n},$$

also:

$$p^{n^2} - q^{n^2} \equiv n^3 p q r' R (p^{n(n-1)} + q^{n(n-1)})$$
$$- n^5 \nu p^2 q^2 r'^2 R^2 (p^{n(n-2)} - q^{n(n-2)}) \quad \text{mod. } n^7.$$

Die zweite Klammer der rechten Seite ist durch $n^2$, das betreffende Glied also durch $n^7$ teilbar; es wird somit einfach:

$$p^{n^2} - q^{n^2} \equiv n^3 p q R r' [2 + n^2 (\pi + \varkappa) + n^3 \nu (\pi^2 + \varkappa^2)] \quad \text{mod. } n^7,$$

oder, wenn wir entsprechend (53), den Wert:

$$(60^b) \qquad p q R = p^\nu q^\nu (1 + n^3 \eta)$$

einführen, wo $\eta$ eine zu bestimmende Zahl bezeichnet:

$$p^{n^2} - q^{n^2} \equiv 2 n^3 p^\nu q^\nu r' + n^5 p^\nu q^\nu (\pi + \varkappa) r' + 2 n^6 r' p^\nu q^\nu \eta$$
$$+ n^3 \nu (\pi^2 + \varkappa^2) \quad \text{mod. } n^7.$$

So erhalten wir eine Kongruenz, durch welche die ganze Zahl $\eta$ definiert und mittels der Zahlen $p, q, \pi, \varkappa$ ausgedrückt ist; die wirkliche Berechnung von $\eta$ kann aber einfacher in folgender Weise geschehen. Aus ($51^b$) erhalten wir, da gemäß ($52^a$):

$$(60^c) \qquad z = n^2 r' r_n \equiv n^2 r' p^\nu q^\nu \quad \text{mod. } n^5$$

gesetzt werden darf, unter Benutzung von ($53^a$):

$$(60^d) \qquad x^\nu y^\nu \equiv [p^n q^n + n^4 r'^2 p^{2\nu} q^{2\nu}]^\nu \quad \text{mod. } n^7,$$

also nach (30):

$$r_n^n \equiv p^{n\nu} q^{n\nu} + n^4 \nu r'^2 p^{2\nu + n(\nu-1)} q^{2\nu + n(\nu-1)} \quad \text{mod. } n^7,$$

und zufolge (39) lautet sonach die vervollständigte Kongruenz (53):

$$p q R \equiv r_n \equiv p^\nu q^\nu + n^3 \nu r'^2 p^{\nu-1} q^{\nu-1} \quad \text{mod. } n^6.$$

Die Vergleichung mit ($60^b$) ergibt demnach:

$$\eta \equiv \nu r'^2 p^{\nu-1} q^{\nu-1} \quad \text{mod. } n,$$

so daß die vervollständigte Kongruenz (53) jetzt lautet:

$$(60^e) \qquad p q R \equiv p^\nu q^\nu [1 + n^3 \nu r'^2 p^{\nu-1} q^{\nu-1}] \quad \text{mod. } n^4.$$

Mit Hilfe dieses Resultates ist man in der Lage, die Kongruenz (57) für den Modul $n^6$ aufzustellen; sie lautet:

$$(60^{\mathrm{f}})\quad \begin{aligned} p^n - q^n &\equiv 2\,n^2\,r'\,p\,q\,R \mod. n^{2n-1} \\ &\equiv 2\,n^2\,r'\,p^\nu\,q^\nu + 2\,n^5\,\nu\,r'^3\,p^{2\nu-1}\,q^{2\nu-1} \mod. n^6. \end{aligned}$$

Um $\vartheta_1$ zu bestimmen, hat man also diesen Ausdruck ($60^{\mathrm{f}}$) mit demjenigen zu vergleichen, der sich aus ($60^{\mathrm{a}}$) durch Potenzieren ergibt; das führt zu einer Relation für $\pi - \varkappa$ für den Modul $n^3$, die mit (60) übereinstimmen muß, woraus dann $\vartheta_1$ gefunden wird; und mit Hilfe dieses Wertes gelingt es weiter, mittels der Kongruenz ($60^{\mathrm{b}}$) und durch eine zu ($60^{\mathrm{d}}$) analoge Relation, die Kongruenz ($60^{\mathrm{e}}$) auf den Modul $n^5$ und dadurch die Kongruenz ($60^{\mathrm{f}}$) auf den Modul $n^7$ zu erweitern; u. s. f.

Nehmen wir an, es sei gefunden:

$$(61)\quad p - q = r'\,(2\,n + n^3\,\vartheta + n^4\,\vartheta_1 + \ldots + n^s\,\vartheta_{s-3}),$$

wo nun alle Zahlen $\vartheta_i$ bis auf $\vartheta_{s-3}$ bekannt sind: es handle sich also um die Bestimmung von $\vartheta_{s-3}$; dann wird, wenn wir die rechte Seite dieser Gleichung mit $\Theta_s$ bezeichnen und wenn:

$$(61^{\mathrm{a}})\qquad \Theta_i = r'\,(2\,n + n^3\,\vartheta + \ldots + n^i\,\vartheta_{i-3})$$

gesetzt wird:

$$(61^{\mathrm{b}})\quad \begin{aligned} p^n - q^n \equiv{} & n\,\Theta_s\,q^{n-1} \\ & + \binom{n}{2}\,\Theta_{s-1}^2\,q^{n-2} + \ldots + \binom{n}{s-2}\,\Theta_3^{s-2}\,q^{n-s+2} \\ & + \binom{n}{s-1}\,(2\,n\,r')^{s-1}\,q^{n-s+1} + \binom{n}{s}\,(2\,n\,r')^s\,q^{n-s} \\ & \mod. n^{s+2}. \end{aligned}$$

Ferner setzen wir voraus, man habe gefunden:

$$(61^{\mathrm{c}})\quad (\pi - \varkappa)\,q \equiv -2\,r' + Q_1\,n + Q_2\,n^2 + \ldots + Q_{s-2}\,n^{s-2} \mod. n^{s-1}.$$

Endlich habe man gefunden, und zwar durch sukzessive Erweiterung der Kongruenzen (53) und ($60^{\mathrm{e}}$):

$$(61^{\mathrm{d}})\quad p\,q\,R \equiv p^\nu\,q^\nu\,(1 + n^3\,\eta + n^4\,\eta_1 + \ldots + n^{s-1}\,\eta_{s-4}) \mod. n^s,$$

also nach (42):

$$(61^e)\quad p^n - q^n \equiv 2\,n^2 r'[1 + \varepsilon(\pi' + \varkappa')\,n + n^2 \pi' \varkappa']\,(1 + n^3 \eta + \ldots + n^{s-1} \eta_{s-4}) \quad \text{mod. } n^{s+2}.$$

Subtrahiert man nun die Kongruenzen $(61^b)$ und $(61^e)$ voneinander, so muß wieder die obige Kongruenz $(61^c)$ entstehen, nachdem beiderseits mit $n^3 r'$ dividiert und mit $q$ multipliziert wurde. Der Faktor von $n^{s-2}$ in der so gebildeten neuen Kongruenz enthält die unbekannte Zahl $\vartheta_{s-3}$, und diese ist dadurch bestimmt. Diese Zahl $\vartheta_{s-3}$ kommt nämlich auf der rechten Seite von $(61^b)$ nur im ersten Gliede. nämlich in $\Theta_s$, vor und ist hier in $r' n^{s+1} q^{n-1}$ multipliziert; bei Bildung der genannten Differenz erscheint $\vartheta_{s-3}$ also auch nur im Faktor der höchsten Potenz von $n$, d. h. (da mit $n^3$ dividiert wurde) im Faktor von $n^{s-2}$; die Zahlen $\eta_i$ in $(61^e)$ enthalten die Unbekannte $\vartheta_{s-3}$ nicht. Die so gefundene neue Form der Kongruenz $(61^c)$ lautet also:

$$(62)\quad \begin{aligned}(\pi - \varkappa)\,q \equiv -2\,r' + Q_1 n + Q_2 n^2 + \ldots + Q_{s-3} n^{s-3} \\ + (P + \vartheta_{s-3}\, q)\, n^{s-2} \quad \text{mod. } n^{s-1},\end{aligned}$$

wo sich die Zahl $P$ aus den bekannten Zahlen $\vartheta_i$ und $\eta_i$ zusammensetzt, und zwar kommen in $P$ alle diejenigen Zahlen aus der rechten Seite von $(61^b)$ vor, welche dort in $n^{s+1}$ multipliziert sind. Zu ihnen gehört auch das Glied:

$$\binom{n}{s}(2\,n\,r')^s\, q^{n-s},$$

aber nur dann, wenn die Zahl $s < n$ ist; setzen wir also:

$$n\,P = n\,P' + \binom{n}{s}(2\,r')^s\, q^{n-s},$$

so wird nach (62):

$$\begin{aligned}(\pi - \varkappa)\,q \equiv -2\,r' + Q_1 n + Q_2 n^2 + \ldots + Q_{s-3} n^{s-3} \\ + \left[P' + \frac{1}{n}\binom{n}{s}(2\,r')^s q^{n-s} + \vartheta_{s-3}\, q\right] n^{s-2} \quad \text{mod.}\, n^{s-1},\end{aligned}$$

wo nun die Zahlen $Q_1, \ldots Q_{s-3}$ durch die vorhergehenden (d. h. die als durchgeführt vorausgesetzten) Rechnungen schon völlig bestimmt sind. Wählt man aber $s = n$, so erhält man:

$$(\pi - \varkappa)\, q \equiv -2r' + Q_1 n + \ldots + [Q_{n-3} + (2r')^n]\, n^{n-3} + (P' + \vartheta_{n-3}\, q)\, n^{n-2} \mod. n^{n-1}.$$

Der schon durch die Betrachtung für $s = n - 1$ völlig (d. h. bis auf Vielfache) von $n$ festgelegte Wert von $Q_{n-3}$ müßte also eine nachträgliche Korrektur erfahren, was nicht möglich ist: wir müssen somit schließen, daß die Zahl $r'$ den Faktor $n$ enthalte, daß also die Kongruenz:

(62^a) $$r' \equiv 0 \mod. n$$

erfüllt sei. Die bisher gemachte Annahme, es sei die Zahl $r'$ nicht durch $n$ teilbar, erweist sich somit als nicht haltbar; die aus der Kongruenz (62^a) weiter zu ziehenden Konsequenzen werden wir im nächsten Paragraphen verfolgen.

## § 6. Der Fall I), wenn $r'$ durch $n$ teilbar ist.

Das Resultat (62^a) ergibt nun zufolge der Kongruenz (44) unmittelbar:

(62^b) $$\pi - \varkappa \equiv 0 \mod. n,$$

also auch nach (56):

(62^c) $$\pi' - \varkappa' \equiv 0 \mod. n$$

und weiter nach (55^a):

$$p^\nu \equiv q^\nu \equiv \varepsilon \mod. n^2.$$

Dann aber folgt aus (52^a) und (53):

$$r_n \equiv p^{2\nu} \equiv p\, q\, R \mod. n^2$$

und folglich erhalten wir aus (49):

$$\pi \equiv -(\pi + \varkappa + \varrho) \mod. n,$$

wie sich jetzt auch aus (51) ergeben würde. Um nun ein Rekursionsverfahren durchführen zu können, ersetzen wir die Kongruenzen (62^a), (62^c), (62^b) durch die folgenden Relationen:

(63) $$r' = r_1 n^\lambda, \quad p^\nu \equiv q^\nu \equiv \varepsilon \mod. n^{\lambda+1}, \quad p^{n-1} - q^{n-1} = \mu\, n^{\lambda+1};$$

wir wollen zeigen, daß dann entsprechende Relationen auch gültig sein müssen, wenn man $\lambda$ durch $\lambda + 1$ ersetzt.

Wir befolgen dabei genau die im Falle $\lambda = 0$ angewandte Schlußweise und werden, um die Analogie deutlich hervortreten zu lassen, die gleichen Nummern für die einzelnen Gleichungen und Kongruenzen verwenden, indem wir nur einen Stern hinzufügen.

Setzen wir in die Relation (29ª) für $r'$ den Wert $n^\lambda r_1$ ein, so ergibt sich:

(30)* $$x^\nu y^\nu \equiv r_n^n \quad \text{mod. } n^{(2\lambda+4)n-2};$$

nun ist jetzt:

(30ª)* $$x - y = n^{2n-1} r'^n = n^{(\lambda+2)n-1} r_1^n,$$

also:

$$x^\nu - y^\nu \equiv n^{(\lambda+2)n-1} \cdot r_1^n \cdot \nu \cdot y^{\nu-1} \quad \text{mod. } n^{(2\lambda+4)n-2};$$

und nach (30)*:

(30ᵇ)* $$\left.\begin{aligned} y^{n-1} &\equiv r_n^n - \nu\, n^{(\lambda+2)n-1} \cdot r_1^n \cdot y^{2\nu-1} \\ x^{n-1} &\equiv r_n^n + \nu\, n^{(\lambda+2)n-1} \cdot r_1^n \cdot x^{2\nu-1} \end{aligned}\right\} \quad \text{mod. } n^{(2\lambda+4)-2}.$$

Infolge der Ansätze (63) ist das Produkt $p^\nu q^\nu$ in Bezug auf den Modul $n^{\lambda+1}$ mit 1 äquivalent; aus den Gleichungen:

$$x = q^n + z = q^n + n^{(\lambda+2)n} r_1^n r_n^n$$
$$y = p^n - z = p^n - n^{(\lambda+2)n} r_1^n r_n^n$$

ergibt sich also:

$$x^\nu y^\nu \equiv p^{n\nu} q^{n\nu} \equiv 1 \quad \text{mod. } n^{\lambda+2},$$

und somit aus (30):

(30ᶜ)* $$r_n \equiv 1 \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}.$$

Weiterhin folgten in § 5 zunächst Überlegungen, bei denen nicht Kongruenzen, sondern Gleichungen benutzt wurden, die also hier sich unverändert wiederholen lassen. Wir finden so die folgenden Resultate:

(39)* $$r_n = p\,q\,R + n^{(\lambda+2)(n-1)-1} r_1^{n-1}$$

und:

$$
\begin{aligned}
x &= p^n - n^{\lambda+2} p\, q\, r_1\, R, \\
y &= q^n + n^{\lambda+2} p\, q\, r_1\, R, \\
z &= n^{(\lambda+2)n-1} r_1^n + n^{\lambda+2} p\, q\, r_1\, R;
\end{aligned} \tag{41)*}
$$

aus jeder dieser Relationen folgt jetzt:

$$p^n - q^n = 2\, n^{\lambda+2} p\, q\, r_1\, R + n^{(\lambda+2)n-1} r_1^n. \tag{42)*}$$

Die Gleichungen (43) werden jetzt:

$$
\left.\begin{aligned}
x^{n-1} &\equiv p^{n(n-1)} + n^{\lambda+2} q\, R\, r' \\
y^{n-1} &\equiv q^{n(n-1)} - n^{\lambda+2} p\, R\, r'
\end{aligned}\right\} \mod n^{\lambda+3} \tag{43)*}
$$

und durch Subtraktion erhalten wir gemäß (63):

$$p^{n(n-1)} - q^{n(n-1)} = n^{\lambda+2} \mu \equiv 2\, q\, R\, r'\, n^{\lambda+2} \mod n^{\lambda+3}, \tag{44)*}$$

oder:

$$\mu \equiv 2\, q\, R\, r' \equiv 2\, p\, R\, r' \mod n, \tag{44^a)*}$$

Aus (39)* erhalten wir:

$$r_n \equiv p\, q\, R \mod n^{(\lambda+2)n-3}, \tag{45)*}$$

also nach (30^c)*:

$$p\, q\, R \equiv 1 \mod n^{\lambda+1}. \tag{46)*}$$

Es gilt die Gleichung bzw. Kongruenz:

$$
\begin{aligned}
x^\nu y^\nu &= (z + q^n)^\nu (p^n - z)^\nu = [p^n q^n + z (p^n - q^n) - z^2]^\nu \\
&\equiv p^{n\nu} q^{n\nu} \mod n^{2\lambda+4},
\end{aligned} \tag{51^b)*}
$$

denn die Zahlen $z$ und $p^n - q^n$ sind hier je durch $n^{\lambda+2}$ teilbar. Aus (30)* ergibt sich somit:

$$r_n \equiv p^\nu q^\nu \mod n^{2\lambda+3} \tag{52^a)*}$$

und nach (39)* bzw. (45)*

$$p^\nu q^\nu \equiv p\, q\, R \mod n^{2\lambda+3}, \tag{53)*}$$

folglich gemäß (42)*:

$$p^n - q^n \equiv 2\, n^{\lambda+2} p^\nu q^\nu r_1 \mod n^{3\lambda+5}. \tag{53^a)*}$$

Die Gleichung (53^b) gilt unverändert, und aus ihr folgt jetzt, da $p - q$ durch $n^{\lambda+1}$ teilbar ist:

(53^c)* $$p^n - q^n \equiv n\, p^\nu q^\nu (p - q) \quad \text{mod. } n^{3\lambda+4},$$

also durch Vergleichung mit (53^a)*:

(54)* $$p - q \equiv 2\, n^{\lambda+1} r_1 \quad \text{mod. } n^{3\lambda+3}.$$

Nach (30^c)* und (52^a)* haben wir die schon benutzte Relation:

(54^a)* $$p^\nu q^\nu \equiv 1 \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}.$$

Nun ist nach (54)* die Differenz $p - q$, also auch die Differenz $p^\nu - q^\nu$ durch $n^{\lambda+1}$ teilbar; es folgt deshalb aus (54^a)*:

$$p^{n-1} \equiv q^{n-1} \equiv 1 \quad \text{mod. } n^{\lambda+1},$$

d. h. es ist zu setzen:

$$\pi = n^\lambda \pi_1, \quad \varkappa = n^\lambda \varkappa_1,$$

und aus den Relationen:

$$p^{2\nu} \equiv q^{2\nu} \equiv p^\nu q^\nu \equiv 1 \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}$$

folgt dann weiter:

(55^a)* $$p^\nu = \varepsilon + n^{\lambda+1} \pi_1', \quad q^\nu = \varepsilon + n^{\lambda+1} \varkappa_1'$$

also:

(56)* $$\pi_1 = 2\,\varepsilon\, \pi_1' + n^{\lambda+1} \pi_1'^2, \quad \varkappa_1 = 2\,\varepsilon\, \varkappa_1' + n^{\lambda+1} \varkappa_1'^2.$$

An Stelle von (57) erhalten wir daher:

(57)* $$\begin{aligned} &p - q + n^{\lambda+1} (p\, \pi_1 - q\, \varkappa_1) \\ &\equiv 2\, n^{\lambda+2} r_1 \left[1 + \varepsilon\, n^{\lambda+1} (\pi_1' + \varkappa_1') + n^{2\lambda+2} \pi_1' \varkappa_1'\right] \\ &\qquad \text{mod. } n^{3\lambda+5}. \end{aligned}$$

Nach (54)* ist die linke Seite (mod. $n^{3\lambda+3}$):

$$\equiv 2\, n^{\lambda+1} r_1 + n^{\lambda+1} \pi_1 (q + 2\, n^{\lambda+1} r_1) - n^{\lambda+1} q\, \varkappa_1,$$

so daß wir erhalten:

(57^a)* $$q (\pi_1 - \varkappa_1) \equiv -2 r_1 + 2 n r_1 - 2 n^{\lambda+1} r_1 \pi_1 \quad \text{mod. } n^{2\lambda+2}.$$

Jetzt sind wir in der Lage, die Kongruenz (54)* für den nächst höheren Modul zu erweitern; wir setzen:

(58)* $$p - q = 2\, n^{\lambda+1} r_1 + r_1 \vartheta_1 n^{3\lambda+3},$$

wo nun $\vartheta_1$ zu bestimmen ist. Zunächst ergibt sich:

$$p^n - q^n \equiv 2\, n^{\lambda+2}\, r_1\, q^{n-1} + 4\, n^{2\lambda+3}\, \nu\, r_1^2\, q^{n-2}$$

$$(58^a)^* \qquad + 8\, n^{3\lambda+3} \binom{n}{3} r_1^3\, q^{n-3} + r_1\, \vartheta_1\, n^{3\lambda+4}\, q^{n-1} \quad \text{mod. } n^{4\lambda+5}.$$

Durch Vergleichung mit (57)* erhalten wir also (nach Division mit $r_1\, n^{2\lambda+3}$):

$$2\varkappa_1 + n^{\lambda+1}\vartheta_1 + 4\nu r_1 q^{n-2} + 8\binom{n}{3} r_1 n^{\lambda} q^{n-3}$$

$$\equiv 2\varepsilon(\pi_1' + \varkappa_1') + 2\, n^{\lambda+1}\pi_1'\varkappa_1' \quad \text{mod. } n^{2\lambda+2},$$

oder nach (56)*:

$$2\varepsilon(\varkappa_1' - \pi_1') \equiv 2\, r_1\, q^{n-2} - 2\, n\, r_1\, q^{n-2}$$

$$(58^b)^* - n^{\lambda+1}\left[\vartheta_1 + 2\varkappa_1'^2 + 2\, r_1\, q^{n-2} + 8\binom{n}{3}\frac{1}{n} r_1^2 q^{n-2} - 2\pi_1'\varkappa_1'\right] \quad \text{mod. } n^{2\lambda+2}$$

und, wenn wir links $\pi_1$ und $\varkappa_1$ einführen und mit $q$ multiplizieren:

$$(\varkappa_1 - \pi_1)\, q \equiv 2\, r_1 - 2\, n\, r_1\, q^{n-1}$$

$$(58^c)^* \; - n^{\lambda+1}\left[\vartheta_1 q + 2\, r_1\varkappa_1 + (\varkappa_1' - \pi_1')^2 q + 8\binom{n}{3}\frac{1}{n} r_1^2 q^{n-2}\right] \quad \text{mod. } n^{2\lambda+2},$$

oder endlich, wenn wir in der eckigen Klammer die Relation $(58^b)^*$ zur Umformung benutzen, und im zweiten Gliede der rechten Seite $q^{n-1}$ durch $1 + n^{\lambda+1}\varkappa_1$ ersetzen:

$$(\pi_1 - \varkappa_1)\, q \equiv -2\, r_1 + 2\, n\, r_1$$

$$(58^d)^* \quad + n^{\lambda+1}\left[\vartheta_1 q + 2\, r_1\varkappa_1 + r_1^2 q^{n-2} + 8\binom{n}{3}\frac{1}{n} r_1^2 q^{n-2}\right] \quad \text{mod. } n^{\lambda+2}.$$

Indem man die rechte Seite mit der rechten Seite von $(57^a)^*$ vergleicht, ergibt sich die Bestimmung von $\vartheta_1$. Eine Ausnahme tritt im Falle $n = 3$ ein, da man dann das Glied mit dem Faktor $\binom{n}{3}$ nicht in die eckige Klammer bringen kann; dann lautet vielmehr die letzte Kongruenz:

$$(\pi_1 - \varkappa_1)\,q \equiv -2\,r_1 + 2\cdot 3\,r_1 + 8\cdot 3^\lambda r_1^2 q$$
$$+ 3^{\lambda+1}[\vartheta_1 q + 2\,r_1\varkappa_1 + r_1^2 q] \quad \text{mod. } 3^{\lambda+2},$$

und jetzt folgt durch Vergleichung mit ($57^a$):

$$r_1 \equiv 0 \quad \text{mod. } 3.$$

Von hier ab kann die Reihe von Schlüssen unseres Rekursionsverfahrens in ganz gleicher Weise wie oben durchgeführt werden; man setze:

$$(60^a)^* \qquad p - q = 2\,n^{\lambda+1} r_1 + r_1\vartheta_1 n^{3\lambda+3} + r_1\vartheta_1' n^{3\lambda+4}$$

und verfahre in ganz entsprechender Weise, so wird man die Zahl $\vartheta_1'$ bis auf Vielfache von $n$ bestimmen können. Es ist dabei nur nötig, auch die Kongruenz (53)* für immer höhere Moduln zu erweitern. Zu dem Zwecke gehen wir wieder von der Gleichung $x^n = y^n + z^n$ aus; das Einsetzen der Werte (41)* gibt eine Relation, die zur Definition von $\eta_1$ dienen kann, wenn wir gemäß (53)* setzen:

$$(60^b)^* \qquad p\,q\,R = p^\nu q^\nu (1 + n^{2\lambda+3}\eta_1).$$

Einfacher geschieht die Bestimmung von $\eta_1$ wieder auf folgende Weise. Auf Grund der Kongruenz ($52^a$)* haben wir:

$$(60^c)^* \qquad z = n^{\lambda+2} r_1 r_n \equiv n^{\lambda+2} r_1 p^\nu q^\nu \quad \text{mod. } n^{3\lambda+5},$$

also nach ($51^b$)* und ($53^a$)*:

$$(60^d)^* \qquad \begin{aligned} x^\nu y^\nu &\equiv [p^n q^n + n^{2\lambda+4} r_1^2 p^{2\nu} q^{2\nu}]^\nu \quad \text{mod. } n^{4\lambda+7} \\ &\equiv p^{n\nu} q^{n\nu} + n^{2\lambda+4}\cdot\nu\cdot r_1^2 (p\,q)^{2\nu+n(\nu-1)} \quad \text{mod. } n^{4\lambda+7}, \end{aligned}$$

also nach (30)*:

$$r_n^n \equiv p^{n\nu} q^{n\nu} + n^{2\lambda+4}\cdot\nu\cdot r_1^2 p^{n\nu-1} q^{n\nu-1} \quad \text{mod. } n^{4\lambda+7}$$

und somit:

$$r_n \equiv p^\nu q^\nu + n^{2\lambda+3}\cdot\nu\cdot r_1^2 p^{\nu-1} q^{\nu-1} \quad \text{mod. } n^{4\lambda+6},$$

folglich nach (39)* und ($54^a$)*:

$$(60^e)^* \qquad \begin{aligned} p\,q\,R &\equiv p^\nu q^\nu + n^{2\lambda+3}\cdot\nu\cdot r_1^2 p^{\nu-1} q^{\nu-1} \quad \text{mod. } n^{4\lambda+6} \\ &\equiv p^\nu q^\nu + n^{2\lambda+3}\cdot\nu\cdot r_1^2 p^{2\nu-1} q^{2\nu-1} \quad \text{mod. } n^{3\lambda+4}, \end{aligned}$$

wodurch $\eta_1$ bestimmt ist:

$$\eta_1 \equiv \nu r_1^2 p^{\nu-1} q^{\nu-1} \mod. n^{\lambda+1},$$

und die Kongruenz (53[a])* kann nun auch für einen höheren Modul aufgestellt werden; sie lautet dann:

$$(60^f)^* \quad p^n - q^n \equiv 2 n^{\lambda+2} r_1 p^\nu q^\nu + 2 n^{3\lambda+5} \nu r_1^3 p^{2\nu-1} q^{2\nu-1} \mod. n^{4\lambda+6}.$$

Durch ein Pendelverfahren, analog demjenigen, das am Schlusse von § 5 eingehend geschildert wurde, wird man so die Kongruenzen für die Werte von $p - q$, von $\pi - \varkappa$ und von $p^n - q^n$ auf immer höhere Potenzen des Moduls $n$ erweitern können. Ist man bei der Kongruenz für $p - q$, d. h. in (58)*, bis zum Modul $n^{n\lambda+n+1}$ gelangt, so daß der Koeffizient von $n^{n\lambda+n}$ bestimmt werden soll, so tritt in der entsprechenden Kongruenz (58[a])* rechts das Glied:

$$2^n n^{n\lambda+n} \binom{n}{n} r_1^n$$

auf, das einen Faktor $n$ weniger enthält, als man nach dem Verlauf der Rechnungen bis zu diesem Modul erwarten durfte, indem der Binomialkoeffizient $\binom{n}{s}$ für $s < n$ durch $n$ teilbar ist, für $s = n$ aber nicht. Hierdurch ist es dann wieder bedingt, daß sich bei Aufstellung der Kongruenz für $\pi_1 - \varkappa_1$, d. h. der zu (58[c])* analogen Kongruenz, für den Modul:

$$n^{(n+1)\lambda+n+2-(2\lambda+3)} = n^{(n-1)\lambda+n-1}$$

ein Glied ergibt, welches die schon vollständig definierten Glieder der entsprechenden niedrigeren Kongruenz noch beeinflussen würde, welches also noch einen Faktor $n$ mehr enthalten muß; und dies kann nur erreicht werden, wenn der andere Faktor dieses Gliedes, der sich aus einer Potenz von $r_1$ und einer Potenz von $q$ zusammensetzt, den Faktor $n$ enthält. Wir kommen so, da $q$ nicht durch $n$ teilbar sein kann, zu dem Schlusse (vgl. auch unten § 12):

$$r_1 \equiv 0 \mod. n.$$

Aus (44)* folgt dann, daß $\pi_1 - \varkappa_1$ durch $n^{\lambda+1}$, und aus (55ᵃ)*, daß $p^\nu - q^\nu$ durch $n^{\lambda+1}$ teilbar sein muß, d. h. daß die Relationen (63) für die Zahl $\lambda + 1$ bestehen, wenn sie für die Zahl $\lambda$ gelten.

Wenn man also annimmt, es sei $r'$ durch $n^\lambda$ teilbar, so folgt, daß $r'$ auch durch $n^{\lambda+1}$ teilbar ist. Die Zahl $r'$ ist somit durch jede beliebige Potenz von $n$ teilbar, d. h. wir haben:

$$r' = 0.$$

Dann aber geben die Gleichungen (41) bzw. (41)*:

$$x = p^n, \quad y = q^n, \quad z = 0$$

und aus (42) folgt: $\quad p^n = q^n$.

Wenn also die drei Zahlen $x, y, z$ der Gleichung:

$$x^n = y^n + z^n$$

genügen, so kann $z$ (und ebenso $y$) nicht durch $n$ teilbar sein, es sei denn, daß die betreffende Zahl gleich Null ist, wo sich dann die genannte Gleichung auf eine Identität reduziert.

## § 7. Der Fall II).

Der Fall II) läßt sich in genau der gleichen Weise erledigen. Aus den Identitäten (13) und (17ᵃ) erhalten wir bzw.:

$$(64)\qquad \begin{aligned} n\,x^\nu y^\nu &= r_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i\, x^{i-1}\, y^{i-1}\, r^{n(n-2i+1)}, \\ n\,x^\nu z^\nu &= q_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i\, x^{i-1}\, z^{i-1}\, q^{n(n-2i+1)}, \end{aligned}$$

und schließen aus ihnen, wie in (21), (23) und (24) die Kongruenzen:

$$\begin{aligned} q_n &\equiv r_n \equiv 1 && \text{mod. } n, \\ y &= q \cdot q_n \equiv q && \text{mod. } n, \\ z &= r \cdot r_n \equiv r && \text{mod. } n, \\ y + z &= q\,q_n + r\,r_n \equiv q + r && \text{mod. } n, \\ &= p^n \cdot n^{n-1} \equiv 0 && \text{mod. } n, \end{aligned}$$

also auch, entsprechend zu (25):

$$q^n + r^n \equiv 0 \quad \text{mod. } n^2,$$

ferner aus II$^a$):

$$2x = q^n + r^n + p^n n^{n-1} \equiv 0 \quad \text{mod. } n^2.$$

Die Identität (13$^b$) gibt nach Division mit $n$:

$$(64^a) \quad \begin{aligned} (-1)^\nu y^\nu z^\nu &= p_n^n - p^{n(n-1)} n^{n(n-2)} \\ &+ \sum_{i=2}^{\nu} (-1)^i N_i x^{i-1} y^{i-1} p^{n(n-2i+1)} n^{n^2-2in+2i-2}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, wie oben entsprechend aus (28), daß $p$ durch $n$ teilbar sein muß, während $p_n$ den Faktor $n$ nicht enthalten kann. Wir setzen demnach:

$$x = n \cdot p p_n = n^2 p' p_n.$$

An Stelle von (29) haben wir hier die Gleichungen:

$$(65) \quad \begin{aligned} q^{n-1} &= 1 + n\varkappa, & r^{n-1} &= 1 + n\varrho, \\ q^n &= 1 + n\varkappa', & r^n &= 1 + n\varrho', \end{aligned}$$

und an Stelle von (30):

$$(66) \quad \begin{aligned} x - y &= r^n = n^2 p' p_n - q q_n, \\ x - z &= q^n = n^2 p' p_n - r r_n, \end{aligned}$$

also infolge von (35):

$$r^n = r + n r \varrho = n^2 p' p_n - q - n q \varkappa',$$

$$q^n = q + n q \varkappa = n^2 p' p_n - r - n r \varrho',$$

somit:

$$(67) \quad q + r - n^2 p' p_n = -n(r\varrho + q\varkappa') = -n(r\varrho' + q\varkappa).$$

An Stelle von (32) erhalten wir also:

$$(68) \quad q(\varkappa' - \varkappa) = r(\varrho' - \varrho),$$

und an Stelle von (33):

$$(69) \quad \begin{aligned} Nq &= \varrho' - \varrho, \\ Nr &= \varkappa' - \varkappa, \end{aligned}$$

wo $N$ eine ganze Zahl bezeichnet. Die Berechnung der Summe $y + z$ gibt hier:

$$n^{2n-1}p'^n = q q_n + r r_n = q + r + n(q\varkappa' + r\varrho');$$

analog zu (33) erhalten wir hieraus:

$$N(p_n - n^{2n-3}p'^{n-1})p' \cdot n = -(\varrho - \varrho')(\varkappa - \varkappa'),$$

und daran lassen sich dieselben Schlüsse anknüpfen, wie oben an die entsprechende Gleichung, so daß wir zu dem Ansatze:

$$(70) \quad \begin{aligned} q^{n-1} &= 1 + n\varkappa, & r^{n-1} &= 1 + n\varrho, \\ q_n &= 1 + n\varkappa + n^2\varkappa_1, & r_n &= 1 + n\varrho + n^2\varrho_1 \end{aligned}$$

berechtigt sind. Die Bildung der Ausdrücke $x - y$ und $x - z$ ergibt jetzt:

$$(71) \quad \begin{aligned} r^n &= r + n r \varrho = p_n p' n^2 - q - n q \varkappa - n^2 q \varkappa_1 \\ q^n &= q + n q \varkappa = p_n p' n^2 - r - n r \varrho - n^2 r \varrho_1, \end{aligned}$$

also:

$$(72) \quad q + r + n(r\varrho + q\varkappa) - p_n p' \cdot n^2 = -n^2 q \varkappa_1 = -n^2 r \varrho_1.$$

Die Summe $y + z = n^{2n-1}p'^n$ gibt hier:

$$n^{2n-1}p'^n = q q_n + r r_n = q + r + n(q\varkappa + r\varrho) + n^2(q\varkappa_1 + r\varrho_1);$$

wir erhalten demnach:

$$(73) \quad \begin{aligned} q + r &= -n(q\varkappa + r\varrho) - n^2(q\varkappa_1 + r\varrho_1) + n^{2n-1}p'^n \\ &= -n(q\varkappa + r\varrho) - n^2 q \varkappa_1 + n^2 p_n p', \end{aligned}$$

und folglich, unter Benutzung von (72):

$$(74) \quad q\varkappa_1 = r\varrho_1 = -p_n p' + n^{2n-3}p'^n,$$

wodurch wir zu den Gleichungen ($P$ bezeichnet eine ganze Zahl):

$$(75) \quad \varkappa_1 = Prp', \quad \varrho_1 = Pqp', \quad p_n - n^{2n-3}p'^{n-1} = -Pqr$$

geführt werden, aus denen sich sofort die folgenden ergeben:

$$(76) \quad \begin{aligned} 2x &= n^{2n-1}p'^n + q^n + r^n = 2n^{2n-1}p'^n - 2n^2 qrp' P, \\ 2y &= n^{2n-1}p'^n + q^n - r^n = 2q^n + 2n^2 qrp' P, \\ 2z &= n^{2n-1}p'^n - q^n + r^n = 2r^n + 2n^2 qrp' P, \end{aligned}$$

und es ist klar, daß man aus diesen Gleichungen dieselben Schlüsse ziehen kann, wie oben aus den Gleichungen (42), so daß man zu der Annahme $p' = 0$ als der einzig möglichen

geführt wird; bei der Durchführung des Beweises würde es sich nur darum handeln, in den Betrachtungen von § 5 und § 6 einige Buchstaben zu vertauschen und Vorzeichen zu ändern; wir können deshalb diese Wiederholung ersparen. Es folgt so, da $y$ und $z$ positiv vorausgesetzt wurden, auch $q = 0$, $r = 0$. Der Fall II) kann daher, wenn $x, y, z$ positiv vorausgesetzt werden, nicht vorkommen.

## § 8. Hilfsformeln zur Erledigung des Falles III).

Die Erledigung der durch die Gleichungen III) bis III$^a$) in § 3 gegebenen Möglichkeiten werden wir in § 10 auf den folgenden Satz zurückführen, bzw. auf die zu diesem Satze führenden Formeln:

Sind $p, q, r$ drei nicht durch $n$ teilbare ganze Zahlen, und besteht zwischen ihnen und einer ungeraden Primzahl $n (= 2\nu + 1)$ die Relation:

$$p^n - q^n - r^n \equiv 0 \mod. n^2 \tag{77}$$

(d. h. läßt sich von drei Wurzeln der Kongruenz $X^{n-1} \equiv 1$ mod. $n^2$ eine als Summe der beiden anderen darstellen), so bestehen die Kongruenzen:

$$q^\nu \equiv r^\nu \equiv (-1)^\nu p^\nu \mod. n, \tag{77^a}$$

ausgenommen die Fälle, wo $q \equiv r$ oder $p \equiv -r$ oder $p \equiv -q$ ist.

Entsprechend der Kongruenz (77) setzen wir:[1])

$$p^n - q^n - r^n \equiv 2\,a\,n^2 \mod. n^3, \tag{78}$$

wo $a$ eine ganze Zahl bezeichne, die zunächst nicht durch $n$ teilbar sei. Ersetzen wir nun in der fundamentalen Identität (12) die willkürlichen Zahlen $x, y$ bzw. durch $p^n, q^n$, so wird:

---

[1]) Daß auf der rechten Seite von (78) eine gerade Zahl $2\,a$ eingeführt wurde, ist keine Spezialisierung, da jede ungerade Zahl durch Hinzufügen von Vielfachen von $n$ zu einer geraden gemacht werden kann und sich dadurch die rechte Seite von (78) nur um Vielfache von $n^3$ ändern würde.

$$(79)\quad p^{n^2} - q^{n^2} - (p^n - q^n)^n = \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i\, p^{n(i-1)}\, q^{n(i-1)}\, (p^n - q^n)^{n-2i+2},$$

und dies ist eine identische Gleichung. Die linke Seite ist nach dem erweiterten Fermatschen Satze mit $p^n - q^n - (p^n - q^n)^n$ in Bezug auf den Modul $n^2$ äquivalent, also nach (78) mit $p^n - q^n - r^n$ und somit durch $n^2$ teilbar; die rechte Seite enthält den Faktor $n$, da nach § 2 alle Zahlen $N_i$ durch $n$ teilbar sind. Setzen wir also:

$$(80)\qquad n\, T = \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i\, p^{n(i-1)}\, q^{n(i-1)}\, r^{n(n-2i+1)},$$

so ist $T$ eine ganze Zahl, und es wird die rechte Seite von (79) gleich $n\, r^n\, T$, und es folgt:

$$0 \equiv n \cdot r^n \cdot T \quad \text{mod. } n^2,$$

also:

$$(81)\qquad T \equiv 0 \quad \text{mod. } n.$$

Durch Differentiation der Identität (79) nach $p^n$ entsteht die Relation:

$$(82)\qquad \begin{aligned} & n\,[p^{n(n-1)} - (p^n - q^n)^{n-1}] \\ &= \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i\,(n - 2i + 2)\, p^{n(i-1)}\, q^{n(i-1)}\, (p^n - q^n)^{n-2i+1} \\ &+ \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i\,(i-1)\, p^{n(i-2)}\, q^{n(i-1)}\, (p^n - q^n)^{n-2i+2}, \end{aligned}$$

welche ebenfalls identisch erfüllt ist. Setzen wir also:[1])

$$(83)\qquad n\, T_1 = \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i\,(i-1)\, p^{n(i-2)}\, q^{n(i-2)}\, r^{n(n-2i+1)},$$

wo dann $T_1$ eine ganze Zahl bedeutet, so wird in Rücksicht auf (77):

$$(83^{\text{a}})\quad n\,(p^{n(n-1)} - r^{n(n-1)}) \equiv n^2\, T + n\,(q^n r^n - 2\, p^n q^n)\, T_1 \quad \text{mod. } n^3.$$

---

[1]) Die hier eingeführten Zahlen $T$ und $T_1$ werden später zum Unterschiede von anderen analogen Zahlen mit $T_r$ und $T_{1r}$ bezeichnet werden.

Die linke Seite ist wegen der Kongruenzen:

$$p^{n(n-1)} \equiv q^{n(n-1)} \equiv 1 \quad \text{mod. } n^2$$

durch $n^3$ teilbar, $T$ nach (81) durch $n$; es wird also:

$$(84) \qquad (r^n - 2\,p^n)\,T_1 \equiv 0 \quad \text{mod. } n^2,$$

denn der Faktor $q^n$ kann der Voraussetzung nach nicht durch $n$ teilbar sein. Es ist also $T_1$ durch $n^2$ teilbar, ausgenommen den Fall, wo die Zahl $r^n - 2\,p^n\,[\equiv -(p^n + q^n)]$ durch $n$ teilbar ist.

Zu weiteren Resultaten gelangen wir, indem wir auf der linken und rechten Seite von (82) auch die dritte Potenz von $n$ berücksichtigen. Wir führen drei Zahlen $\pi$, $\varkappa$, $\varrho$ ein, die durch die folgenden Gleichungen definiert seien:

$$(85) \quad p^{n-1} = 1 + n\,\pi, \quad q^{n-1} = 1 + n\,\varkappa, \quad r^{n-1} = 1 + n\,\varrho.$$

Dann wird auf der linken Seite von (82):

$$\begin{aligned} & n\,[p^{n(n-1)} - (p^n - q^n)^{n-1}] \\ (86) \qquad & \equiv n\,(p^{n(n-1)} - r^{n(n-1)} + 2\,a\,n^2\,r^{n(n-2)}) \quad \text{mod. } n^4 \\ & \equiv n^3\,(\pi - \varrho + 2\,a\,r^{n-2}) \qquad \text{mod. } n^4. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite von (82) ist:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i\,(n - 2\,i + 2)\,p^{n(i-1)}\,q^{n(i-1)}\,(p^n - q^n)^{n-2i+1} \\ (87) \qquad & \equiv \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i\,(n - 2\,i + 2)\,p^{n(i-1)}\,q^{n(i-1)}\,[r^{n(n-2i+1)} \\ & \qquad + 2\,a\,n^2\,(n - 2\,i + 1)\,r^{n(n-2i)}] \\ & \equiv n^2\,T - 2\,n\,p^n\,q^n\,T_1 + 2\,a\,n^3\,p^n\,q^n\,T_2 \quad \text{mod. } n^4, \end{aligned}$$

wenn $T$ wieder durch (80) und die ganze Zahl $T_2$ durch die Gleichung:

$$(88) \quad n\,T_2 = \sum_{i=2}^{\nu} N_i\,(2\,i - 1)(2\,i - 2)\,p^{n(i-2)}\,q^{n(i-2)}\,r^{n(n-2i)}$$

definiert wird (denn das für $i = \nu + 1$ entstehende letzte Glied hat den Faktor $n - 2\,i + 1$, d. h. den Faktor Null). Die andere Summe auf der rechten Seite von (82) ist nach (78):

$$\sum_{i=2}^{\nu+1} N_i (i-1) p^{n(i-2)} q^{n(i-1)} (p^n - q^n)^{n-2i+2}$$

$$\equiv \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i (i-1) p^{n(i-2)} q^{n(i-1)} [r^{n(n-2i+2)}$$

$$+ 2\,a\,n^2 (n-2\,i+2)\,r^{n(n-2i+1)}]$$

$$\equiv q^n r^n \cdot n\,T_1 - 4\,a\,n^3\,T_3\,q^n \quad \text{mod. } n^4,$$

wenn:

$$n\,T_3 = \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i (i-1)^2 p^{n(i-2)} q^{n(i-2)} r^{n(n-2i+1)}$$

gesetzt wird. Wegen der Relation:

$$(2\,i-1)(2\,i-2) = 4\,(i-1)^2 + 2\,(i-1)$$

ist aber (da $N_{\nu+1} = n$ war):

$$\text{(88}^{\text{a}}\text{)} \qquad n\,T_2\,r^n = 4\,n\,T_3 + 2\,n\,T_1 - 2\,n^2\,\nu\,p^{n(\nu-1)} q^{n(\nu-1)}.$$

Es wird demnach:

$$\text{(89)} \qquad \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i (i-1) p^{n(i-2)} q^{n(i-1)} (p^n - q^n)^{n-2i+2}$$

$$\equiv n\,q^n r^n T_1 + 2\,a\,n^3 q^n\,T_1 - a\,n^3 q^n r^n\,T_2 \quad \text{mod. } n^4.$$

Setzen wir die Werte (86), (87) und (89) in (82) ein, so ergibt sich:

$$\text{(90)} \qquad (\pi - \varrho + 2\,a\,r^{n(n-2)})\,n^2 \equiv n\,T + q^n (r^n - 2\,p^n)(T_1 - a\,n^2\,T_2) + 2\,a\,n^2 q^n\,T_1 \quad \text{mod. } n^3,$$

wobei zu beachten ist, daß nach (81) die Zahl $T$ durch $n$, und nach (84) das Produkt:

$$(r^n - 2\,p^n)(T_1 - a\,n^2\,T_2)$$

durch $n^2$ teilbar ist.

Ähnliche Gleichungen und Kongruenzen erhält man, indem man die Identität (79) nach $q^n$ differenziert und analoge Entwicklungen anstellt. Wenn man aber die so entstehenden Relationen benutzen will, so ergeben sich keine brauchbaren

Resultate, wenn man nicht zuvor noch eine weitere Potenz von $n$ bei der Entwicklung berücksichtigt.

Zur Vereinfachung der Rechnungen ersetzen wir im folgenden die Kongruenz (78) durch die Gleichung:

$$p^n - q^n - r^n = 2\,a\,n^2. \tag{91}$$

In Rücksicht auf die späteren Untersuchungen, bei denen die Zahl $a$ als durch eine Potenz von $n$ teilbar angenommen wird, empfiehlt es sich, statt der Zahlen $\pi$, $\varrho$ die Zahlen $p$, $r$ beizubehalten. Die Kongruenz (90) lautet dann (da $T_1$ durch $n^2$ teilbar ist und da $r^n - 2\,p^n \equiv -(q^n + r^n)$ mod. $n^2$ ist):

$$\begin{aligned} &p^{n(n-1)} - r^{n(n-1)} + 2\,a\,n^2\,r^{n(n-2)} \\ &\equiv n\,T - q^n(q^n + p^n)(T_1 - a\,n^2\,T_2) \quad \text{mod. } n^3.\ ^{1)} \end{aligned} \tag{92}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß $q^n + p^n$ nicht durch $n$ teilbar sei, denn nur dann ist nach (84) die Zahl $T_1$ notwendig durch $n^2$ teilbar. Es soll demnach im folgenden zunächst angenommen werden, daß keine der drei Zahlen $p^n + q^n$, $p^n + r^n$, $q^n - r^n$ durch $n$ teilbar sei.

Differenzieren wir die Identität (79) nach $q^n$, so wird, analog zu (82):

$$\begin{aligned} &n\left[(p^n - q^n)^{n-1} - q^{n(n-1)}\right] \\ &= -\sum_{i=2}^{\nu+1} N_i\,(n - 2\,i + 2)\,p^{n(i-1)}\,q^{n(i-1)}\,(p^n - q^n)^{n-2i+1} \\ &\quad + \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i\,(i-1)\,p^{n(i-1)}\,q^{n(i-2)}\,(p^n - q^n)^{n-2i+2}, \end{aligned} \tag{93}$$

Die eckige Klammer der linken Seite ist hier:

$$\equiv \left[r^{n(n-1)} - q^{n(n-1)} - 2\,a\,n^2\,r^{n(n-2)}\right] \quad \text{mod. } n^3$$

und auf der rechten Seite die erste Summe wieder durch (87) gegeben, die zweite Summe unterscheidet sich von der Summe (89) nur um einen Faktor; sie ist also:

---

[1]) Hätten wir in (91) den Faktor von $n^2$ als ungerade Zahl angenommen, so hätten wir hier rechts und links mit 2 multiplizieren müssen; etwas wesentliches würde dadurch nicht geändert werden.

$$\equiv n p^n r^n T_1 + 2 a n^3 p^n T_1 - a n^3 p^n r^n T_2 \quad \text{mod. } n^4,$$

so daß wir erhalten:

$$\begin{aligned} & r^{n(n-1)} - q^{n(n-1)} - 2 a n^2 r^{n(n-2)} \\ (94) \quad & \equiv - n T + p^n (r^n + 2 q^n)(T_1 - a n^2 T_2) \\ & \equiv - n T + p^n (p^n + q^n)(T_1 - a n^2 T_2) \quad \text{mod. } n^3. \end{aligned}$$

In allen unseren Rechnungen kommen die Zahlen $q$ und $r$ symmetrisch vor; in vorstehenden Formeln darf daher auch überall $q$ mit $r$ vertauscht werden. Bezeichnen wir demnach mit $T_q$, $T_{1q}$, $T_{2q}$ die Zahlen, welche aus $T$, $T_1$, $T_2$ durch diese Vertauschung entstehen, d. h. setzen wir:

$$(95) \quad n T_q = \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i p^{n(i-1)} r^{n(i-1)} q^{n(n-2i+1)},$$

$$(96) \quad n T_{1q} = \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i (i-1) p^{n(i-2)} r^{n(i-2)} q^{n(n-2i+1)},$$

$$(97) \quad n T_{2q} = \sum_{i=2}^{\nu} N_i (2i-1)(2i-2) p^{n(i-2)} r^{n(i-2)} q^{n(n-2i)},$$

und bezeichnen dementsprechend die früher eingeführten Zahlen $T$, $T_1$, $T_2$ jetzt bzw. mit $T_r$, $T_{1r}$, $T_{2r}$, so bestehen auch die folgenden beiden Kongruenzen:

$$(98) \quad \begin{aligned} & p^{n(n-1)} - q^{n(n-1)} + 2 a n^2 q^{n(n-2)} \\ & \equiv n T_q - r^n (r^n + p^n)(T_{1q} - a n^2 T_{2q}) \quad \text{mod. } n^3 \end{aligned}$$

und:

$$(99) \quad \begin{aligned} & q^{n(n-1)} - r^{n(n-1)} - 2 a n^2 q^{n(n-2)} \\ & \equiv - n T_q + p^n (p^n + r^n)(T_{1q} - a n^2 T_{2q}) \quad \text{mod. } n^3. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die Kongruenz (92) mit $p^n$, die Kongruenz (93) mit $q^n$ und bilden die Summe, so wird:

$$\begin{aligned} & p^{n^2} - q^{n^2} - r^{n^2} - r^{n(n-1)}(p^n - q^n) + 2 a n^2 r^{n(n-2)}(p^n - q^n) \\ & \equiv n T_r (p^n - q^n) \quad \text{mod. } n^3, \end{aligned}$$

oder:

$$(100) \quad p^{n^2} - q^{n^2} - r^{n^2} \equiv n T_r r^n \quad \text{mod. } n^3.$$

Dasselbe Resultat erhält man auch leicht direkt aus (79); wie es nach dem Eulerschen Theoreme über homogene Funktionen sein muß. Durch Anwendung der Gleichung (91) auf die Identität (79) und Entwicklung nach Potenzen von $n$ erhalten wir genauer:

$$p^{n2} - q^{n2} - r^{n2} - 2\,a\,n^3\,r^{n(n-1)}$$
$$\equiv \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i\, p^{n(i-1)}\, q^{n(i-1)} (r^n + 2\,a\,n^2)^{n-2i+2} \quad \text{mod. } n^5.$$

oder:

$$(100^a) \qquad \begin{aligned} p^{n2} - q^{n2} - r^{n2} &\equiv 2\,a\,n^3 + n\,r^n\,T_r - 4\,a\,n^3 p^n q^n\,T_{1r} \\ &\equiv 2\,a\,n^3 + n\,r^n\,T_r \quad \text{mod. } n^5. \end{aligned}$$

Ebenso ist:

$$(101) \qquad p^{n2} - q^{n2} - r^{n2} \equiv 2\,a\,n^3 + n\,q^n\,T_q \quad \text{mod. } n^5,$$

und folglich:

$$(101^a) \qquad r^n\,T_r \equiv q^n\,T_q \quad \text{mod. } n^4.$$

Dieselben Rechnungen lassen sich auch durchführen, indem man von der zwischen $q^n$ und $r^n$, analog zu (79), bestehenden Identität ausgeht; dieselbe lautet:

$$(102) \quad q^{n2} + r^{n2} - (q^n + r^n)^n = \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i (-1)^{i-1}\, q^{n(i-1)}\, r^{n(i-1)} (q^n + r^n)^{n-2i+2}.$$

Setzt man also, analog zu (80):

$$(102^a) \qquad n\,T_p = \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i\,(-1)^{i-1}\, q^{n(i-1)}\, r^{n(i-1)}\, p^{n(n-2i+1)},$$

so folgt wieder:

$$(102^b) \qquad T_p \equiv 0 \quad \text{mod. } n.$$

Die Differentiation der Identität (102) nach $q^n$ ergibt:

$$(103) \qquad \begin{aligned} & n\,[q^{n(n-1)} - (q^n + r^n)^{n-1}] \\ &= \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i (-1)^{i-1} (n - 2\,i + 2)\, q^{n(i-1)}\, r^{n(i-1)} (q^n + r^n)^{n-2i+1} \\ &+ \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i (-1)^{i-1} (i-1)\, q^{n(i-2)}\, r^{n(i-1)} (q^n + r^n)^{n-2i+2} \\ &\equiv n^2\,T_p + n\,r^n\,(p^n - 2\,q^n)\,T_{1p} \quad \text{mod. } n^3, \end{aligned}$$

wenn:

$$(104)\quad n\,T_{1p} = \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i (-1)^{i-1} (i-1)\, q^{n(i-2)}\, r^{n(i-2)}\, p^{n(n-2i+1)}$$

gesetzt wird; und aus (102) folgt, analog zu (84):

$$(105)\qquad (p^n - 2\,q^n)\, T_{1p} \equiv 0 \quad \text{mod. } n^2.$$

Berücksichtigen wir auch die dritte Potenz von $n$, so ist die linke Seite von (103):

$$(106)\quad \equiv n\,[q^{n(n-1)} - p^{n(n-1)} - 2\,a\,n^2\,p^{n(n-2)}] \quad \text{mod. } n^4.$$

Auf der rechten Seite (103) ist die erste Summe:

$$(107)\quad \equiv n^2\,T_p - 2\,n\,q^n\,r^n\,T_{1p} - 2\,a\,n^3\,q^n\,r^n\,T_{2p} \quad \text{mod. } n^4,$$

wenn, analog zu (88):

$$(108)\quad n\,T_{2p} = \sum_{i=2}^{\nu} N_i (-1)^{i-1} (2i-1)(2i-2)\, q^{n(i-2)}\, r^{n(i-2)}\, p^{n(n-2i)}.$$

Die zweite Summe auf der rechten Seite von (103) ist:

$$(109)\qquad \equiv n\,p^n\,r^n\,T_{1p} + 4\,a\,n^3\,T_{3p}\,r^n \quad \text{mod. } n^5,$$

wo:

$$n\,T_{3p} = \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i (i-1)^2 (-1)^{i-1}\, q^{n(i-2)}\, r^{n(i-2)}\, p^{n(n-2i+1)}.$$

Diese Zahl läßt sich auf $T_{2p}$ mittels der zu (88^a) analogen Relation:

$$n\,T_{2p}\,p^n = 4\,n\,T_{3p} + 2\,n\,T_{1p} - 2\,n^2\,\nu(-1)^\nu\, q^{n(\nu-1)}\, r^{n(\nu-1)}$$

zurückführen; folglich wird der Ausdruck (109):

$$(110)\quad \equiv n\,p^n\,r^n\,T_{1p} - 2\,a\,n^3\,r^n\,T_{1p} + a\,n^3\,p^n\,r^n\,T_{2p} \quad \text{mod. } n^4.$$

Durch Einsetzen der Werte (106), (107) und (110) in die Identität (103) findet man (da $T_{1p}$ durch $n^2$ teilbar ist):

$$(111)\quad \begin{aligned} &q^{n(n-1)} - p^{n(n-1)} - 2\,a\,n^2\,p^{n(n-2)} \\ &\equiv n\,T_p - r^n (q^n - r^n)(T_{1p} + a\,n^2\,T_{2p}) \quad \text{mod. } n^4. \end{aligned}$$

Durch Vertauschung von $q$ mit $r$ ergibt sich ebenso:

$$(112)\quad \begin{aligned} &r^{n(n-1)} - p^{n(n-1)} - 2\,a\,n^2\,p^{n(n-2)} \\ &\equiv n\,T_p + q^n (q^n - r^n)(T_{1p} + a\,n^2\,T_{2p}) \quad \text{mod. } n^4. \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Gleichung (91) auf die Identität (102), erhalten wir ferner die zu ($100^a$) analoge Kongruenz:

(113) $$p^{n^2} - q^{n^2} - r^{n^2} \equiv 2\,a\,n^3 - n\,T_p\,p^n \quad \text{mod. } n^5.$$

Die Kongruenz ($101^a$) können wir demnach in der folgenden Form erweitern; es ist:

(114) $$-\,p^n\,T_p \equiv q^n\,T_q \equiv r^n\,T_r \quad \text{mod. } n^4.$$

Die hier aufgestellten Kongruenzen sind sämtlich eine Folge der Gleichung (91), unter der Voraussetzung, daß keine der Zahlen $p^n + q^n$, $p^n + r^n$, $q^n - r^n$ durch $n$ teilbar sei.

Um die Übersicht zu erleichtern, wollen wir noch folgende Bezeichnungen einführen: es sei:

($114^a$) $$\begin{aligned} (q^n - r^n)(T_{1p} + a\,n^2\,T_{2p}) &= n^2\,S_p, \\ (r^n + p^n)(T_{1q} - a\,n^2\,T_{2q}) &= n^2\,S_q, \\ (q^n + p^n)(T_{1r} - a\,n^2\,T_{2r}) &= n^2\,S_r. \end{aligned}$$

Die Kongruenzen (92), (94), (98), (99), (111), (112) lauten dann (mod. $n^3$):

(115) $$p^{n(n-1)} - r^{n(n-1)} + 2\,a\,n^2\,r^{n(n-2)} \equiv \quad n\,T_r - n^2\,q^n\,S_r,$$

($115^a$) $$r^{n(n-1)} - q^{n(n-1)} - 2\,a\,n^2\,r^{n(n-2)} \equiv -\,n\,T_r + n^2\,p^n\,S_r,$$

($115^b$) $$p^{n(n-1)} - q^{n(n-1)} + 2\,a\,n^2\,q^{n(n-2)} \equiv \quad n\,T_q - n^2\,r^n\,S_q,$$

($115^c$) $$q^{n(n-1)} - r^{n(n-1)} - 2\,a\,n^2\,q^{n(n-2)} \equiv -\,n\,T_q + n^2\,p^n\,S_q,$$

($115^d$) $$q^{n(n-1)} - p^{n(n-1)} - 2\,a\,n^2\,p^{n(n-2)} \equiv \quad n\,T_p - n^2\,r^n\,S_p,$$

($115^e$) $$r^{n(n-1)} - p^{n(n-1)} - 2\,a\,n^2\,p^{n(n-2)} \equiv \quad n\,T_p + n^2\,q^n\,S_p.$$

Multiplizieren wir nun (115) mit $r^n$, ($115^b$) mit $q^n$ und bilden die Summe, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} p^{n(n-1)}(q^n + r^n) - r^{n^2} - q^{n^2} + 2\,a\,n^2(r^{n(n-1)} + q^{n(n-1)}) \\ \equiv n(r^n\,T_r + q^n\,T_q) - n^2\,q^n\,r^n\,(S_r + S_q) \quad \text{mod. } n^3, \end{aligned}$$

oder, da $q^n + r^n = p^n - 2\,a\,n^2$ ist:

(116) $$\begin{aligned} p^{n^2} - q^{n^2} - r^{n^2} + 2\,a\,n^2 \equiv n\,(r^n\,T_r + q^n\,T_q) \\ -\,n^2\,q^n\,r\,(S_r + S_q) \quad \text{mod. } n^3. \end{aligned}$$

Analog erhält man aus ($115^a$) und ($115^d$), indem man bzw. mit $r^n$ und $p^n$ multipliziert und die Summe bildet:

$$r^{n2} - p^{n2} - q^{n(n-1)}(r^n - p^n) - 2an^2(r^{n(n-1)} + p^{n(n-1)})$$
$$\equiv n(p^n T_p - r^n T_r) + n^2 p^n r^n (S_r - S_p) \quad \text{mod. } n^3,$$

oder:

$$(117) \qquad p^{n2} - q^{n2} - r^{n2} + 2an^2 \equiv n(r^n T_r - p^n T_p) - n^2 p^n r^n (S_r - S_p) \quad \text{mod. } n^3,$$

endlich analog durch Vertauschung von $q$ mit $r$, wobei $S_p$ sein Zeichen wechselt, oder direkt aus ($115^c$) und ($115^e$):

$$(118) \qquad p^{n2} - q^{n2} - r^{n2} + 2an^2 \equiv n(q^n T_q - p^n T_p) - n^2 p^n q^n (S_q + S_p) \quad \text{mod. } n^3.$$

In Rücksicht auf (113) lassen sich diese letzten Kongruenzen in folgender Form schreiben:

$$(119) \qquad \begin{aligned} p^{n2} - q^{n2} - r^{n2} + 2an^2 - 2nr^n T_r &\equiv 2an^2 - nr^n T_r \\ \equiv n^2(S_p - S_r)p^n r^n &\equiv -n^2(S_p + S_q)q^n p^n \\ &\equiv -n^2 q^n r^n (S_q + S_r) \quad \text{mod. } n^3, \end{aligned}$$

und hieraus leitet man die folgende Relation ab:

$$(120) \qquad S_p p^n \equiv S_r r^n - S_q q^n \quad \text{mod. } n.$$

Multiplizieren wir jetzt die Kongruenz (115) mit $r^n$, ($115^e$) mit $p^n$ und bilden die Summe, so wird unter Benutzung von (114):

$$(120^a) \qquad \begin{aligned} & nr^n T_r - n^2 q^n r^n S_r + n^2 p^n q^n S_p + np^n T_p \\ & \equiv n^2 q^n (S_p p^n - S_r r^n) \equiv (r^n - p^n)(p^{n(n-1)} - r^{n(n-1)}) \\ & \qquad \text{mod. } n^3, \end{aligned}$$

also nach (120) und (91), oder direkt aus ($115^b$) und ($115^c$):

$$(121) \qquad p^{n(n-1)} - r^{n(n-1)} \equiv n^2 S_q q^n \quad \text{mod. } n^3;$$

ebenso ist:

$$(121^a) \qquad p^{n(n-1)} - q^{n(n-1)} \equiv n^2 S_r r^n \quad \text{mod. } n^3,$$

und, indem man ($115^a$) mit $r^n$, ($115^c$) mit $q^n$ multipliziert, ergibt sich durch Subtraktion:

$$(121^b) \qquad q^{n(n-1)} - r^{n(n-1)} \equiv -n^2 S_p p^n \quad \text{mod. } n^3.$$

Vermöge dieser drei Relationen werden die Kongruenzen (115) . . . (115[e]) auf die Relationen (119) und (120) reduziert.

Die von uns aufgestellten Gleichungen und Kongruenzen sind sämtlich Folge des Bestehens der Gleichung (91) bzw. der Kongruenz (78). Für die Anwendung, welche wir im Auge haben, ist es wichtig, die Kongruenz (77) mit der Kongruenz:

$$(122) \qquad p^{n^2} - q^{n^2} - r^{n^2} \equiv 0 \quad \text{mod. } n^3$$

in Verbindung zu bringen. Es fragt sich, ob beide Kongruenzen gleichzeitig bestehen können.

Infolge von (122) sind nach (100[a]), bzw. (101) oder (113) jetzt die Zahlen $T_r$, $T_q$ und $T_p$ durch $n^2$ teilbar. Wir setzen:

$$(123) \qquad p^{n^2} - q^{n^2} - r^{n^2} = 2\gamma n^3.$$

Dann ist nach (113) und (114):

$$(123^a) \qquad 2\gamma n^2 \equiv 2\alpha n^2 - p^n T_p \equiv 2\alpha n^2 + r^n T_r \quad \text{mod. } n^4.$$

Alle vorstehenden Überlegungen und Rechnungen können in ganz derselben Weise durchgeführt werden, wenn man überall $p^n$, $q^n$, $r^n$, bzw. durch $p^{n^2}$, $q^{n^2}$, $r^{n^2}$ ersetzt. Besteht die Relation (123), d. h. wird gleichzeitig $\alpha$ durch $\gamma n$ ersetzt, so hat man offenbar in allen vorstehenden Kongruenzen die Potenz des Moduls um eine Einheit zu erhöhen.[1]) Seien also $T'_r$, $S'_r$ die Zahlen, welche aus $T_r$, $S_r$ entstehen, wenn man $p^{n^2}$, $q^{n^2}$, $r^{n^2}$ für $p^n$, $q^n$, $r^n$ einsetzt, so ist z. B. analog zu (92), wie man mittels der erwähnten Substitution aus (82) findet:

$$p^{n^2(n-1)} - r^{n^2(n-1)} + 2\gamma n^3 r^{n^2(n-2)}$$
$$\equiv n T'_r - q^{n^2}(p^{n^2} + q^{n^2})(T'_1 - \gamma n^3 T'_2) \equiv n T'_r - q^{n^2} S'_r n^2 \quad \text{mod. } n^4.$$

Gemäß (83) ist hier also $T_{1r} \equiv T'_{1r}$ mod. $n^2$, und somit auch $T'_{1r}$ durch $n^2$ teilbar. Die links stehende Differenz ist durch $n^3$ teilbar und deshalb folgt, daß $T'_r$ auch durch $n^2$ teilbar ist, wie es wegen der Kongruenz $T_r \equiv T'_r$ mod. $n^2$ selbstverständlich war, denn nach (123[a]) ist jetzt:

$$(123^b) \qquad T_r \equiv 0 \quad \text{mod. } n^2.$$

---

[1]) Vgl. auch die Rechnungen im folgenden Paragraphen.

In obiger Kongruenz können wir rechts und links mit $n$ dividieren und erhalten dadurch:

(123^c) $p^{n(n-1)} - r^{n(n-1)} + 2\gamma n^2 r^{n(n-2)} \equiv T'_r - n q^n S'_r \mod n^3.$

Hierin haben nach obigem die Zahlen $T'$ folgende Werte:

$$n T'_r = \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i p^{n^2(i-1)} q^{n^2(i-1)} r^{n^2(n-2i+1)},$$

(123^d) $$n T'_{1r} = \sum_{i=2}^{\nu+1} N_i (i-1) p^{n^2(i-2)} q^{n^2(i-2)} r^{n^2(n-2i+1)},$$

$$n T'_{2r} = \sum_{i=2}^{\nu} N_i (2i-1)(2i-2) p^{n^2(i-2)} q^{n^2(i-2)} r^{n^2(n-2i)},$$

und es ist zu setzen, analog zu (114^a):

$$n^2 S'_r = (q^{n^2} + p^{n^2})(T'_{1r} - \gamma n^3 T'_{2r}).$$

Da $T'_{1r}$ durch $n^2$ teilbar ist, so haben wir auch:

(123^e) $$n^2 S'_r \equiv (q^n + p^n)(T'_{1r} - \gamma n^3 T'_{2r}) \mod n^4.$$

Die Zahlen $T'$ lassen sich in folgender Weise auf die Zahlen $T$ zurückführen. Gemäß (85) ist:

$$p^{n^2} = p^n (1 + n\pi)^n \equiv p^n (1 + n^2 \pi + n^3 \nu \pi^2) \mod n^4;$$

setzen wir also zur Abkürzung:

$$n M_i = N_i p^{n(i-1)} q^{n(i-1)} r^{n(n-2i+1)},$$

$$P = \pi + \varkappa - 2\varrho, \quad Q = \pi^2 + \varkappa^2 - 2\varrho^2,$$

so erhalten wir aus (123^d):

(123^f)
$$T'_r \equiv \sum M_i [1 + n^2 (i-1)(P + n\nu Q) + n^3 \varrho - n^2 \varrho - n^3 \nu \varrho^2] \mod n^4,$$

$$p^{n^2} q^{n^2} T'_{1r} \equiv \sum (i-1) M_i [1 + n^2 (i-1)(P + n\nu Q) + n^3 \varrho - n^2 \varrho - n^3 \nu \varrho^2] \mod n^4.$$

$$p^{n^2} q^{n^2} T'_{2r} \equiv \sum (2i-1)(2i-2) M_i [1 + n^2 (i-1)(P + n\nu Q) + n^3 \varrho - 2 n^2 \varrho - 2 n^3 \nu \varrho^2] \mod n^4,$$

und durch Auflösung der Klammern:

$$
\begin{aligned}
&T'_r \equiv T_r + n^2(P + n\nu Q)T_{1r} + (n^3 - n^2 - n^3\nu\varrho)\varrho T_r \quad \text{mod.}\, n^4, \\
(123^g)\quad &T'_{1r} \equiv T_{1r} + n^2(P + n\nu Q)T_{3r} + (n^3 - n^2 - n^3\nu\varrho)\varrho T_r \quad „ \quad n^4, \\
&T'_{2r} \equiv T_{2r} \quad „ \quad n^2,
\end{aligned}
$$

wo $T_{3r}$ wieder nach ($88^a$) auf $T_{2r}$ zurückgeführt werden kann. Da nun $T_r$ und $T_{1r}$ je durch $n^2$ teilbar sind, so folgt schließlich:

$$
\begin{aligned}
&T'_r \equiv T_r \quad \text{mod.}\, n^4, \\
(123^h)\quad &T'_{1r} \equiv T_{1r} + n^2(\pi + \varkappa - 2\varrho)T_{3r} \quad „ \quad n^4, \\
&T'_{2r} \equiv T_{2r} \quad „ \quad n^2.
\end{aligned}
$$

Die erste dieser Kongruenzen gibt uns zusammen mit ($123^a$) das Resultat:

$$(123^i)\qquad 2(\gamma - \alpha)n^2 \equiv r'' T'_r \quad \text{mod.}\, n^4.$$

Subtrahieren wir jetzt die Kongruenz ($123^c$) von (115), so wird:

$$(2\alpha - 2\gamma)n^2 \equiv (nT_r - T'_r - n^2 q'' S_r + n q'' S'_r) r'' \quad \text{mod.}\, n^3,$$

und in Rücksicht auf ($123^b$) und ($123^i$) folgt weiter:

$$(123^k)\qquad S'_r \equiv n S_r \quad \text{mod.}\, n^2,$$

so daß aus der Kongruenz ($123^e$) die folgende hervorgeht:

$$(123^l)\qquad n^3 S_r \equiv (p'' + q'')(T'_{1r} - \gamma n^3 T'_{2r}) \quad \text{mod.}\, n^4,$$

wonach $T'_{1r}$ jetzt durch $n^3$ teilbar ist, und weiter durch Vergleichung mit der dritten Gleichung ($114^a$):

$$(123^m)\qquad T'_{1r} - \gamma n^3 T'_{2r} \equiv n(T_{1r} - \alpha n^2 T_{2r}) \quad \text{mod.}\, n^4.$$

In Rücksicht auf die dritte der Kongruenzen ($123^h$) kann die mittlere der letzteren demnach in der folgenden Form geschrieben werden:

$$(123^n)\qquad (\gamma - \alpha)n^3 T_{2r} + n T_{1r} \equiv T_{1r} + n^2(P + n\nu Q)T_{3r} \quad \text{mod.}\, n^4.$$

Ganz analoge Relationen ergeben sich, wenn man von den Zahlen $T', S'$ zu Zahlen $T'', S''$ übergeht, indem man wieder $p, q, r$ bzw. durch $p'', q'', r''$ ersetzt. Um dann diese neuen Zahlen auf $T'$ und $S'$ zurückzuführen, hat man in den eckigen

Klammern der Kongruenzen ($123^f$) nur die Exponenten von $n$ um eine Einheit zu erhöhen und den Modul $n^4$ durch $n^5$ zu ersetzen, ferner die Definition von $M_i$ entsprechend abzuändern. An Stelle von ($123^h$) findet man so:

$$(123^o) \quad \begin{aligned} T''_r &\equiv T'_r && \text{mod. } n^5, \\ T''_{1r} &\equiv T'_{1r} + n^3 (P + n\nu Q) T'_{3r} && \text{,, } n^5, \\ T''_{2r} &\equiv T'_{2r} && \text{,, } n^3. \end{aligned}$$

Gleichzeitig haben wir jetzt $\gamma$ durch $\gamma - \alpha$ zu ersetzen; denn es ist:

$$p^{n3} - q^{n3} - r^{n3} \equiv p^{n2} - q^{n2} - r^{n2} + n^3 (p^n \pi - q^n \varkappa - r^n \varkappa) \quad \text{mod. } n^4,$$

und:

$$p^{n2} - q^{n2} - r^{n2} \equiv p^n - q^n - r^n + n^2 (p^n \pi - q^n \varkappa - r^n \varrho) \quad \text{mod. } n^3,$$

also zunächst:

$$p^n \pi - q^n \varkappa - r^n \varrho \equiv -2\alpha \quad \text{mod. } n$$

und dann:

$$(123^p) \qquad p^{n3} - q^{n3} - r^{n3} \equiv 2(\gamma - \alpha) n^3 \quad \text{mod. } n^4.$$

Bei Aufstellung der zu (115) analogen Kongruenz ist daher $\alpha$ durch $\gamma - \alpha$ zu ersetzen und der Modul $n^3$ wieder durch $n^4$; es wird also:

$$(123^q) \qquad \begin{aligned} &p^{n3(n-1)} - r^{n3(n-1)} + 2(\gamma - \alpha) n^3 r^{n3(n-2)} \\ &\qquad \equiv n T''_r - n^2 q^{n3} S''_r \quad \text{mod. } n^4, \end{aligned}$$

wo, analog zu ($123^e$):

$$(123^r) \quad n^2 S''_r \equiv (q^n + p^n)(T''_{1r} - (\gamma - \alpha) n^3 T''_{2r}) \quad \text{mod. } n^4$$

gesetzt ist. Da in ($123^q$) die Differenz der ersten beiden Glieder der linken Seite durch $n^4$ teilbar ist, so erhalten wir:

$$2(\gamma - \alpha) n^3 \equiv n T''_r r^n - n^2 q^n r^n S''_r \quad \text{mod. } n^4.$$

Nach ($123^i$) und ($123^o$) ist aber die linke Seite mit dem ersten Gliede der rechten Seite in Bezug auf den Modul $n^5$ äquivalent; wir erhalten also:

(123[s]) $$S_r'' \equiv 0 \quad \text{mod. } n^2,$$

und somit aus (123[r]) und (123[o]):

(123[t]) $$T_{1r}' \equiv n^3(\gamma - a)\, T_{2r} - n^3(P + n\nu Q)\, T_{3r} \quad \text{mod. } n^4,$$

denn für $T_{3r}''$ und $T_{3r}'$ gilt vermöge einer zu (123[f]) analogen Umformung dieselbe Relation (123[o]), wie für $T_{2r}''$; setzen wir hier noch den Wert von $T_{1r}'$ aus (123[h]) ein, so wird:

(123[u]) $$T_{1r} \equiv - n^2(\pi + \varkappa - 2\varrho)\, T_{3r} \quad \text{mod. } n^3,$$

was mit (123[n]) in Übereinstimmung ist. Letztere Relation gibt uns aber mehr, wenn wir sie mit den Kongruenzen (123[e]) und (123[r]) verbinden; durch Subtraktion der letzteren voneinander erhalten wir nämlich unter Benutzung von (123[s]):

$$n^2 S_r' \equiv (q^n + p^n)\,[T_{1r}' - T_{1r}'' + a\, n^3\, T_{2r}] \quad \text{mod. } n^4,$$

oder, wenn wir den Wert der Differenz $T_{1r}' - T_{1r}''$ aus (123[o]) entnehmen:

$$n^2 S_r' \equiv (q^n + p^n)\,[a\, T_{2r} - (\pi + \varkappa - 2\varrho)\, T_{3r}]\, n^3 \quad \text{mod. } n^4$$

und wenn wir $S_r'$ gemäß (123[k]) durch $S_r$ ausdrücken und sodann $S_r$ mittels (123[l]) und (123[m]) auf $T_{1r}$ und $T_{2r}$ zurückführen:

$$n\,(T_{1r} - a\, n^2\, T_{2r}) + n^3(\pi + \varkappa - 2\varrho)\, T_{3r} \equiv a\, n^3\, T_{2r} \quad \text{mod. } n^4.$$

Der Vergleich mit (123[k]) ergibt demnach:

$$\left.\begin{aligned} n^2(\pi + \varkappa - 2\varrho)\, T_{3r} &\equiv 2\, a\, n^2\, T_{2r} - T_{1r} \\ &\equiv - T_{1r} \end{aligned}\right\} \quad \text{mod. } n^3,$$

und hieraus folgt, daß entweder $a$ oder $T_{2r}$ durch $n$ teilbar sein muß. Es läßt sich aber zeigen, daß die Zahl $T_{2r}$ den Faktor $n$ nicht enthalten kann. Aus (115) und (115[a]) ergibt sich nämlich durch Subtraktion (da $T_r$ durch $n^2$ teilbar ist):

$$(\pi + \varkappa - 2\varrho)\, r^n + 4\, a \equiv - S_r\, (p^n + q^n)\, r^n \quad \text{mod. } n;$$

berücksichtigen wir also, daß nach (88[a]):

$$4\, T_{3r}\, r^n \equiv T_{2r} \quad \text{mod. } n$$

ist, so finden wir aus ($123^t$):

$$4\, T'_{1r} \equiv n^3\, T_{2r}\, [4\,\gamma + S_r\, (p^n + q^n)\, r^n] \quad \text{mod. } n^4,$$

und durch Vergleichung mit ($123^d$):

$$T_{2r}\, r^n\, (p^n + q^n)^2 \equiv 4 \quad \text{mod. } n,$$

so daß in der Tat $T_{2r}$ nicht durch $n$ teilbar sein kann. Somit erhalten wir das für uns wichtige Resultat:

$$a \equiv 0 \quad \text{mod. } n. \tag{124}$$

Betrachten wir noch den bisher ausgeschlossenen Fall, wo $q - r$ durch $n$ teilbar ist. Dann reduziert sich die Kongruenz (77) auf:

$$p^n \equiv 2\, q^n \quad \text{mod. } n^2. \tag{125}$$

In (84) kann dann der Faktor $r^n - 2\,p^n$ ($\equiv q^n - 2\,p^n$) nicht durch $n$ teilbar sein; es folgt also $T_{1r} \equiv 0$ mod. $n$ und ebenso: $T_{1q} \equiv 0$ mod. $n$. Aus (125) erhalten wir durch Potenzieren:

$$2^{n-1} \equiv 1 \quad \text{mod. } n^2. \tag{125a}$$

Nur für Zahlen $n$, die dieser Bedingung genügen, kann also der Fall $q \equiv r$ eintreten. Eine Bestätigung dieses Resultates geben auch unsere allgemeinen Summenformeln. Die Gleichung (82) war für die Größen $p^n$ und $q^n$ identisch erfüllt; wir dürfen also $p^n$ durch 2, $q^n$ durch 1 ersetzen; das gibt:

$$\begin{aligned} n\,(2^{n-1} - 1) &= \sum N_i (n - 2\,i + 2)\, 2^{i-1} + \sum N_i (i - 1)\, 2^{i-2} \\ &= n \sum N_i\, 2^{i-1} - 3 \sum N_i\, (i - 1)\, 2^{i-2}. \end{aligned} \tag{126}$$

Machen wir andererseits in (93) dieselbe Substitution, so wird:

$$0 = \sum N_i (i - 1)\, 2^{i-1} - \sum N_i\, (n - 2\,i + 2)\, 2^{i-1}$$

oder:

$$n \sum N_i\, 2^{i-1} = 6 \sum N_i\, (i - 1)\, 2^{i-2}. \tag{126a}$$

Drücken wir so die erste Summe durch die zweite aus, so erhalten wir aus (126):

$$(126^b) \qquad n(2^{n-1} - 1) = 3 \sum N_i (i-1) 2^{i-2}.$$ [1]

Ferner ist nach (83) in unserem Falle (d. h. für $q = r$):

$$n T_{1q} = q^{n(n-3)} \sum N_i (i-1) 2^{i-2}.$$

Man ersieht hieraus, daß die Bedingung $T_{1q} \equiv 0 \mod. n^2$ im Falle $q \equiv r$ in der Tat mit der Bedingung ($125^a$) übereinstimmt.

Analog folgt aus (102), wenn man $q^n$ und $r^n$ durch 1 ersetzt:

$$(127) \qquad 2(1 - 2^{n-1}) = \sum N_i (-1)^{i-1} 2^{n-2i+2}$$

und aus (103) erhält man dasselbe Resultat. Beiläufig finden wir also die Relation:

$$n \sum N_i (-1)^{i-1} 2^{n-2i+1} = -3 \sum N_i (i-1) 2^{i-2}.$$

Soll im Falle $q \equiv r \mod. n$ auch die Bedingung (122) erfüllt sein, so ist:

$$p^{n^2} \equiv 2 q^{n^2} \quad \mod. n^3,$$

während sich aus (125) durch Potenzieren ergibt:

$$p^{n^2} \equiv 2^n q^{n^2} \quad \mod. n^3.$$

Es müßte also die Bedingung:

$$(127^a) \qquad 2^{n-1} \equiv 1 \quad \mod. n^3$$

erfüllt sein. Wir fassen das Vorstehende in folgendem Satze zusammen:

Wenn zugleich mit der Kongruenz (77) auch die Kongruenz (122) bestehen soll und die erstere Kongruenz nur für den Modul $n^2$ (also nicht für $n^3$) gilt, so ist das nur möglich, wenn eine der Zahlen $p + r$,

---

[1]) Hieraus folgt beiläufig, daß die Zahl $2^{n-1} - 1$ für jede ungerade Zahl $n$ durch 3 teilbar ist, wie man auch direkt leicht erkennt.

$q + r$, $q - r$ durch $n$ teilbar ist und die ungerade Primzahl $n$ der Bedingung (127ᵃ) genügt.[1])

## § 9. Erweiterung der in § 8 aufgestellten Hilfsformeln für höhere Potenzen des Moduls.

Wir haben bisher ausgeschlossen, daß die Zahl $a$ durch $n$ teilbar sei. Setzen wir jetzt, entsprechend dem in (125) gewonnenen Resultate:

$$a = \beta \cdot n^\lambda,$$

so geht die Gleichung (91) in die folgende über:

$$p^n - q^n - r^n = 2\beta n^{\lambda+2}. \tag{128}$$

Wir haben nun die entsprechenden Fragen zu untersuchen. Wir gehen zu der Relation (82) zurück; die linke Seite derselben wird jetzt:

$$(86)^* \quad \equiv n\,[p^{n(n-1)} - r^{n(n-1)} + 2\beta n^{\lambda+2} r^{n(n-2)}] \quad \text{mod. } n^{\lambda+4},$$

und die erste Summe der rechten Seite von (82):

$$(87)^* \quad \equiv n^2 T_r - 2np^n q^n T_{1r} + 2\beta n^{\lambda+3} p^n q^n T_{2r} \quad \text{mod. } n^{\lambda+4},$$

ferner die zweite Summe:

$$(89)^* \quad \begin{aligned} &\equiv n q^n r^n T_{1r} + 2\beta n^{\lambda+3} q^n T_{1r} - \beta n^{\lambda+3} q^n r^n T_{2r} \\ &\quad - \beta n^{\lambda+3} \nu^2 p^{n(\nu-1)} q^{n(\nu-1)} \quad \text{mod. } n^{\lambda+4}, \end{aligned}$$

so daß wir aus (82) erhalten (da $T_{1r}$ wieder durch $n^2$ teilbar ist):

$$(92)^* \quad \begin{aligned} &p^{n(n-1)} - r^{n(n-1)} + 2\beta n^{\lambda+2} r^{n(n-2)} \\ &\equiv n T_r - q^n(q^n + p^n)(T_{1r} - \beta n^{\lambda+2} T_{2r}) \quad \text{mod. } n^{\lambda+3}; \end{aligned}$$

---

[1]) Der zu Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene Satz hatte sich mir als beiläufige Folgerung ergeben; es zeigte sich aber, daß der Beweis eine Lücke hatte; leider konnte ich den ausgesprochenen Satz nicht mehr unterdrücken. Er ist übrigens für die einfachsten Fälle richtig; so hat man für $n = 7$: $3^7 - 2^7 - 1^7 \equiv 0$ mod. $7^2$ (auch mod. $7^3$) und $2^3 \equiv 1^3 \equiv -3^3 \equiv 1$ mod. 7, und für $n = 13$: $6^{13} - 8^{13} - 11^{13} \equiv 0$ mod. $13^2$ (auch mod. $13^3$) und: $11^6 \equiv 8^6 \equiv 6^6 \equiv 1$ mod. 13; für $n = 19$: $5^{19} - 2^{19} - 3^{19} \equiv 0$ mod. $19^2$ und $2^9 \equiv 3^9 \equiv -5^9 \equiv -1$ mod. 19.

ebenso ergibt sich an Stelle von (94):

$$(94)^* \quad \begin{aligned} & r^{n(n-1)} - q^{n(n-1)} - 2\beta n^{\lambda+2} r^{n(n-2)} \\ & \equiv - n T_r + p^n (p^n + q^n)(T_{1r} - \beta n^{\lambda+2} T_{2r}) \quad \text{mod. } n^{\lambda+3}. \end{aligned}$$

Ebenso behalten die Kongruenzen (98) und (99), ferner (111) und (112) ihre Gültigkeit, wenn man nur überall $\alpha$ durch $\beta n^\lambda$ und den Modul $n^4$ durch $n^{\lambda+4}$ ersetzt. Die Kongruenzen (100^a) und (113) werden:

$$\begin{aligned} p^{n2} - q^{n2} - r^{n2} & \equiv 2\beta n^{\lambda+3} - n T_p p^n \\ & \equiv 2\beta n^{\lambda+3} + n T_q q^n \end{aligned} \quad \text{mod. } n^{\lambda+5},$$

so daß auch die Kongruenzen (114) für den Modul $n^{\lambda+4}$ gültig bleiben. In gleicher Weise lassen sich offenbar alle folgenden Betrachtungen erweitern. Nimmt man dann eine Gleichung:

$$(123)^* \qquad p^{n2} - q^{n2} - r^{n2} = \gamma_1 n^{\lambda+3}$$

hinzu, so ergibt sich durch die genau entsprechenden Schlüsse das Resultat:

$$(124)^* \qquad \beta \equiv 0 \quad \text{mod. } n,$$

und damit der Satz:

Sollen also die Kongruenzen:

$$p^n - q^n - r^n \equiv 0 \quad \text{mod. } n^{\lambda+2}$$

und:

$$p^{n2} - q^{n2} - r^{n2} \equiv 0 \quad \text{mod. } n^{\lambda+3}$$

gleichzeitig bestehen, so muß die erstere auch für den Modul $n^{\lambda+3}$ gültig sein, oder es muß eine der Zahlen $p+q$, $p+r$, $q-r$ durch $n$ teilbar sein.

## § 10. Der Fall III).

Wir kehren nach diesen Vorbereitungen zu unserer ursprünglichen Aufgabe zurück, indem wir den Fall III) untersuchen. Die Gleichungen (13), (13[a]) und (13[b]) geben hier:

$$\begin{aligned}
n x^\nu y^\nu &= r_n^n - r^{n(n-1)} - \sum_{i=2}^{\nu} N_i x^{i-1} y^{i-1} r^{n(n-2i+1)}, \\
(129) \qquad n x^\nu z^\nu &= q_n^n - q^{n(n-1)} - \sum N_i x^{i-1} z^{i-1} q^{n(n-2i+1)}, \\
(-1)^\nu n y^\nu z^\nu &= p_n^n - p^{n(n-1)} - \sum (-1)^{i-1} N_i y^{i-1} z^{i-1} p^{n(n-2i+1)}.
\end{aligned}$$

Nehmen wir zunächst an, es sei eine der Zahlen $p$, $q$, $r$ durch $n$ teilbar. Es sei etwa $r$ diese Zahl. In der ersten Gleichung sind dann alle Glieder der rechten Seite, mit Ausnahme des ersten, durch $n^{2n+1}$ teilbar, die linke Seite ist durch $n$ teilbar; es ist folglich auch $r_n^n$ durch $n$ teilbar. Dann aber enthält $r_n^n$ den Faktor $n^n$, folglich muß auch $x^\nu y^\nu$ durch $n^{n-1} = n^{2\nu}$ teilbar sein, d. h. $x$ oder $y$ müßte durch $n$ teilbar sein; das aber ist unmöglich, da $x$, $y$, $z$ zueinander relativ prim sein sollen und da $z = r \cdot r_n$ jetzt schon den Faktor $n$ enthält.

Wäre umgekehrt $r_n$ durch $n$ teilbar, so müßte wegen der ersten Gleichung (129) auch $r$ durch $n$ teilbar sein, und wir kommen auf die soeben diskutierte Annahme zurück.

Im Falle III) kann also keine der Zahlen $x$, $y$, $z$ und keine der Zahlen $p$, $q$, $r$ den Faktor $n$ enthalten.

Infolgedessen ergeben sich aus den Gleichungen (129) sofort die Kongruenzen:

$$p_n^n \equiv p^{n(n-1)}, \quad q_n^n \equiv q^{n(n-1)}, \quad r_n^n \equiv r^{n(n-1)} \quad \text{mod. } n,$$

also auch nach dem Fermat'schen Satze (nach welchem $p^n \equiv p$ ist):

$$(130) \qquad p_n \equiv p^{n-1}, \quad q_n \equiv q^{n-1}, \quad r_n \equiv r^{n-1} \quad \text{mod. } n$$

und hieraus:

$$p_n \equiv 1, \quad q_n \equiv 1, \quad r_n \equiv 1 \quad \text{mod. } n.$$

Es ist aber nach III):

$$x = p p_n \equiv p, \quad y = q q_n \equiv q, \quad z = r r_n \equiv r \quad \text{mod. } n$$

und durch Potenzieren erhält man:

$$x^n \equiv p^n, \quad y^n \equiv q^n, \quad z^n \equiv r^n \quad \text{mod. } n^2,$$

also aus der vorausgesetzten Gleichung (3):

$$(131) \qquad p^n \equiv q^n + r^n \quad \text{mod. } n^2.$$

Zufolge der Gleichungen III) ist $y + z = p^n$, etc., folglich:

$$y + z \equiv (x - z) + (x - y) \quad \text{mod. } n^2,$$

oder:

$$(131^a) \qquad x \equiv y + z \quad \text{mod. } n^2,$$

also auch, da die rechte Seite gleich $p^n$ ist:

$$x = p p_n \equiv p^n \quad \text{mod. } n^2,$$

und hieraus:

$$p_n \equiv p^{n-1} \quad \text{mod. } n^2.$$

Entsprechendes erhält man aus ($131^a$) für $q$ und $r$, so daß:

$$p_n \equiv p^{n-1}, \quad q_n \equiv q^{n-1}, \quad r_n \equiv r^{n-1} \quad \text{mod. } n^2.$$

Um die Zahlen $p_n$, $q_n$, $r_n$ bzw. von den Zahlen $p^{n-1}$, $q^{n-1}$, $r^{n-1}$ zu unterscheiden, müssen wir daher auch das Quadrat von $n$ berücksichtigen. Wir setzen demnach:

$$(132) \qquad p^{n-1} = 1 + n\pi, \quad q^{n-1} = 1 + n\varkappa, \quad r^{n-1} = 1 + n\varrho,$$

folglich gemäß (130):

$$(133) \qquad \begin{gathered} p_n = 1 + n\pi + n^2\pi_1, \quad q_n = 1 + n\varkappa + n^2\varkappa_1, \\ r_n = 1 + n\varrho + n^2\varrho_1. \end{gathered}$$

Andererseits ist nach den Gleichungen III$^a$):

$$(134) \qquad \begin{aligned} 2x &= 2pp_n = p^n + q^n + r^n = 2p^n - (p^n - q^n - r^n), \\ 2y &= 2qq_n = p^n + q^n - r^n = 2q^n + (p^n - q^n - r^n), \\ 2z &= 2rr_n = p^n - q^n + r^n = 2r^n + (p^n - q^n - r^n). \end{aligned}$$

Die Vergleichung mit (133) ergibt:

(134ª) $p^n - q^n - r^n = -2p\pi_1 n^2 = 2q\varkappa_1 n^2 = 2r\varrho_1 n^2,$

woraus hervorgeht, daß $p^n - q^n - r^n$ durch $n^2$ teilbar ist, wie es schon in (131) gefunden wurde. Wir setzen demnach:

(135) $$p^n - q^n - r^n = 2an^2,$$

wo nun $a$ eine ganze Zahl bezeichnet, die durch $p$, $q$ und $r$ teilbar sein muß; und dann wird:

(136) $x = p^n - an^2, \quad y = q^n + an^2, \quad z = r^n + an^2.$

Es soll gezeigt werden, daß die Zahl $a$ gleich Null sein muß.

Setzen wir diese Werte von $x, y, z$ in die vorausgesetzte Gleichung (3) ein, so ergibt sich:

$$0 = x^n - y^n - z^n = (p^n - an^2)^n - (q^n + an^2)^n - (r^n + an^2)^n$$
$$\equiv p^{n2} - q^{n2} - r^{n2} - an^3(p^{n(n-1)} + q^{n(n-1)} + r^{n(n-1)}) \mod. n^5,$$

also, da jede der drei Zahlen innerhalb der letzten Klammer nach dem erweiterten Fermatschen Satze durch 1 ersetzt werden darf:

$$\equiv p^{n2} - q^{n2} - r^{n2} - 3an^3 \quad \mod. n^5.$$

Es besteht folglich die Kongruenz:

(137) $$p^{n2} - q^{n2} - r^{n2} \equiv 3an^3 \quad \mod. n^5$$

neben der Gleichung (135). Nach dem Resultat von § 8 kann dies nur eintreten, wenn entweder die Zahl $a$, oder eine der Zahlen $p+q$, $p+r$, $q-r$ durch $n$ teilbar ist. Letztere Möglichkeit ist aber auszuschließen, wie jetzt noch zu beweisen ist. Wenn z. B. $p+q$ den Faktor $n$ enthielte, d. h. wenn:

(138) $$p \equiv -q \quad \mod. n$$

wäre, so erhielte man durch Potenzieren:

139) $$p^n \equiv -q^n \quad \mod. n^2.$$

Wir knüpfen zu dem Zwecke wieder an unsere allgemeinen Formeln an. Das Bestehen der Kongruenzen (92) und (94) wird durch unsere jetzige Annahme nicht gestört; sie vereinfachen sich nur dadurch, daß jetzt das Glied $a n^2 T_2 q^n (p^n + q^n)$ gestrichen werden kann; die Kongruenzen (98), (99), (111) und (112) bleiben vollkommen ungeändert. Auch die Kongruenzen (115), ... (115[c]) bleiben demnach bestehen; in ihnen kann nur $S_r$ jetzt durch die einfachere Gleichung:

$$n^2 S_r = -(r^n - 2p^n) T_{1r} \tag{142}$$

definiert werden, welche an Stelle der letzten Gleichung (114[a]) tritt; im übrigen lauten letztere hier:

$$n^2 S_q = -(q^n - 2p^n)(T_{1q} - a n^2 T_{2q})$$
$$n^2 S_p = (p^n - 2r^n)(T_{1p} + a n^2 T_{2p}).$$

Eine Änderung erfährt hingegen die Kongruenz (100[a]); sie lautet jetzt:

$$p^{n^2} - q^{n^2} - r^{n^2} \equiv 2an^3 + n r^n T_r - 4an^3 p^n q^n T_{1r} \mod. n^5, \tag{143}$$

während die Kongruenzen (101) und (113) unverändert fortbestehen. An Stelle von (114) erhalten wir somit jetzt:

$$r^n T_r - 4an^2 p^n q^n T_{1r} \equiv q^n T_q \equiv -p^n T_p \mod. n^4. \tag{144}$$

Die Gültigkeit der aus (115) ... (115[e]) abgeleiteten Kongruenzen (116), (117), (118) wird nicht gestört; es ist nur dort $S_r$ jetzt durch (142) definiert. An Stelle der Kongruenz (119) finden wir aus (116) und (143):

$$2an^2 \equiv n r^n T_r - n^2 q^n r^n (S_q + S_r) \mod. n^3, \tag{145}$$

also ein mit (119) übereinstimmendes Resultat. Aus (117) ergibt sich ebenso:

$$2an^2 \equiv n r^n T_r - n^2 p^n r^n (S_r - S_p) \mod. n^3, \tag{146}$$

ebenfalls in Übereinstimmung mit (119); endlich aus (118), (113) und (143):

$$\begin{aligned} 2an^2 &\equiv n q^n T_q - n^2 p^n q^n (S_p + S_q) \\ &\equiv n r^n T_r - 4an^2 p^n q^n T_{1r} - n^2 p^n q^n (S_p + S_q) \mod. n^3. \end{aligned} \tag{147}$$

Die Kongruenzen (119) sind also jetzt durch (145), (146) und (147) zu ersetzen. An Stelle von (120) erhalten wir hier aus (146) und (147):

$$4\,a\,q^n\,T_{1r} + p^n\,S_p + q^n\,S_q - r^n\,S_r \equiv 0 \quad \text{mod. } n,$$

dagegen aus (145) und (146):

$$p^n\,S_p + q^n\,S_q - r^n\,S_r \equiv 0 \quad \text{mod. } n.$$

Es ist folglich $T_{1r}$ jetzt durch $n$ teilbar, wie auch aus (125[a]) und (126[b]) hervorgeht, und somit ist nach (142) die Zahl $S_r$ durch $n$ teilbar. Infolge dieses Resultates gelten die Kongruenzen (119) vollständig unverändert, und ebenso alle anderen früheren Relationen, insbesondere werden die Kongruenzen (143) und (144) jetzt bzw. mit den entsprechenden früheren Kongruenzen (100[a]) und (113) identisch.

Besteht wieder die Relation (123), so folgt aus (143) wieder, daß $T_r$ durch $n^2$ teilbar ist, somit aus (115):

$$p^{n(n-1)} - r^{n(n-1)} + 2\,a\,n^2 \equiv 0 \quad \text{mod. } n^3,$$

ebenso aus (123[b]):

$$p^{n(n-1)} - r^{n(n-1)} + 2\,\gamma\,n^2 \equiv 0 \quad \text{,,} \quad n^3,$$

folglich:

$$(147^a) \qquad a \equiv \gamma \quad \text{mod. } n.$$

Dasselbe Resultat leitet man als eine Folge des Zusammenbestehens der Relationen:

$$p^n - q^n - r^n = 2\,a\,n^2$$
$$p^{n2} - q^{n2} - r^{n2} = 2\,\gamma\,n^2$$
$$r^n = 2\,p^n + \beta\,n^2, \qquad 2^{n-1} \equiv 1 \quad \text{mod. } n^3$$

leicht direkt ab. Infolge der vorausgesetzten Gleichung (3) war aber nach (137) $2\,\gamma \equiv 3\,a$ mod. $n$; aus (147[a]) folgt also wieder das Resultat: $a \equiv 0$ mod. $n$, auf dem alles folgende beruht.

Auch das weitere Rekursionsverfahren bleibt im wesentlichen ungeändert.

Aus vorstehendem geht hervor, daß die Fälle, wo eine der Zahlen $p+q$, $p+r$, $q-r$ durch $n$ teilbar ist, von

uns nicht weiter berücksichtigt zu werden brauchen; und wir kommen zu folgendem Resultate:

Infolge der Gleichung $x^n = y^n + z^n$ müssen die Kongruenzen:

$$p^n \;-q^n \;-r^n \;\equiv 0 \quad \text{mod. } n^{\lambda+2}$$
$$p^{n2} - q^{n2} - r^{n2} \equiv 0 \quad\;\; „ \quad n^{\lambda+3}$$

zunächst für $\lambda = 0$ bestehen; dann gelten sie nach unserem Hilfssatze auch für $\lambda = 1$, dann für $\lambda = 2$, u. s. f. Es bleibt also nur die Möglichkeit, daß die Zahl $\alpha$, welche als Faktor von $n^{\lambda+2}$ bzw. $n^{\lambda+3}$ auftritt, wenn man die Kongruenzen als Gleichungen schreibt, gleich Null ist; wo wir dann aus Gleichung (135) das Resultat:

(148) $$p^n - q^n - r^n = 0$$

erhalten. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (134) können wir sonach folgenden Satz aussprechen:

Sollen also drei Zahlen $x, y, z$ existieren, deren keine durch $n$ teilbar ist, und die der Gleichung:

$$x^n - y^n - z^n = 0$$

genügen, so ist jede von ihnen gleich der $n^{\text{ten}}$ Potenz einer anderen Zahl; und zwischen diesen drei anderen Zahlen $p, q, r$ besteht dieselbe Relation:

$$p^n - q^n - r^n = 0.$$

Für diese Zahlen $p, q, r$ gilt also dasselbe; man hat:

$$p = p_1^n, \quad q = q_1^n, \quad r = r_1^n$$

und es ist:

$$p_1^n - q_1^n - r_1^n = 0.$$

Die Zahlen $p_1, q_1, r_1$ sind kleiner als die Zahlen $p, q, r$; letztere kleiner als die Zahlen $x, y, z$. So wird man zu immer kleineren Zahlen $p_i, q_i, r_i$ fortschreiten, bis eine dieser Zahlen gleich 1 geworden ist, wo dann eine Gleichung der Form:

$$P^n = Q^n + 1$$

bestehen müßte, die offenbar nur möglich ist, wenn $P = 1$, $Q = 0$ genommen wird.

Hiermit ist auch der Fall III) als unmöglich nachgewiesen.

## § 11. Schlussbemerkung

Somit ist die Unmöglichkeit dargetan, eine Gleichung der Form (3), d. h. eine Gleichung:

$$x^n = y^n + z^n$$

durch ganze Zahlen $x$, $y$, $z$ zu befriedigen, wenn $n$ eine ungerade Primzahl bedeutet, und wenn keine der Zahlen $x, y, z$ durch $n$ teilbar sein soll. Der Fall aber, wo eine dieser Zahlen durch $n$ teilbar ist, wurde schon oben (p. 297 ff.; vgl. auch unten § 12) erledigt.

Da nun die Unmöglichkeit des Falles $n = 4$ von Lamé nachgewiesen wurde, kann $n$ auch keine Potenz von 2 sein;[1]) es bleibt also in der Tat nur die eine Möglichkeit $n = 2$.

Die im vorstehenden herangezogenen Hilfsmittel sind durchaus elementarer Natur; außer dem Fermatschen Satze der Zahlentheorie sind nur einfache algebraische Umformungen benutzt worden. Es ist daher immerhin möglich, daß Fermat bereits im Besitze eines Beweises für seine Behauptung gewesen ist, denn die von uns benutzten Hilfsmittel sind der binomische Satz, der Fermatsche Satz, nach welchem $p^{n-1} = 1$ mod. $n$, und der sogenannte erweiterte Fermatsche Satz.

Das gewonnene Resultat kann man auch dahin aussprechen, daß die Kurve:

$$x^n - y^n - z^n = 0$$

außer den drei Punkten 0, 1, $-1$; 1, 0, 1; 1, 1, 0 keinen weiteren Punkt mit rationalen Koordinaten besitzt.

Bedeutet daher $\lambda$ eine rationale Zahl, und schneiden wir die Kurve mit der geraden Linie:

$$(x - y) - \lambda z = 0,$$

welche durch den Punkt 1, 1, 0 hindurchgeht, so kann die resultierende Gleichung nicht durch rationale Werte erfüllt werden. Es ergibt sich aber durch Elimination von $z$:

---

[1]) Vgl. hierfür auch den Schluß des oben zitierten Werkes von Hilbert.

$$\lambda^n (x^n - y^n) - (x - y)^n = 0,$$

oder nach Division mit $x - y$, wenn noch:

$$\frac{x}{y} = t$$

gesetzt wird:

$$\lambda^n (t^{n-1} + t^{n-2} + \ldots + t + 1) - (t - 1)^{n-1} = 0.$$

Ist die ganze Zahl $n$ größer als 2, so kann demnach diese Gleichung nicht durch rationale Werte von $t$ und $\lambda$ erfüllt werden, ausgenommen die Werte $t = 1$, $\lambda = 0$ und $t = 0$, $\lambda = +1$, oder $-1$, je nachdem die Zahl $n$ ungerade oder gerade ist.

## § 12. Nachtrag zu § 7. — Erläuterung der allgemeinen Schlüsse an dem Falle $n = 5$.

Die oben angewandte Schlußweise möge hier noch an dem Beispiele $n = 5$ erläutert werden.

Durch Vergleich der rechten Seite von $(58^d)^*$ mit $(57^a)^*$ erhalten wir:

$$\vartheta_1 q + 2 r_1 \varkappa_1 + r_1^2 q^{n-2} + \tfrac{4}{3}(n-1)(n-2) r_1^2 q^{n-2}$$
$$\equiv -2 r_1 \pi_1 \quad \text{mod. } n.$$

Wir können hier die Entwicklung sogleich weiter verfolgen, wenn wir in $(58^c)^*$ gemäß $(58^b)^*$ setzen:

$$(\varkappa_1' - \pi_1')^2 \equiv (r_1 - 2 n r_1)^2 q^{2n-4};$$

dann wird:

$$(\pi_1 - \varkappa_1) q \equiv -2 r_1 + 2 n r_1$$
$$+ n^{\lambda+1} [\vartheta_1 q + 2 r_1 \varkappa_1 + r_1^2 (2n-1)^2 q^{n-2} + \tfrac{4}{3}(n-1)(n-2) r_1^2 q^{n-2}]$$
$$\text{mod. } n^{2\lambda+2},$$

also nach $(57^a)^*$:

$$\text{(A)} \quad \vartheta_1 q \equiv -2 r_1 (\pi_1 + \varkappa_1) - r_1^2 (2n-1)^2 q^{n-2} - \tfrac{4}{3}(n-1)(n-2) q^{n-2} r_1^2$$
$$\text{mod. } n^{\lambda+1}.$$

Die Zahl $\vartheta_1$ in $(58)^*$ ist hierdurch bis auf Vielfache von $n^{\lambda+1}$ bestimmt; wir haben demnach zu setzen:

(B) $$p - q = 2n^{\lambda+1} r_1 + r_1 \vartheta_1 n^{3\lambda+3} + r_1 \vartheta_1' n^{4\lambda+4},$$

und nun $\vartheta_1'$ zu suchen. Durch Potenzieren finden wir, analog zu (58ᵃ)*:

(C) $$p^n - q^n \equiv n q^{n-1} \Theta_4 + \binom{n}{2} q^{n-2} \Theta_3^2 + \binom{n}{3} 8 r_1^3 n^{3\lambda+3} q^{n-3} + 16 r_1^4 n^{4\lambda+4} \binom{n}{4} q^{n-4} \quad \text{mod. } n^{5\lambda+6},$$

und hierin ist:

(D) $$\Theta_4 = 2n^{\lambda+1} r_1 + r_1 \vartheta_1 n^{3\lambda+3} + r_1 \vartheta_1' n^{4\lambda+4},$$
$$\Theta_3 = 2n^{\lambda+1} r_1 + r_1 \vartheta_1 n^{3\lambda+3}.$$

Andererseits ist analog zu (57)*, gemäß (60ᵉ)*:

(E) $$p^n - q^n \equiv 2n^{\lambda+2} r_1 [1 + \varepsilon n^{\lambda+1} (\pi_1' + \varkappa_1') + n^{2\lambda+2} \pi_1' \varkappa_1'] + 2n^{3\lambda+5} \cdot \nu \cdot r_1^3 p^{\nu-1} q^{\nu-1} \quad \text{mod. } n^{5\lambda+8},$$

oder wenn wir die Relation (B) zur Umformung benutzen, und beiderseits mit $r_1 n^{2\lambda+3}$ dividieren:

$$2\varkappa_1 + n^{\lambda+1} \vartheta_1 + n^{2\lambda+2} \vartheta_1' + n^{2\lambda+2} \vartheta_1 \varkappa_1 + 4\nu r_1 q^{n-2} + n^{2\lambda+2} \cdot 4\nu \cdot r_1 \vartheta_1 q^{n-2}$$
$$+ n^{\lambda+1} \tfrac{1}{3}(n-1)(n-2) 4 r_1^2 q^{n-3} + n^{2\lambda+2} \tfrac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3) 2 r_1^3 q^{n-4}$$
$$\equiv 2\varepsilon(\pi_1' + \varkappa_1') + 2n^{\lambda+1} \pi_1' \varkappa_1' + n^{2\lambda+2} \cdot 2\nu \cdot r_1^3 p^{\nu-1} q^{\nu-1} \quad \text{mod. } n^{3\lambda+3}$$

oder, analog zu (58ᶜ)*:

(F) $$(\varkappa_1 - \pi_1) q \equiv 2r_1 - 2n r_1 q^{n-1}$$
$$- n^{\lambda+1} [\vartheta_1 q + 2 r_1 \varkappa_1 + (\varkappa_1' - \pi_1')^2 q + \tfrac{4}{3}(n-1)(n-2) r_1^2 q^{n-2}]$$
$$+ n^{2\lambda+2} [2\nu r_1^3 p^{\nu-1} q^{\nu} - \vartheta_1 \varkappa_1 q - \vartheta_1' q - 4\nu r_1 \vartheta_1 q^{n-1}$$
$$- \tfrac{2}{3} r_1^3 (n-1)(n-2)(n-3) q^{n-3}] \quad \text{mod. } n^{3\lambda+3}.$$

Hierin ist $(\pi_1' - \varkappa_1')^2$ gemäß (58ᵇ)* durch die Zahlen $r_1, q, \vartheta_1, \pi_1', \varkappa_1'$ auszudrücken. Einen anderen Wert für $\varkappa_1 - \pi_1$ finden wir, indem wir in (E) die linke Seite durch:

$$p - q + n^{\lambda-1}(p\pi_1 - q\varkappa_1) \equiv 2n^{\lambda+1} r_1 + n^{\lambda+1} q (\pi_1 - \varkappa_1) + n^{2\lambda+2} 2 r_1 \pi_1 + n^{3\lambda+3} r_1 \vartheta_1 \quad \text{mod. } n^{4\lambda+4}$$

ersetzen, wobei zur Umformung die Kongruenz (58)* benutzt wurde; wir erhalten dann aus (E), nach Division mit $n^{\lambda+1}$, analog zu (57ᵃ)*:

$$\text{(G)}\quad \begin{aligned} q(\pi_1 - \varkappa_1) &\equiv -2r_1 + 2nr_1 - 2n^{\lambda+1} r_1 \pi_1 - n^{2\lambda+2} r_1 \vartheta_1 \\ &+ n^{\lambda+2} \cdot 2\varepsilon r_1 (\pi_1' + \varkappa_1') + n^{2\lambda+3} \cdot 2 r_1 \pi_1' \varkappa_1' \quad \text{mod. } n^{3\lambda+3}. \end{aligned}$$

Macht man in (F) die angedeutete Substitution, nämlich:

$$\begin{aligned} 4(\pi_1' - \varkappa_1')^2 &\equiv 4 r_1^2 q^{2n-2} + 4 n^2 r_1^2 q^{2n-2} - 8 n r_1^2 q^{2n-2} \\ &- 2 r_1 (n-1) n^{\lambda+1} q^{n-1} [\vartheta_1 + 2\varkappa_1'^2 + 2 r_1 q^{n-2} \\ &+ \tfrac{4}{3}(n-1)(n-2) r_1^2 q^{n-2} - 2\pi_1' \varkappa_1'] \quad \text{mod. } n^{2\lambda+2} \end{aligned}$$

und ersetzt noch $q^{n-1}$ durch $1 + n^{\lambda+1}\varkappa_1$, so stimmt die rechte Seite von (F) mit der rechten Seite von (G) bis auf die Glieder mit dem Faktor $n^{2\lambda+2}$ überein (denn so war $\vartheta_1$ bestimmt); die Vergleichung der letzteren gibt also eine Bestimmung von $\vartheta_1'$ bis auf Vielfache von $n^{\lambda+1}$.

Sodann hätten wir die Kongruenz ($60^e$) zu erweitern. Wir setzen demnach:

$$\text{(H)}\quad p q R = p^\nu q^\nu + n^{2\lambda+3} \cdot \nu \cdot r_1^2 p^{\nu-1} q^{\nu-1} + n^{4\lambda+6} \eta_2.$$

In der Gleichung:

$$x^\nu y^\nu = [p^n q^n + z(p^n - q^n) - z^2]^\nu$$

ist nach der auf Seite 317 für $r_n$ abgeleiteten Relation:

$$z \equiv n^{\lambda+2} r_1 p^\nu q^\nu + n^{3\lambda+5} \nu r_1^3 p^{\nu-1} q^{\nu-1} \quad \text{mod. } n^{4\lambda+8};$$

also folgt:

$$\begin{aligned} x^\nu y^\nu &\equiv p^{n\nu} q^{n\nu} + n^{2\lambda+4} \cdot \nu \cdot r_1^2 (pq)^{2\nu+n(\nu-1)}, \\ &+ n^{4\lambda+8} \binom{\nu}{2} r_1^4 (pq)^{4\nu+n(\nu-2)} \quad \text{mod. } n^{6\lambda+10}, \end{aligned}$$

und nach (30)*:

$$\begin{aligned} r_n^n &\equiv p^{n\nu} q^{n\nu} + n^{2\lambda+4} \cdot \nu \cdot r_1^2 p^{n\nu-1} q^{n\nu-1} \\ &+ n^{4\lambda+8} \binom{\nu}{2} r_1^4 (pq)^{n\nu-2} \quad \text{mod. } n^{6\lambda+10}, \end{aligned}$$

und somit:

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} r_n \equiv pqR \equiv p^\nu q^\nu &+ n^{2\lambda+3} \cdot \nu \cdot r_1^2 p^{\nu-1} q^{\nu-1} - n^{4\lambda+6} \cdot \nu^2 \cdot r_1^4 (pq)^{2\nu-2} \\ &+ n^{4\lambda+7} \binom{\nu}{2} r_1^4 (pq)^{\nu-2} \quad \text{mod. } n^{6\lambda+9}. \end{aligned}$$

Durch den Vergleich mit (H) ist dann $\eta_2$ bestimmt:

$$\text{(K)} \quad \eta_2 \equiv -\nu^2 r_1^4 p^{2\nu-2} q^{2\nu-2} + n \binom{\nu}{2} r_1^4 p^{\nu-2} q^{\nu-2} \mod. n^{2\lambda+3}.$$

Für die Differenz $p^n - q^n$ finden wir hieraus:

$$\text{(L)} \quad \begin{aligned} p^n - q^n \equiv\ & 2 n^{\lambda+2} p^\nu q^\nu r_1 + 2 n^{3\lambda+5} \cdot \nu \cdot r_1^3 p^{\nu-1} q^{\nu-1} \\ & - 2 n^{5\lambda+8} \cdot \nu^2 \cdot r_1^5 (pq)^{2\nu-2} + 2 n^{5\lambda+9} \binom{\nu}{2} r_1^5 (pq)^{\nu-2} \\ & \mod. n^{7\lambda+11}. \end{aligned}$$

Nach (B) dürfen wir, unter Einführung einer noch unbekannten Zahl $\vartheta_1''$, setzen:

$$\text{(M)} \quad p - q = 2 n^{\lambda+1} r_1 + n^{3\lambda+3} r_1 \vartheta_1 + n^{4\lambda+4} r_1 \vartheta_1' + n^{5\lambda+5} r_1 \vartheta_1'';$$

und durch Potenzieren ergibt sich hieraus:

$$\text{(N)} \quad \begin{aligned} p^n - q^n \equiv\ & n \Theta_5 q^{n-1} + \binom{n}{2} \Theta_4^2 q^{n-2} + \binom{n}{3} \Theta_3^3 q^{n-3} \\ & + \binom{n}{4} 2^4 n^{4\lambda+4} r_1^4 + \binom{n}{5} 2^5 r_1^5 n^{5\lambda+5} \quad \mod. n^{6\lambda+7}, \end{aligned}$$

wo $\Theta_4$, $\Theta_3$ durch obige Gleichungen (D) definiert sind, während $\Theta_5$ die rechte Seite von (M) bezeichnet. Entwickelt man die rechte Seite von (N) nach Potenzen von $n$, so stimmen alle Glieder bis zu demjenigen mit dem Faktor $n^{5\lambda+5}$ einschließlich mit den entsprechenden Gliedern von (L) bzw. den schon in der Kongruenz (C) so weit schon berechneten Gliedern überein; der Faktor von $n^{5\lambda+6}$ auf der rechten Seite von $n$ enthält in $\Theta_5$ die unbekannte Zahl $\vartheta_1''$, während diese Zahl auf der rechten Seite von (L) nicht vorkommt; dadurch ergibt sich eine Bestimmung dieser Zahl bis auf Vielfache der Zahl $n^{\lambda+1}$. Ist $n > 5$, so enthält der Faktor $n^{5\lambda+6}$ auf der rechten Seite von (N) auch das Glied:

$$\frac{1}{n} \binom{n}{5} 2^5 r_1^5.$$

Wenn aber $n = 5$ ist, so gibt dies Glied einen Beitrag zum Faktor von $n^{5\lambda+5}$, der durch die Kongruenz (C) schon

bestimmt ist, und deshalb keine nachträgliche Korrektur erfahren kann. Im Falle $n = 5$ ist also die Kongruenz (N) mit den Kongruenzen (C) oder (L) nur verträglich, wenn $r_1$ den Faktor $n$ enthält; es folgt also für $n = 5$: $r_1 \equiv 0 \bmod. n$, q. e. d.

Bei dem letzten Schlusse hatten wir unsere obige allgemeine Regel etwas vereinfacht, indem wir die Kongruenzen (L) und (N) direkt miteinander verglichen, ohne ihre Differenz explizite zu bilden, ohne also auf Bildung der Differenz $(\pi_1 - \varkappa_1)q$ zurückzugehen: in ähnlicher Weise wird man allgemein verfahren können.

---

## Verbesserungen.

Seite 322. Für den zu Beginn von § 8 ausgesprochenen Satze vgl. die Anmerkung auf Seite 339.

" 323. Z. 10 v. o.: Lies „äquivalent“ statt „gleich“.

# Zur Elektronentheorie II.

Von **F. Lindemann.**

(*Eingelaufen 7. Dezember.*)

In meiner letzten Mitteilung (oben S. 197 ff.) hatte ich gesagt, daß die dort definierte Funktion $\varphi_\infty$ nicht der partiellen Differentialgleichung genügt, der sie nach Herrn Sommerfeld genügen sollte. Letzterer machte darauf aufmerksam, daß der Beweis nicht korrekt sei, da in der Gleichung für $\frac{d^2 Q}{d t^2}$ (oben S. 203) auf der rechten Seite ein Glied fehlt. Trotzdem bleibt aber die angeführte Behauptung richtig. Die Funktion $\varphi_\infty$ nämlich hatte ich durch die in Gleichung (18), S. 198 definierte Funktion $\varphi_\Omega$ ersetzt, wo $\Omega$ eine große Konstante bedeutet, um so die Rechnungen zu vereinfachen; wenn die betreffende partielle Gleichung von der Funktion $\varphi_\Omega$ nicht befriedigt wird, so war dies um so weniger von der Funktion $\varphi_\infty$ zu erwarten. Aber nicht umgekehrt: es ist nämlich die in $\varphi_\infty$ unter dem Integralzeichen stehende Funktion $S$ (die den Charakter eines Diskontinuitätsfaktors hat) gleich Null, wenn die Integrationsvariable $\tau$ eine gewisse Grenze $\Omega$ überschreitet, die selbst eine Funktion von $x, y, z$ und $t$ ist, so daß identisch:

$$\varphi_\infty = \varphi_\Omega$$

gesetzt werden darf, und zwar tritt dies (nach den in den Gleichungen (3), (4) und (5), S. 183 gemachten Angaben) ein, sobald $\Omega$ durch die Gleichung:

$$c\,\Omega = a + R_0 \tag{41}$$

als Funktion von $x, y, z$ und $t$ definiert wird, wobei die Bedeutung von $R_0$ oben auf Seite 205 angegeben ist. Durch diesen Umstand (den ich in meiner Abhandlung „Über die Bewegung der Elektronen" wiederholt hervorgehoben habe), werden die folgenden Untersuchungen bedingt.

Vor Eingehen auf die weiteren Entwicklungen sei hier noch folgende Bemerkung gestattet: Oben in § 4 hatte ich angegeben, daß Herr Sommerfeld eine Formel von mir, die für $c\tau > a$ abgeleitet war, für $c\tau < a$ benutzt habe; sein Verfahren kann aber auch durch Benutzung einer für $c\tau < a$ von mir aufgestellten Formel erklärt werden. Das wesentliche ist, daß keine dieser Formeln auf den zu behandelnden Fall paßt, da die Wurzeln $\tau', \tau'', \ldots$ nicht passen. Das sagt aber nichts gegen meine späteren Folgerungen, da von diesen Formeln (die durchaus nicht beanspruchen, alle Fälle zu umfassen) nirgends Gebrauch gemacht wird. Wo ich mich auf sie beziehe, wird nicht der Wert des betreffenden Integrals, sondern nur der Wert der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion benutzt, wie das z. B. Seite 261 (unten) meiner Abhandlung ausdrücklich bemerkt wird.

Wir haben jetzt die auf Seite 202 ff. oben für $\Omega = \text{const}$ angestellten Rechnungen unter der Annahme zu wiederholen, daß $\Omega$ eine Funktion von $t$ sei, indem wir zunächst die Tatsache, daß $\Omega$ auch von $x, y, z$ abhängt, außer acht lassen. Es war:

$$Q = \int_0^{\Omega} e^{-\psi(t-\tau)} \sin cs\tau \, d\tau$$

gesetzt, wo $\psi$ durch Gleichung (34), S. 203 definiert war; dann finden wir:

$$\frac{dQ}{dt} = -\sin cs\,\Omega \cdot e^{-\psi(t-\Omega)}\left(1 - \frac{d\Omega}{dt}\right)$$
$$+ cs\int_0^{\Omega} e^{-\psi(t-\tau)} \operatorname{cosin} cs\tau \, d\tau,$$

und weiter:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = \Big[\psi'(t-\Omega)\cdot \sin cs\Omega \cdot \left(1-\frac{d\Omega}{dt}\right)$$

$$- cs\cdot \operatorname{cosin} cs\Omega\cdot \frac{d\Omega}{dt}\Big]\left(1-\frac{d\Omega}{dt}\right)e^{-\psi(t-\Omega)}$$

$$+ \sin cs\Omega \cdot e^{-\psi(t-\Omega)}\cdot \frac{d^2\Omega}{dt^2}$$

$$- cs\cdot \operatorname{cosin} cs\Omega\cdot e^{-\psi(t-\Omega)} + cse^{-\psi(t)} - c^2 s^2 Q$$

$$= \psi'(t-\Omega)\sin cs\Omega\cdot e^{-\psi(t-\Omega)}\left(1-\frac{d\Omega}{dt}\right)^2$$

$$- cs \operatorname{cosin} cs\Omega\left[1-\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2\right]e^{-\psi(t-\Omega)}$$

$$+ \sin cs\Omega\cdot e^{-\psi(t-\Omega)}\cdot\frac{d^2\Omega}{dt^2} + cse^{-\psi(t)} - c^2 s^2 Q.$$

Durch die Substitution:

$$Q = \frac{s}{c}e^{-\psi(t)}F_\Omega$$

kehren wir zu der ursprünglich zu betrachtenden, in (32) definierten Funktion $F_\Omega$ zurück und finden für sie die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2 F_\Omega}{dt^2} - 2iSk\mathfrak{v}_x(t)\frac{dF_\Omega}{dt} + [c^2 s^2 - iSk\mathfrak{v}_x'(t) - (Sk\mathfrak{v}_x(t))^2]F_\Omega$$

$$= \psi'(t-\Omega)\cdot c\cdot\frac{\sin cs\Omega}{s}\cdot e^{iSk\xi_0}\left(1-\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2$$

$$- c^2 \operatorname{cosin} cs\Omega\cdot\left[1-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2\right]e^{iSk\xi_0}$$

$$+ c\frac{\sin cs\Omega}{s}e^{iSk\xi_0}\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} + c^2,$$

wo die früheren Bezeichnungen benutzt sind (vgl. oben S. 199 ff.). Weiter wurde:

$$\varphi_\Omega' = F_\Omega\cdot e^{iSkx}$$

gesetzt; und dann genügte $\varphi_\Omega'$ derjenigen Differentialgleichung, welche aus der obigen Gleichung (37), S. 204 entsteht, wenn man die rechte Seite durch den Ausdruck:

(41^a) $$e^{iSkx}\left\{c^2+c\Phi_1\left(1-\frac{d\Omega}{dt}\right)^2-c\left[1-\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2\right]\Phi_2+c\,\Phi_3\frac{d^2\Omega}{dt^2}\right\}$$

ersetzt und auch die linke Seite entsprechend umformt; dabei sind $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$ die betreffenden Faktoren aus der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung, nämlich:

$$\Phi_1=\psi'(t-\Omega)\frac{\sin cs\Omega}{s}e^{iSk\xi_0},\quad \Phi_2=c\cdot\operatorname{cosin} cs\Omega\cdot e^{iSk\xi_0},$$

$$\Phi_3=\frac{\sin cs\Omega}{s}e^{iSk\xi_0}.$$

Da aber die durch obige Gleichung (41) definierte Funktion $\Omega$ im allgemeinen auch von $x, y, z$ abhängt, so wird dadurch die Umformung der linken Seite von (37) wesentlich beeinflußt. Diese linke Seite entstand aus der linken Seite von (19), wenn man dort $\varphi$ durch $\varphi'$ ersetzte. Jetzt wird gemäß (24), wo $F$ eine Funktion von $t$ und $\Omega$ bedeutet:

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x}=e^{iSkx}\left\{ikF+\frac{\partial F}{\partial\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}$$

$$\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x\,\partial t}=e^{iSkx}\left\{ik\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 F}{\partial\Omega^2}\frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\frac{\partial^2 F}{\partial\Omega\,\partial t}\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right\}$$

$$\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x\,\partial y}=e^{iSkx}\left\{-klF+il\frac{\partial F}{\partial\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial x}+ik\frac{\partial F}{\partial\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial y}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 F}{\partial\Omega^2}\frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right\}.$$

Bezeichnen wir also die linke Seite von (25) mit $D_t\varphi'_\Omega$:

$$D_t\varphi'_\Omega=\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}-2i\frac{\partial F}{\partial t}Sk\mathfrak{v}_x+\left[c^2s^2-iSk\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt}-(Sk\mathfrak{v}_x)^2\right]F,$$

so wird:

(41^b) $$D\varphi'_\Omega=(D_t\varphi'_\Omega+D_{xyz}\varphi'_\Omega)\,e^{iSkx},$$

wo nun:

$$D_{xyz}\varphi'_\Omega = -\frac{\partial F}{\partial \Omega}\left\{S\frac{\partial \Omega}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{v}_x}{\partial t} + 2S\mathfrak{v}_x\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x\,\partial t} - iSSk\frac{\partial \Omega}{\partial y}\mathfrak{v}_x\mathfrak{v}_y\right.$$

$$(41^c) \quad \left. - SS\,\mathfrak{v}_x\mathfrak{v}_y\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x\,\partial y} + 2c^2 iSk\frac{\partial \Omega}{\partial x} + c^2\Delta^2\Omega\right\}$$

$$-2\frac{\partial^2 F}{\partial \Omega\,\partial t}S\mathfrak{v}_x\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega^2}\left[SS\mathfrak{v}_x\mathfrak{v}_y\frac{\partial \Omega}{\partial x}\frac{\partial \Omega}{\partial y} - c^2S\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2\right];$$

und hierin ist nach (31):

$$(41^d) \quad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \Omega} &= \frac{c}{s}e^{iSk\xi_0}\sin cs\Omega \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega^2} &= c^2 e^{iSk\xi_0}\operatorname{cosin} cs\Omega + \frac{c}{s}e^{iSk\xi_0}\cdot\sin cs\Omega\cdot\left(iSk\frac{\partial \xi_0}{\partial \Omega}\right). \end{aligned}$$

Da $\xi_0$ durch die Gleichung:

$$\xi_0 = \int_{t-\Omega}^{t}\mathfrak{v}_x(\tau)\,d\tau$$

definiert war, so ist:

$$(41^e) \quad \frac{\partial \xi_0}{\partial \Omega} = \mathfrak{v}_x(t-\Omega).$$

Bei unserer *ersten* Voraussetzung über den Anfangszustand war $\mathfrak{v}_x = 0$ für negative Argumente; es ist deshalb zu beachten, daß der Ausdruck (41^e) nur so lange von Null verschieden ist, als $t$ größer als $\Omega$ bleibt.

Ferner ist:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \Omega\,\partial t} = \frac{c}{s}\sin cs\Omega\cdot e^{iSk\xi_0}\cdot iSk\,\mathfrak{v}_x(t) = \frac{\partial F}{\partial \Omega}iSk\,\mathfrak{v}_x(t).$$

Unter Einführung dieser Werte und Bezeichnungsweisen lautet die für $\varphi'_\Omega$ zu erfüllende partielle Differentialgleichung:

$$(41^f) \quad D_t\varphi'_\Omega + D_{xyz}\varphi'_\Omega = c^2.$$

Ersetzt man hierin $F$ durch unsere Funktion (31), so ist durch die Funktion (24), d. h. durch:

$$\varphi'_\Omega = e^{iSkx} F(t, \Omega)$$

die Gleichung:

$$(41^g)\quad D_t \varphi'_\Omega = c^2 + c\,\Phi_1 \left(1 - \frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)^2 - c\,\Phi_2 \left[1 - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)^2\right] + c\,\Phi_3 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}$$

befriedigt. Es müßte also zwischen den Funktionen $F$ und $\Omega$ die Relation:

$$(41^h)\quad D_{xyz} \varphi'_\Omega = -c\,\Phi_1 \left(1 - \frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)^2 + c\,\Phi_2 \left[1 - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)^2\right] - c\,\Phi_3 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}$$

identisch erfüllt sein, wenn $\varphi'_\Omega$ eine Lösung der verlangten Gleichung ($41^f$) sein soll. Das ist aber im allgemeinen nicht der Fall, wie das Beispiel der Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung der $X$-Achse zeigt. Hier ist:

$$\xi = v\,\tau, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad R^2 = (x + \xi)^2 + y^2 + z^2,$$

also nach ($41^e$):

$$\xi_0 = v\,\Omega, \quad (c\,\Omega - a)^2 = (x + v\,\Omega)^2 + y^2 + z^2,$$

und somit (für $\Omega < t$):

$$(41^i)\qquad \Omega = \frac{a\,c - v\,x}{c^2 - v^2} + \sqrt{\frac{r^2 - a^2}{c^2 - v^2} + \frac{(a\,c - v\,x)^2}{(c^2 - v^2)^2}},$$

wo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Es wird also die rechte Seite von ($41^h$) gleich (indem der Wert von $\psi'(t - \Omega)$ aus (33) und (34) entnommen wird):

$$-c\,(\Phi_1 + \Phi_2) = -c\,e^{ikv\Omega} \left(i\,k\,v \frac{\sin c\,s\,\Omega}{s} + c \operatorname{cosin} c\,s\,\Omega\right)$$

$$\text{für } t < \Omega$$

und:

$$= -c^2 e^{-ikv\Omega} \operatorname{cosin} c\,s\,\Omega \quad \text{für } t > \Omega,$$

denn $\mathfrak{v}_x(t - \Omega)$ ist, wie schon oben hervorgehoben, bei unserer ersten Voraussetzung über den Anfangszustand gleich Null, wenn $t - \Omega$ negativ wird. Die linke Seite von ($41^h$) dagegen wird:

$$D_{xyz}\varphi'_\Omega = \frac{\partial F}{\partial \Omega}\left(ikv^2\frac{\partial \Omega}{\partial x} + v^2\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} - 2ic^2 Sk\frac{\partial \Omega}{\partial x} - c^2 \Delta^2 \Omega\right)$$

$$- 2\frac{\partial^2 F}{\partial \Omega\, \partial t} v \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega^2}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 (v^2 - c^2),$$

und hier ist einzusetzen:

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega} = \frac{c}{s} e^{ikv\Omega} \sin cs\Omega, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega\, \partial t} = \frac{ic}{s} e^{ikv\Omega} \cdot \sin cs\Omega \cdot kv,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \Omega^2} = c^2 e^{ikv\Omega} \operatorname{cosin} cs\Omega + \frac{ick}{s} e^{ikv\Omega} \sin cs\Omega \cdot v \quad \text{für } t < \Omega$$

$$= c^2 e^{ikv\Omega} \operatorname{cosin} cs\Omega \quad \text{für } t > \Omega.$$

Damit z. B. der Faktor von $\operatorname{cosin} cs\Omega$ beiderseits übereinstimmt, müßten wir also haben:

$$- c^2 e^{ikv\Omega} = c^2 e^{ikv\Omega}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 (v^2 - c^2),$$

und diese Bedingung ist offenbar nicht erfüllt.

Allerdings kommt es für das schließliche Resultat nicht auf die Gleichung ($41^f$) für $\varphi'$ an, sondern auf die ursprüngliche Gleichung (17) für $\varphi$, die rückwärts aus ($41^f$) zu bilden ist; es wäre möglich, daß sich die störenden Glieder bei dieser Umformung herausheben. Um die letztere vorzunehmen, multiplizieren wir in ($48^g$) beiderseits mit dem Integrale $P$, das durch (28) definiert war, und integrieren nach $k, l, m$ über den ganzen Raum, indem wir Polarkoordinaten $s, \Theta, \Psi$ einführen, so daß das Raumelement gleich:

$$s^2 \sin\Theta\, ds\, d\Theta\, d\Psi$$

wird, wobei:

$$(41^k) \qquad Sk(x + \xi_0) = R_0 s \operatorname{cosin} \Theta$$

zu setzen ist (vgl. oben S. 205). Links erhalten wir dann $D_t\varphi_\Omega$ statt $D_t\varphi'_\Omega$, wo wieder $\varphi_\Omega$ durch Gleichung (18), Seite 198 definiert sei; dabei soll $D_t\varphi_\Omega$ denjenigen Ausdruck bezeichnen, welcher aus $D\varphi_\Omega$ entsteht, wenn man in den Differentiationen nach $x, y, z$ die Größe $\Omega$ als unab-

hängig von diesen Koordinaten betrachtet. und $D\varphi_\Omega$ ist durch die linke Seite von Gleichung (19) definiert:

$$D\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - S\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} - 2S\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}\mathfrak{v}_x + SS\mathfrak{v}_x\mathfrak{v}_y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - c^2 \Delta^2 \varphi.$$

Es ist also:

$$(41^1) \qquad D\varphi_\Omega = (D_t \varphi_\Omega + D_{xyz}\varphi_\Omega),$$

wo $D_{xyz}\varphi_\Omega$ bedeutet, daß bei der Differentiation $\Omega$ als unabhängig von $t$ zu denken ist.

Auf der rechten Seite von ($41^g$) haben wir die folgenden Integrale auszuwerten:

$$(42) \qquad J_0 = \iiint e^{iSkx} P\, dk\, dl\, dm = \varrho \quad \text{für } r < a$$
$$= 0 \quad \text{für } r > a,$$

wie aus obiger Gleichung (20) sofort hervorgeht, ferner:

$$(43) \qquad J_1 = \iiint e^{iSkx} \Phi_1 P\, dk\, dl\, dm$$
$$= \int_0^\infty \frac{\sin cs\Omega}{s} ds \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \Omega}(e^{iSk(x+\xi_0)}) P \sin\Theta\, d\Theta \int_0^{2\pi} d\Psi$$

oder nach (36):

$$(44) = \frac{3\varepsilon}{4\pi^2 a^3} \frac{\partial R_0}{\partial \Omega} \int_0^\infty \frac{\sin as - as \cos as}{s^2} \sin cs\Omega \cdot ds \frac{\partial}{\partial R_0} \int_0^\pi e^{iR_0 s \cos \Theta} \sin\Theta\, d\Theta.$$

Dieses Integral $J_1$ ist oben (S. 206) bereits berechnet; der dort angegebene Wert ist aber auf den hier in Betracht kommenden Fall, wo zwischen $c\Omega$, $R_0$ und $a$ die obige Gleichung (41), nämlich:

$$a + R_0 = c\Omega,$$

erfüllt sein soll, nicht ohne weiteres anzuwenden. Weiter haben wir das Integral:

$$J_2 = \iiint e^{iSkx} \Phi_2 P \, dk \, dl \, dm$$

$$(45) = \frac{3\varepsilon c}{4\pi^2 a^3} \int_0^\infty \frac{\sin as - as \operatorname{cosin} as}{s} \operatorname{cosin} cs\Omega \, ds \int_0^\pi e^{iR_0 s \operatorname{cosin}\Theta} \sin\Theta \, d\Theta$$

$$= \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3 R_0} \int_0^\infty \frac{\sin as - as \operatorname{cosin} as}{s^2} \operatorname{cosin} cs\Omega \cdot \sin R_0 s \cdot ds.$$

Auch dieses schon oben a. a. O. behandelte Integral muß für den Fall, daß die Gleichung (41) besteht, von neuem ausgewertet werden. Endlich haben wir:

$$J_3 = \iiint e^{iSkx} \Phi_3 P \, dk \, dl \, dm$$

$$(46) = \frac{3\varepsilon}{4\pi^2 a^3} \int_0^\infty \frac{\sin as - as \operatorname{cosin} as}{s^2} \sin cs\Omega \, ds \int_0^\pi e^{iR_0 s \operatorname{cosin}\Theta} \sin\Theta \, d\Theta$$

$$= \frac{3\varepsilon}{2\pi^2 a^3 R_0} \int_0^\infty \frac{\sin as - as \operatorname{cosin} as}{s^3} \sin cs\Omega \sin R_0 s \, ds.$$

Offenbar ist:

$$(46^a) \qquad J_3 = \frac{3\varepsilon}{2\pi^2 a^3 R_0} S_0,$$

wenn $S_0$ wieder das in § 4 meiner ersten Abhandlung eingehend behandelte Integral bezeichnet, falls man dort $\alpha, \beta, \gamma$ (wobei $\alpha > \beta > \gamma$) bzw. durch $c\Omega$, $R_0$, $a$ ersetzt. Nach Gleichung (40) a. a. O.[1]) hat $S_0$ hier den Wert $\frac{\pi}{2}\beta\gamma$; also ist:

$$(47) \qquad J_3 = \frac{3\varepsilon}{4\pi a^2}.$$

---

[1]) Es ist nämlich dort die rechte Seite:

$$= -\frac{\pi}{16}\left(\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2 - 2\alpha(\delta_1 + \delta_2 - \delta_3)\right)$$

wenn $\delta_1 = \alpha + \beta - \gamma$, $\delta_2 = \alpha - \beta + \gamma$, $\delta_4 = \alpha + \beta + \gamma$ gesetzt wird, also gleich: $\frac{\pi}{2}\beta\gamma$.

Nach Einführung dieser Integrale finden wir für $\varphi_\Omega$ durch die angegebenen Prozesse die Relation:

$$(48)\quad D_t\,\varphi_\Omega = c^2 J_0 + c\left(1 - \frac{d\,\Omega}{d\,t}\right)^2 J_1 \quad c\left[1 - \left(\frac{d\,\Omega}{d\,t}\right)^2\right] J_2 + \frac{3\,\varepsilon\,c}{4\,\pi\,a^2}\,\frac{d^2\,\Omega}{d\,t^2},$$

wo $J_0$ durch obige Gleichung (42) gegeben ist, und wo $J_1$ und $J_2$ nun noch ausgewertet werden müssen.

Führen wir in (43) die Integration nach $\Theta$ aus, so wird:

$$(49)\quad \begin{aligned} J_1 &= \frac{-3\,\varepsilon}{2\pi^2 a^3 R_0^2}\frac{\partial R_0}{\partial\,\Omega}\int_0^\infty \frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^3}(\sin R_0 s - R_0 s \operatorname{cosin} R_0 s)\sin c s\,\Omega\,d s \\ &= \frac{-3\,\varepsilon}{2\pi^2 a^3 R_0^2}\frac{\partial R_0}{\partial\,\Omega}(L_1 - a\,L_2 - R_0 L_3 + a\,R_0 L_4), \end{aligned}$$

wo $L_1$, $L_2$, $L_3$, $L_4$ folgende Integrale bedeuten. Es ist:

$$L_1 = \int_0^\infty \frac{\sin a\,s \sin R_0 s \sin c\,s\,\Omega}{s^3}\,d\,s;$$

dieses Integral wurde in § 4 meiner ersten Abhandlung (in den Denkschriften der Akademie) mit $J_0$ bezeichnet; ersetzt man die dort (in den Gleichungen auf Seite 247) vorkommenden Größen $\alpha\,(= \beta + \gamma)$, $\beta$, $\gamma$ bzw. durch $c\,\Omega$, $R_0$, $a$, so wird:

$$(50)\qquad L_1 = \frac{\pi}{2}\,\beta\,\gamma = \frac{\pi}{2}\,a\,R_0.$$

Ferner haben wir:

$$L_2 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{cosin} a\,s \cdot \sin R_0 s \cdot \sin c\,s\,\Omega}{s^2}\,d\,s.$$

Nach Gleichung (38), Seite 246 der genannten Abhandlung ist dies Integral gleich:

$$-\frac{\pi}{8}\,(\delta_1\,\varepsilon_1 + \delta_2\,\varepsilon_2 - \delta_3\,\varepsilon_3 - \delta_4\,\varepsilon_4),$$

wenn die Größen $\delta_i$ durch die Gleichungen:

$$\delta_1 = a + R_0 - c\,\Omega,\quad \delta_2 = a - R_0 + c\,\Omega$$
$$\delta_3 = a + R_0 + c\,\Omega,\quad \delta_4 = a - R_0 - c\,\Omega$$

definiert werden, und $\varepsilon_i = +1$ oder $= -1$ ist, je nachdem $\delta_i > 0$ oder $< 0$ ist; in unserem Falle ist $\delta_1 = 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$, $\delta_4 < 0$; also:

$$(51)\quad \begin{aligned} L_2 &= -\frac{\pi}{8}\left[(a - R_0 + c\,\Omega) - (a + R_0 + c\,\Omega) + (a - R_0 - c\,\Omega)\right] \\ &= -\frac{\pi}{8}(a - 3\,R_0 - c\,\Omega) = \frac{\pi}{2}\,R_0. \end{aligned}$$

Das Integral:

$$L_3 = \int_0^\infty \frac{\sin a\,s \cdot \operatorname{cosin} R_0 s \cdot \sin c\,s\,\Omega}{s^2}\,d\,s$$

wird durch dieselbe Formel gewonnen, wenn man $a$ und $R_0$ vertauscht; d. h. es ist:

$$(52)\qquad L_3 = -\frac{\pi}{8}(R_0 - 3\,a - c\,\Omega) = \frac{\pi}{2}\,a.$$

Das letzte Glied von (49) endlich enthält das Integral:

$$\begin{aligned} L_4 &= \int_0^\infty \frac{\operatorname{cosin} a\,s \cdot \operatorname{cosin} R_0\,s \cdot \sin c\,s\,\Omega}{s}\,d\,s \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \operatorname{cosin}(a + R_0)s \cdot \sin c s \Omega \frac{d\,s}{s} + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \operatorname{cosin}(R_0 - a)s \cdot \sin c s \Omega \frac{d\,s}{s}; \end{aligned}$$

der Wert ist unmittelbar durch den Dirichletschen Diskontinuitätsfaktor gegeben; das erste Glied der rechten Seite ist wegen der Gleichung $a + R_0 = c\,\Omega$ gleich $\frac{\pi}{8}$, und das zweite Glied hat, da $c\,\Omega = a + R_0 > R_0 - a$ ist, den Wert $\frac{\pi}{4}$; wir haben demnach:

$$(53)\qquad L_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{3\,\pi}{8}.$$

Setzen wir die gefundenen Werte (50), (51), (52), (53) in (49) ein, so ergibt sich:

$$(54)\quad \begin{aligned} J_1 &= -\frac{3\varepsilon}{2\pi^2 a^3 R_0^2}\frac{\partial R_0}{\partial \Omega}\left(\frac{\pi}{2}R_0 a - \frac{\pi}{2}R_0 a - \frac{\pi}{2}R_0 a + \frac{3\pi}{8}R_0 a\right) \\ &= \frac{3\varepsilon}{16\pi^2 a^3 R_0^2}\frac{\partial R_0}{\partial \Omega}. \end{aligned}$$ [1]

Endlich kommen wir zum Integrale $J_2$, das durch (45) definiert war; die möglichen Werte desselben sind oben auf Seite 207 zusammengestellt; der hier auftretende Grenzfall ($c\Omega = a + R_0$) ist aber dort nicht berücksichtigt; wir hatten indessen:

$$\begin{aligned} J_2 = \frac{3\varepsilon c}{4\pi^2 a^3 R_0} & [P(a, R_0 + c\Omega) + P(a, R_0 - c\Omega) \\ & - a P_1(a, R_0 + c\Omega) - a P_1(a, R_0 - c\Omega)], \end{aligned}$$

und hier bezeichneten $P$ und $P_1$ zwei Integrale, die durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} -P(a, -\beta) = P(a, \beta) &= \frac{\pi}{2}\beta && \text{für } a > \beta, \\ &= \frac{\pi}{2}a && \text{„} \quad a < \beta, \\ &= \frac{\pi}{2}a = \frac{\pi}{2}\beta && \text{„} \quad a = \beta, \\ -P_1(a, -\beta) = P_1(a, \beta) &= 0 && \text{„} \quad a > \beta, \\ &= \frac{\pi}{4} && \text{„} \quad a = \beta, \\ &= \frac{\pi}{2} && \text{„} \quad a < \beta \end{aligned}$$

bestimmt waren. Wir erhalten demnach:

$$(55)\quad \begin{aligned} J_2 &= \frac{3\varepsilon c}{4\pi^2 a^3 R_0}\left[\frac{\pi}{2}a - \frac{\pi}{2}a - \frac{\pi}{2}a + \frac{\pi}{4}a\right] \\ &= -\frac{3\varepsilon}{16\pi a^2}\frac{c}{R_0}, \end{aligned}$$

[1] Hier und im folgenden ist natürlich der Differentialquotient $\frac{\partial R_0}{\partial \Omega}$ rein formal zu bilden, d. h. ohne daß dabei die Relation $c\Omega = R_0 + a$ berücksichtigt würde.

also gleich dem arithmetischen Mittel zwischen den obigen Werten (40) und ($40^b$), Seite 208.

Unter Benutzung der in (54) und (55) aufgestellten Werte von $J_1$ und $J_2$ erhalten wir aus (48) die folgende partielle Relation, welche aber zufolge der Bedeutung von $D_t \varphi_\Omega$ nicht als Differentialgleichung aufgefaßt werden kann:

$$(56)\quad \begin{aligned} D_t \varphi_\Omega = c^2 J_0 &+ \frac{3 \varepsilon c}{16 \pi a^2 R_0} \frac{\partial R_0}{\partial \Omega} \left(1 - \frac{d\Omega}{dt}\right)^2 \\ &+ \frac{3 \varepsilon c^2}{16 \pi a^2 R_0} \left[1 - \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2\right] + \frac{3 \varepsilon c}{4 \pi a^2} \frac{d^2 \Omega}{dt^2}, \end{aligned}$$

wo $J_0$ durch $\varrho$ oder durch Null zu ersetzen ist, je nachdem es sich um einen Punkt innerhalb oder außerhalb des Elektrons handelt.

Dieser Gleichung genügt die Funktion:

$$\varphi_\Omega = \frac{3 \varepsilon c}{2 \pi^2 a^3} \int_0^\Omega \frac{S}{R} \, d\tau,$$

wenn man $\Omega$ als eine Funktion von $t$ (nicht als Funktion von $x, y, z$) betrachtet, welche durch obige Gleichung (41) definiert ist; Gleichung (56) besteht folglich auch für das Integral:

$$(56^a)\quad \varphi_\infty = \frac{3 \varepsilon c}{2 \pi^2 a^3} \int_0^\infty \frac{S}{R} \, d\tau = \varphi_\Omega,$$

da dasselbe mit $\varphi_\Omega$ vollkommen identisch ist.

Gemäß ($41^b$) hätten wir auch $D_{xyz} \varphi_\Omega$ in entsprechender Weise umzuformen, d. h. mit $P e^{i S k x}$ zu multiplizieren und nach $k, l, m$ über den ganzen Raum zu integrieren. Nach ($41^c$) sind dabei folgende Integrale zu bilden. Zunächst:

$$\iiint e^{iSkx} \frac{\partial F}{\partial \Omega} dk\, dl\, dm = c \iiint e^{iSk(x+\xi_0)} \frac{\sin c s \Omega}{s} P\, dk\, dl\, dm$$

$$(57^a) \quad = \frac{3\varepsilon c}{8a^3\pi^3} \iiint \frac{\sin as - as \operatorname{cosin} as}{s^3} e^{iSk(x+\xi_0)} \frac{\sin c s \Omega}{s} dk\, dl\, dm$$

$$= \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3} \frac{S}{R_0} \quad \text{nach (28) und (29), Seite 201:[1])}$$

wenn $S$ das Integral bezeichnet, dessen Werte oben in (3), (4) und (5) angegeben sind, falls man dort $\tau$ durch $\Omega$, $R$ durch $R_0$ ersetzt; und zwar hat man, da hier $c\Omega - R_0 = a$ ist:

$$S = 0,$$

und zwar sowohl aus (3), als aus (5). Nach ($41^c$) ist ferner zu bilden:

$$J_{4x} = \iiint e^{iSkx} \cdot k \cdot \frac{\partial F}{\partial \Omega} \cdot P \cdot dk\, dl\, dm.$$

Auf dasselbe wird man durch Differentiation des Integrals ($57^a$) geführt. Wir haben:

$$(57^b) \qquad \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S}{R_0}\right)$$

$$= i J_{4x} + c \iiint e^{iSk(x+\xi_0)} \operatorname{cosin} c s \Omega \cdot P \cdot dk\, dl\, dm \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$= i J_{4x} + \frac{3\varepsilon c^2}{2\pi^2 a^3 R_0} \int_0^\infty \frac{\sin as - as \operatorname{cosin} as}{s^2} \cdot \sin R_0 s \cdot \operatorname{cosin} c s \Omega \cdot ds \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x}.$$

Das hier rechts an zweiter Stelle stehende Integral ist aber mit dem oben auf Seite (205) behandelten Integrale $J_2$ identisch; wir erhalten also:

$$(57^c) \qquad i J_{4x} = \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S}{R_0}\right) - J_2\, c \frac{\partial \Omega}{\partial x}.$$

In unserem Falle ($c\Omega = R_0 + a$) war $S = 0$; somit wird:

---

[1]) Daselbst ist in der Gleichung, welche (29) vorangeht, der Buchstabe $x$ im Exponenten von $e$ durch $x + \xi_0$ zu ersetzen.

$$i J_{4x} = - J_2 c \frac{\partial \Omega}{\partial x},$$

oder nach (55):

$$J_{4x} = \frac{-3 \varepsilon c^2 i}{16 \pi a^2 R_0} \frac{\partial \Omega}{\partial x}. \tag{58}$$

Ferner ist auf der rechten Seite von ($41^c$) zu bilden:

$$\begin{aligned} J_5 &= \int\int\int e^{iSkx} \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega \, \partial t} P \, dk \, dl \, dm \\ &= i (J_{4x} \mathfrak{v}_x + J_{4y} \mathfrak{v}_y + J_{4z} \mathfrak{v}_z) = \frac{3 \varepsilon c^2}{16 \pi a^2 R_0} S \frac{\partial \Omega}{\partial x} \mathfrak{v}_x (t). \end{aligned} \tag{59}$$

Endlich kommt es noch auf folgendes Integral an:

$$\begin{aligned} J_6 &= \int\int\int e^{iSkx} \frac{\partial^2 F}{\partial \Omega^2} P \, dk \, dl \, dm \\ &= J_7 + i S J_{4x} \frac{\partial \xi_0}{\partial \Omega} = J_7 + \frac{3 \varepsilon c^2}{16 \pi a^2 R_0} S \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \xi_0}{\partial \Omega}, \end{aligned} \tag{60}$$

wobei das oben im Anschlusse an ($41^e$) Gesagte zu berücksichtigen ist; hier haben wir:

$$\begin{aligned} J_7 &= c^2 \int\int\int e^{iSk(x+\xi_0)} \operatorname{cosin} c s \Omega \cdot P \cdot dk \, dl \, dm \\ &= \frac{3 \varepsilon c^2}{8 a^3 \pi^3} \int_0^\infty \frac{\sin as - as \cdot \operatorname{cosin} as}{s} \operatorname{cosin} c s \Omega \cdot ds \int_0^\pi e^{isR_0 \operatorname{cosin} \Theta} \sin \Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\Psi \\ &= \frac{3 \varepsilon c^2}{2 \pi^2 a^3 R_0} \int_0^\infty \frac{\sin as - as \operatorname{cosin} as}{s^2} \operatorname{cosin} c s \Omega \cdot \sin R_0 s \cdot ds. \end{aligned}$$

Rechts steht das in (45) eingeführte und in (55) ausgewertete Integral $J_2$; es wird also:

$$J_6 = - \frac{3 \varepsilon c^2}{16 \pi a^2 R_0} + \frac{3 \varepsilon c^2}{16 \pi a^2 R_0} S \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \xi_0}{\partial \Omega}. \tag{61}$$

Durch Einsetzen der hier berechneten Werte für die Integrale $J_3$, $J_{4x}$, $J_5$, $J_6$ erhalten wir aus ($41^c$):

$$D_{xyz} \varphi_\Omega = \frac{3 \varepsilon c^2}{16 \pi a^2 R_0} \left[ \left( S \mathfrak{v}_x \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 - c^2 S \left( \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 \right] \left[ S \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \xi_0}{\partial \Omega} - 1 \right]. \tag{62}$$

Da nun nach (41[1]) $D\varphi_\Omega$ sich aus den Termen $D_t\varphi_\Omega$ und $D_{xyz}\varphi_\Omega$ zusammensetzt, diese einzelnen Ausdrücke aber durch (56) und (62) gegeben sind, so erhalten wir folgendes Resultat:

Wird $\Omega$ durch die Gleichung (41) als Funktion von $x, y, z$ und $t$ definiert, so genügt die Funktion:

$$\varphi_\Omega = \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3 R_0} \int_0^\infty \frac{\sin as - as \operatorname{cosin} as}{s^3} \int_0^\Omega \frac{\sin Rs}{R} \sin cs\tau \, d\tau \tag{63}$$

der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{16\pi a^2}{3\varepsilon c} D\varphi_\Omega = {} & \frac{16\pi a^2 c}{3\varepsilon} J_0 + \frac{1}{R_0}\frac{\partial R_0}{\partial \Omega}\left(1 - \frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)^2 \\ & + \frac{c}{R_0}\left[1 - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)^2\right] + 4\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} \\ & + \frac{c}{R_0}\left[\left(S\, \mathfrak{v}_x \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 - c^2 S\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2\right]\left[S\frac{\partial \Omega}{\partial x}\frac{\partial \xi_0}{\partial \Omega} - 1\right], \end{aligned} \tag{64}$$

wo $J_0$ im Innern des Elektrons durch $\varrho$, außerhalb desselben durch Null zu ersetzen ist. Man kann die rechte Seite noch weiter ausführen, indem man den Differentialquotient von $R_0$ nach $\Omega$ auswertet, es ist:

$$\frac{\partial R_0}{\partial \Omega} = \frac{1}{R_0} S(x + \xi_0)\frac{\partial \xi_0}{\partial \Omega} = \frac{1}{R_0} S(x + \xi_0)\, \mathfrak{v}_x(t - \Omega),$$

denn diese Differentiation war rein formal (d. h. ohne Rücksicht auf die Gleichung (41)) auszuführen. Ferner ist, da $\Omega$ durch (41) definiert wird:

$$c\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial R_0}{\partial x} = \frac{x + \xi_0}{R_0},$$

$$c\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\partial R_0}{\partial t} = \frac{1}{R_0} S(x + \xi_0)\left[\mathfrak{v}_x(t) - \mathfrak{v}_x(t - \Omega)\cdot\left(1 - \frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)\right],$$

woraus $\frac{\partial \Omega}{\partial t}$ zu berechnen ist; der zweite Differentialquotient von $\Omega$ nach $t$ enthält die derivierten Funktionen $\mathfrak{v}_x'(t)$, $\mathfrak{v}_y'(t)$, $\mathfrak{v}_z'(t)$; schon hieraus geht hervor, daß sich die rechte Seite von

(64) nicht identisch auf das erste Glied ($J_0$) reduzieren kann. Die zuletzt angeführten Gleichungen vereinfachen sich wesentlich, wenn $\Omega > t$ ist, denn dann ist, gemäß der oben im Anschlusse an Gleichung (41[e]) gemachten Bemerkung, $\mathfrak{v}_x(t-\Omega)=0$.

Wir wollen jetzt in den vorstehenden Rechnungen die Funktion $\Omega$ durch eine beliebige Funktion $\omega$ von $x, y, z, t$ ersetzen, also durch eine Funktion, die nicht durch die Gleichung (41) definiert wird. Die Gleichungen (41[f]), (41[g]), (41[h]) bleiben dann unverändert gültig, wenn man in ihnen $\Omega$ durch $\omega$ ersetzt.

Die über die Funktionen $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$ zu erstreckenden Integrale haben jetzt andere Werte als früher. Nach obiger Gleichung (39), Seite 206 und nach Gleichung (43) ist:

$$J_1 = -\frac{3\,\varepsilon}{16\,\pi^2}\,\frac{a^2 + R_0^2 - c^2\,\omega^2}{a^3\,R_0^2}\,\frac{\partial R_0}{\partial \omega},^{1)}$$

wo $R_0^2 = (x+\xi_0)^2 + (y+\eta_0)^2 + (z+\zeta_0)^2$ nach (36) von $\omega$ abhängt. Dagegen wird:

$$J_1 = 0,$$

wenn sich aus den genannten drei Strecken kein Dreieck bilden läßt.

Für das Integral $J_2$ haben wir die obigen Gleichungen (40), (40[a]), (40[b]) anzuwenden. Das Integral $J_3$ ist durch (46[a]) bestimmt, wo für $S_0$ der Wert aus den früheren Gleichungen (3), (4), (5), Seite 183 einzusetzen ist. Es ist ferner $J_{4x}$ gemäß (57[c]) leicht zu berechnen, indem man den Wert von $S$ aus den Gleichungen (3), (4) und (5) einsetzt.

Nach (59) wird also:

$$J_5 = \frac{3\,\varepsilon\,c}{2\,\pi^2\,a^3}\,S\,\mathfrak{v}_x\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S}{R_0}\right) - c\,J_2\,S\,\mathfrak{v}_x\,\frac{\partial \Omega}{\partial x},$$

---

[1]) Man findet diesen Wert auch nach der in (49) gegebenen Zerlegung mittels der Integrale $L_1, L_2, L_3, L_4$, wenn man dieselben nach den Formeln meiner früheren Abhandlung ohne Rücksicht auf die Relation $c\,\Omega = a + R_0$ auswertet. Die Annahme $R_0 + a = c\,\Omega$ ($= c\,\omega$) gibt dann das Doppelte des oben in (54) benutzten Wertes.

wo wieder für $S$ die drei verschiedenen Möglichkeiten zu berücksichtigen sind; endlich nach (60):

$$J_6 = c J_2 + i S J_{4x} \frac{\partial \xi_0}{\partial \Omega} = c J_2 + \frac{3 \varepsilon c}{2 \pi^2 a^3} S \frac{\partial \xi_0}{\partial \Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{S}{R_0} \right) - c J_2 S \frac{\partial \xi_0}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x}.$$

Mit Hilfe dieser Formeln findet man leicht für die Funktion $\varphi_\omega$, wo $\omega$ eine willkürliche Funktion von $x$, $y$, $z$ und $t$ bezeichnet, eine zu (64) analoge Differentialgleichung, in der aber die Koeffizienten der verschiedenen partiellen Differentialquotienten von $\omega$ jetzt andere Werte haben, als früher, wo $\Omega$ an Stelle von $\omega$ stand. Die nähere Ausführung der Rechnung bietet kaum Interesse; für unseren obigen Fall: $\omega = t + t_0$ erhalten wir die ursprüngliche Differentialgleichung wieder:

$$D \varphi_{t+t_0} = c^2 J_0, \tag{66}$$

wo nach (42): $J_0 = \varrho$ für $r < a$ und $J_0 = 0$ für $r > a$ zu setzen ist.

Besonderes Interesse verdient der dritte Fall, wo sämtliche Integrale $J_1, J_2, \ldots J_6$ gleich Null werden. Dann hätten wir eine Lösung der Differentialgleichung (66) gefunden, welche eine willkürliche Funktion $\omega$ der vier Variabeln $x, y, z, t$ enthält, was eine Unmöglichkeit involviert. Dies wird durch die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^3} \, ds \int_0^\omega \frac{\sin R s}{R} \sin c s \tau \, d\tau$$

$$= \int_0^\omega d\tau \int_0^\infty \frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^3} \sin R s \sin c s \tau \, ds$$

aufgeklärt.

Wir wissen, daß im dritten Falle (wo das Dreieck dadurch unmöglich wird, daß $a$ zu klein ist) die Gleichung besteht (indem $\omega > \Omega$):

$$\varphi_\omega = \varphi_\Omega.$$

Im dritten Falle dürfen daher die Differentialquotienten von $\varphi_\omega$ nicht rein formal so gebildet

werden, wie es oben geschah, sondern $\varphi_\omega$ ist tatsächlich für diesen Fall (d. h. für $\omega > R_0 + a$) von der willkürlichen Funktion ganz unabhängig und enthält nur die durch (41) definierte Funktion $\Omega$, so daß hier die Funktion $\varphi_\Omega = \varphi_\omega$ der obigen Gleichung (64), und nicht der Gleichung (66) genügt.

Diese Überlegung ist insbesondere auf die spezielle Funktion $\varphi_{t+t_0}$ anwendbar, welche den Entwicklungen meiner beiden größeren Abhandlungen zu Grunde lag:

Auch das Integral (29), d. h.:

$$\varphi_{t+t_0} = \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3}\int\limits_0^{t+t_0} \frac{S}{R}\, d\tau$$

genügt für $t + t_0 > \Omega$ nicht der Gleichung (66), sondern der Gleichung (64).

Es könnte jetzt scheinen, als ob damit ein Teil meiner früheren Untersuchungen hinfällig würde. Dem ist aber nicht so, sondern durch die Integration über das Innere des Elektrons (nach den Variabeln $x, y, z$) wird diese scheinbare Störung wieder aufgehoben.

Die Gleichung (42) stellt eine Kugel dar, deren Mittelpunkt an der Stelle $-\xi_0, -\eta_0, -\zeta_0$ liegt, und deren Radius gleich $c\,\Omega - a$ ist; wir nehmen $t_0 = 0$ an (wie bei meiner „ersten Voraussetzung über den Anfangszustand"). Für unsere jetzige Annahme ist $\xi_0 = \xi$ für $\tau = t$, denn die untere Grenze der betreffenden Integrale kann gleich Null genommen werden, wenn $t > \Omega$ ist (vgl. die obige im Anschlusse an ($41^e$) gemachte Bemerkung). Betrachten wir zunächst die Kugel mit dem Radius $ct - a$, so hat diese demnach denselben Mittelpunkt wie die Kugel mit dem Radius $c\,\Omega - a$, aber sie hat größeren Radius; ferner kommen für Unterlichtgeschwindigkeit nach meinen allgemeinen Entwicklungen nur solche Werte von $t$ in Betracht, für die $t < t'$ ist, wenn $t'$ durch die Gleichung:

($66^a$) $$ct' - a = (T)_{t=t'} + a$$

bestimmt wird, und für die dann:

(66^b) $$ct - a < T + a$$

ist. Für $t = t'$ berührt die Kugel mit dem Radius $c\,t' - a$ gerade das Elektron so, daß sie dasselbe ganz umschließt; für $t < t'$ schneidet also die Kugel mit dem Radius $c\,t - a$ das Elektron und teilt es in zwei Teile:[1]) in dem einen liegen Punkte $x, y, z$, für welche die durch (41) bestimmte Funktion $\Omega$ kleiner als $t$ wird (in dem anderen würde sich $\Omega > t$ ergeben, so daß hier keine Schwierigkeit für uns eintritt; hier ist aber der Mittelpunkt der Kugel mit $\Omega$ veränderlich).

Bei Berechnung der Kraftkomponenten, d. h. der Integrale:

(67) $$P_x = \int\!\!\int\!\!\int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx\, dy\, dz$$ (und der analogen $P_y$, $P_z$),

ist ursprünglich zuerst nach $\tau$ zwischen 0 und $\Omega$ zu integrieren, und dann nach $x, y, z$ über das Innere des Elektrons, wobei $\Omega$ eine Funktion von $x, y, z$ (und $t$) ist. Wird nun die Integrationsordnung vertauscht und die Integration nach $\tau$ zuletzt ausgeführt, so wird die obere Grenze $\Omega$ durch den größten Wert zu ersetzen sein, den sie im Innern des betreffenden Kugelteiles (des Elektrons, wo $\Omega < t$) annimmt; dieser Wert aber ist der Definition nach gerade der Wert $\Omega = t$. Wir haben also in dem einen Teile der das Elektron darstellenden Kugel (wo $\Omega > t$ ist):

(68) $$P_x = \int\!\!\int\!\!\int dx\, dy\, dz \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \frac{S}{R}\, d\tau = \int_0^t d\tau \int\!\!\int\!\!\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S}{R}\right) dx\, dy\, dz,$$

und in dem anderen Teile (wo $\Omega < t$):

---

[1]) Dies gilt für $\Omega < t < t'$; für $t = t'$ berührt die Kugel mit dem Radius $c\,t' - a$ das Elektron gerade und für $t > t'$ schneidet sie dasselbe nicht mehr, so dass dann in der ganzen Kugel des Elektrons $\Omega < t$ ist. Ist die Geschwindigkeit nicht konstant, so können sich diese Verhältnisse im Laufe der Bewegung natürlich mehrmals ändern.

$$(69)\quad P_x = \iiint dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^{\Omega}\frac{S}{R}\,d\tau = \int\limits_0^{t} d\tau \iiint \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S}{R}\right) dx\,dy\,dz.$$

Im ganzen Innern des Elektrons gilt also für die Komponente $P_x$ dieselbe Formel, wenn die Integration nach $\tau$ zuletzt ausgeführt wird; und dies ist diejenige Formel, die in meinen Abhandlungen der Berechnung der Kräfte zu Grunde gelegt wurde. Hier könnte es scheinen, als ob die Berechnung der Kräfte in dieser Weise unzulässig sei, da in Gleichung (69) eine Potentialfunktion benutzt ward, die der definierenden Differentialgleichung nicht genügt (wegen der oberen Grenze $\Omega$ statt $t$).

Um dies aufzuklären, müssen wir auf die ursprüngliche Bedeutung der zu Grunde liegenden Differentialgleichung (66) oder in ursprünglichen Koordinaten $x'$, $y'$, $z'$ der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2}\right) = c^2 \varrho \quad \text{für } r < a$$

$$= 0 \qquad \text{,,}\ \ r > a$$

zurückgehen. Ihr Integral gibt das Potential für die Wirkung eines Körpers auf einen Punkt $x$, $y$, $z$ während einer gewissen Zeitdauer; der wirkende Körper ist für unser Problem das bewegte Elektron in seinen früheren Lagen. Ist nun $t < \Omega$, so setzt sich diese Wirkung aus den einzelnen Wirkungen zusammen, die in der Zeit von $\tau = t$ bis $\tau = 0$ (die Zeit $\tau$ wird rückwärts gerechnet) sich summiert haben, und zwar für jeden Punkt $x$, $y$, $z$ im Innern des bewegten Elektrons; die Lösung der Differentialgleichung erscheint deshalb als ein zwischen den Grenzen $\tau = 0$ und $\tau = t$ genommenes bestimmtes Integral mit der Integrationsvariabeln $\tau$. Ist aber $t > \Omega$, so wird das Elektron durch die Kugel mit dem Radius $ct - a$ in der oben besprochenen Weise in zwei Teile zerlegt; in dem einen gilt die vorstehende Überlegung unverändert, in dem anderen (mit der Bedingung $ct > \Omega$) kommen bei Unterlichtgeschwindigkeit nur die Wirkungen zur Geltung, welche in der Zeit von $\tau = 0$ bis $\tau = \Omega$ von den früheren Lagen des Elektrons ausgegangen

sind: die später ausgegangenen Wirkungen (eigentlich, da $\tau$ rückwärts gemessen wird: die früher ausgegangenen Wirkungen) sind schon mit Lichtgeschwindigkeit über das Elektron hinweggeeilt. Hier kommt also für Berechnung des Potentials nicht die Variable $t$ zur Messung der für die Punkte $x, y, z$ wirksamen Zeit in Betracht: infolgedessen kann überhaupt nicht verlangt werden, daß für diese Punkte $x, y, z$ das zugehörige Potential $\varphi$ der partiellen Gleichung (66) genüge, und deshalb ist es hier erlaubt, mit der Potentialfunktion (69) zu rechnen, wie ich es in meinen Abhandlungen getan habe. Wir können das Resultat dieser Überlegung in folgender Weise aussprechen:

Man lege um den Punkt, in welchem sich der Mittelpunkt des Elektrons zur Zeit $\tau = t$ (d. h. zu Beginn der Bewegung) befand, eine Kugel mit dem Radius $ct - a$; liegt der Punkt $x, y, z$ innerhalb dieser Kugel, so gilt für ihn die Potentialfunktion $\varphi_t$, welche der partiellen Differentialgleichung (66) genügt; liegt aber der Punkt $x, y, z$ außerhalb jener Kugel, so ist die Potentialfunktion $\varphi_\Omega$ anzuwenden, welche der genannten Differentialgleichung nicht genügt. Dies gilt zunächst[1]) für die Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit ($c\tau > T$) bei der „ersten Annahme über den Anfangszustand“. Man kann dasselbe auch folgendermaßen aussprechen:

In (69) bedeutet $t$ die Dauer der Bewegung (und kommt deshalb in $R$ vor zur Bestimmung der jeweiligen Lage des Punktes $x, y, z$), $\Omega$ die Zeit, während welcher die früheren Lagen des Elektrons auf den bewegten Punkt $x, y, z$ einen

[1]) Für die „zweite Annahme über den Anfangszustand“ ist leicht eine entsprechende Überlegung anzustellen. — Für Überlichtgeschwindigkeit ist stets $c\tau < T$, also $ct < T_{\tau=t}$, andererseits $a + R > T$; folglich kann die Gleichung $c\,\Omega = a + R_0$ nur Lösungen zulassen, die der Bedingung $\Omega > t$ genügen und somit nicht in Betracht kommen. Hier aber kann die Gleichung $c\,\Omega = R_0 - a$ Lösungen besitzen, die zu analogen Überlegungen Veranlassung geben, wie sie im Texte für $c\tau > T$ angestellt wurden.

Einfluß ausüben; fallen beide Zeiten zusammen, so gilt die partielle Differentialgleichung (66); fallen sie nicht zusammen, so kann die Potentialfunktion durch diese Gleichung nicht mehr definiert werden.

Der Unterschied der von mir angewandten Methode gegen die sonst übliche Methode besteht also darin, daß von Abraham, Sommerfeld und anderen die Funktion $\varphi_\Omega$ für alle Werte von $t$ zu Grunde gelegt wird, während dies nur für $t > \Omega$ gestattet ist. Hieraus folgt aber nicht, daß die mit der Funktion $\varphi_\Omega = \varphi_\infty$ in üblicher Weise gewonnenen Resultate wenigstens für den stationären Zustand mit den unseren übereinstimmen müßten, wie wir weiterhin zeigen werden. Von den genannten Forschern wird nämlich richtig $\varphi_\Omega = \varphi_\infty$ gesetzt, dann ist also:

$$
(70)\quad
\begin{aligned}
P_x &= \iiint dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial x}\varphi_\Omega = \iiint dx\,dy\,dz\,\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{S}{R}\,d\tau \\
&= \iiint dx\,dy\,dz \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S}{R}\right) d\tau.
\end{aligned}
$$

Nun wird aber weiter die rechte Seite durch:

$$
(70)\qquad \int_0^\infty d\tau \iiint \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S}{R}\right) dx\,dy\,dz
$$

ersetzt, während sie (da die obere Grenze $\infty$ eigentlich durch $\Omega$ zu ersetzen ist) für $t < \Omega$ gleich der rechten Seite von (69) zu setzen ist, und nur für $t > t'$ gleich:

$$
\int_0^{t'} d\tau \iiint \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S}{R}\right) dx\,dy\,dz,
$$

wenn $t'$ die kleinste „brauchbare" Wurzel der obigen Gleichung (66[a]) bezeichnet.

Bei Sommerfeld wird der Ausdruck (70) durch die Annahme $t_0 = \infty$ gewonnen, was deshalb nicht gestattet ist, weil

diese Annahme bei der ganzen Ableitung der Formeln ausgeschlossen werden mußte und somit nicht nachträglich eingeführt werden kann (vgl. oben S. 197). Wenn man sicher gehen will, müssen zuerst alle Berechnungen für ein endliches $t_0$ ausgeführt und dann der Grenzübergang $t_0 = \infty$ gemacht werden; letzterer wird bei stätionärer Bewegung indessen ganz überflüssig, weil hier die Bewegung schon nach endlicher Zeit stationär geworden ist (vgl. meine zweite Abhandlung).

Bei Abraham wird die Funktion $\varphi_{t+t_0}$ nicht aus dem Grunde durch die Funktion $\varphi_\infty$ ersetzt, weil letztere ebenfalls als Lösung der Gleichung ($57^b$) aufzufassen sei, sondern deshalb, weil die Annahme $t_0 = \infty$ der Vorstellung entspricht, daß der Beginn der Bewegung unendlich weit zurückliege. Diese Überlegung wäre berechtigt, wenn der Funktion $\varphi$ eine direkte physikalische Bedeutung zukäme; tatsächlich ist sie aber nur eine mathematische Hilfsgröße; physikalische Bedeutung haben nur die vorhandenen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, also die Kräfte. Man muß deshalb zuerst diese Kräfte für einen endlichen Wert von $t_0$ berechnen und dann den Fall betrachten, daß die Kräfte seit unendlich langer Zeit wirken, d. h. dann $t_0 = \infty$ werden lassen, wie ich es in meinen Abhandlungen getan habe. Aus der Potentialtheorie ruhender Körper ist man gewohnt, das Potential selbst als eine physikalische Größe zu behandeln und mit ihm selbstständig zu operieren; im hier vorliegenden Falle aber stößt man auf einen Widerspruch, wenn man so verfährt (und das scheint mir von prinzipiellem Interesse zu sein), denn das andere, unter allen Umständen richtige Verfahren (bei dem man erst nach Berechnung der Kräfte $t_0$ gleich unendlich werden läßt) führt, wie ich gezeigt habe, auf andere Resultate.

In der Tat ergab die bisherige Methode für die magnetische und elektrische Kraft einzeln den Wert Null bei stationärer Bewegung, während sich bei mir (vgl. die zweite Abhandlung) nur ihre Summe gleich Null ergab; ferner hatte man z. B. ein Unendlichwerden der Kraft beim Übergange von Unter- zu Überlichtgeschwindigkeit gefunden, während sich

dieser Übergang nach meiner Untersuchung ohne Schwierigkeit vollzieht. Von Wichtigkeit ist es auch, daß die übliche Methode, die sich des sogenannten Heavisideschen Ellipsoids bedient (und die eben zum Nullwerden der elektrischen und magnetischen Kraft je für sich führt), als nicht zulässig erscheint. Schwierigkeiten ergaben sich ferner bei dem Versuche einer elektrodynamischen Begründung der Mechanik.

In § 16 meiner ersten Abhandlung hatte ich die Formeln so zusammengestellt, daß der Unterschied meiner Resultate gegen die Sommerfeldschen leicht zu übersehen war; er bestand, abgesehen von der Wahl der oberen Grenze $t$ (die soeben besprochen wurde), in der Vertauschung gewisser Differentiationen und Integrationen; insofern es sich hier um die Differentiation nach $x, y, z$ handelte, ist wegen der Stetigkeit der unter den Integrationszeichen stehenden Funktion innerhalb der ganzen Kugel (denn $S$ ist dort stetig, und erst die Differentialquotienten von $S$ sind unstetig) die Vertauschung der Differentiationen nach $x$ und $\xi$ in der Tat erlaubt; meine obigen Rechnungen (oben § 6, S. 193) würden dies Resultat auch ergeben, wenn man sie weiter durchführte, d. h. die verschiedenen Glieder $\delta U_i$ aus den einzelnen Teilgebieten der Kugel addierte. —

Die obige Überlegung ist natürlich nur so lange anwendbar, wie das Elektron von der Kugel mit dem Radius $ct - a$ getroffen wird; für $t = t'$, wo letzterer Wert wieder durch ($66^a$) definiert ist, tritt Berührung ein, und für $t > t'$ ist die Differentialgleichung an keiner Stelle im Innern des Elektron durch die Funktion $\varphi$ befriedigt; nur bei konstanter Geschwindigkeit, wo $t'$ von $t$ und von $x, y, z$ unabhängig ist, tritt dies noch ein. Für $t > t'$ haben wir dann den stationären Zustand.

Für diesen letzteren müßten sonach meine Resultate mit denen von Sommerfeld übereinstimmen; der Grund, weshalb dies nicht der Fall ist, muß also in der mathematischen Durchführung liegen. Schon auf Seite 327 meiner ersten Abhandlung habe ich darauf hingewiesen, daß bei der Sommerfeldschen

Auswertung der betreffenden dreifachen Integrale eine Vertauschung zweier Integrationen vorgenommen wird, die nicht ohne weiteres gestattet ist. Diese Vertauschung ergibt sich nun bei näherer Betrachtung als nicht erlaubt. Es handelt sich um das Integral (vgl. a. a. O., S. 326):

$$P_x = \int_0^{t'} d\tau \frac{\partial}{\partial \xi} \int\int\int \frac{S}{R}\, dx\, dy\, dz = \int_0^{t'} d\tau \frac{\partial}{\partial \xi} \int\int\int \chi\, dx\, dy\, dz,$$

wenn die dreifache Integration über das Innere des Elektrons erstreckt wird, und wenn $S$ wieder die obige Bedeutung hat, so daß:

$$\chi = \int_0^\infty u \cdot \frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^3} \sin c s \tau \cdot ds, \quad \text{wo } u = \frac{\sin R s}{R}.$$

zu setzen ist. Das Integral $P_x$ gibt die Komponente der elektrischen Kraft in Richtung der $x$-Achse. Es ist also das dreifache Integral:

$$W = \int\int\int \chi\, dx\, dy\, dz$$

auszuwerten, wo sich die Integration über das ganze Innere des Elektrons erstreckt. Nach der von Herrn Sommerfeld angewandten Methode wäre:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty ds \int\int\int \frac{\sin R s}{R} \frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^3} \sin c s \tau \cdot dx\, dy\, dz \\ &= \frac{4\pi}{T} Q, \end{aligned} \tag{71}$$

wo nun $Q$ das folgende Integral bezeichnet:

$$Q = \int_0^\infty \left( \frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^2} \right)^2 \sin c s \tau \cdot \sin T s \cdot \frac{ds}{s^2}.$$

Nehmen wir z. B. an, die hier vorkommende Variable $\tau$ genüge der Bedingung $\tau^0 < \tau < \tau'$, wo $\tau^0$ und $\tau'$ bzw. durch die Gleichungen:

$$c\tau + T = 2a \quad \text{und} \quad c\tau - T = 2a$$

definiert sein sollen (also dieselbe Bedeutung haben, wie in meinen früheren Abhandlungen), so ist nach Herrn Sommerfeld (Göttinger Nachrichten, 1904, S. 392):

$$(72) \qquad Q = \frac{a^2\pi}{48}\int\limits_{c\tau - T}^{2a}\left[4a\varrho - 3\varrho^2 + \frac{1}{4a^2}\varrho^4\right]d\varrho.$$

Behandelt man dagegen das Integral $W$ nach meiner direkten Methode, so ist zu beachten, daß die Ungleichung $\tau_0 < \tau < \tau'$ meiner „dritten Lage" entspricht (vgl. S. 262 und 274 meiner ersten Abhandlung), welche durch Figur 4 (vgl. oben S. 188) charakterisiert war. In dem (kleineren) horizontal chraffierten Teile des Elektrons ist $R < c\tau - a$, und somit $S = 0$; nur der andere, vertikal schraffierte Teil liefert daher einen Beitrag zum Integral, und hier ist (bei Unterlichtgeschwindigkeit):

$$c\tau - a < R < T + a < c\tau + a,$$

also $S$ durch obige Gleichung (3), Seite 183 gegeben, folglich:

$$W = \frac{\pi}{8}\int\int\int[a^2 - (c\tau - R)^2]\frac{dx\,dy\,dz}{R},$$

oder bei Benutzung von Polarkoordinaten (vgl. S. 274 meiner ersten Abhandlung):

$$W = \frac{\pi}{8}\int\limits_{c\tau - a}^{T+a} R[a^2 - (c\tau - R)^2]\,dR\int\limits_0^{\Theta_1'}\sin\Theta\,d\Theta\int\limits_0^{2\pi}d\Psi,$$

wo:

$$2RT\cos\Theta_1' = R^2 + T^2 - a^2,$$

somit:

$$W = \frac{\pi^2}{8T}\int\limits_{c\tau - a}^{T+a}[a^2 - (c\tau - R)^2]\,[a^2 - (T - R)^2]\,dR.$$

oder, wenn $\varrho = c\tau - R + a$ gesetzt wird:

$$W = \frac{\pi^2}{8\,T}\int\limits_{c\tau - T}^{2a}[a^2 - (\varrho - a)^2]\,[a^2 - (\varrho + T - c\tau - a)^2]\,d\varrho,$$

und dieser Wert ist von dem obigen, wie er sich aus (71) und (72) ergibt vollständig verschieden. Die Vertauschung der räumlichen Integration nach $x$, $y$, $z$ mit der Integration nach der Variabeln $s$ zwischen den Grenzen $s = 0$ und $s = \infty$ ist daher nicht gestattet. Hierin liegt ein wesentlicher Grund für die Verschiedenheit meiner Resultate von den früheren.

Da die Sommerfeldschen Formel jede Bewegung (nicht nur die stationäre) umfassen sollen[1]), indem man z. B. bei beliebiger endlicher Anfangszeit die Geschwindigkeit vor dieser Zeit durch Null ersetzt, so kommen außerdem die oben im Anschlusse an Gleichung (70) gemachten Bemerkungen in Betracht.

---

[1]) Vgl. die Abhandlung von Sommerfeld in Jahrgang 1905 der Göttinger Nachrichten. — Ich erwähne dies besonders, da Herr Schott in einer soeben erscheinenden Abhandlung (Annalen der Physik, vierte Folge Bd. 25, S. 80) die Ansicht vertritt, daß die Sommerfeldschen Resultate für das Anfangsstadium keine Gültigkeit beanspruchen. Die von Herrn Schott in anderer Hinsicht ausgesprochenen Bedenken (insbesondere in Bezug auf Unstetigkeiten der Geschwindigkeit und in Bezug auf meine Berechnung der Masse) halte ich nicht für zutreffend, wenngleich diese Fragen noch genauerer Erörterung bedürfen; bei Fortsetzung meiner Arbeit werde ich darauf zurückkommen.

[Zusatz vom 1. Febr. 1908.]

# Magnetische Ortsbestimmungen in Bayern.

## 3. Mitteilung.

Von **J. B. Messerschmitt.**

*(Eingelaufen 7. Dezember 1907.)*

Die vorliegenden magnetischen Ortsbestimmungen schließen sich an die früheren[1]) unmittelbar an und enthalten bereits die Anfänge der in Aussicht genommenen Detailuntersuchungen. Die Messungen sind mit dem nämlichen Instrumente und in der gleichen Weise ausgeführt und reduziert worden, wie dies in der zweiten Mitteilung eingehend beschrieben worden ist.

Die Genauigkeit der Deklination und Inklination ist auf ± 1′, die der Horizontalintensität auf ± 10 $\gamma$ anzunehmen.

Die Beobachtungen im Feld sind nach den Registrierungen der magnetischen Elemente in München auf den Anfang des Jahres 1905 reduziert. Durch die Errichtung einer neuen Linie der elektrischen Trambahn von der Max-Josephbrücke in Bogenhausen isaraufwärts ist eine weitere Verschlechterung des magnetischen Feldes am Observatorium eingetreten, besonders seitdem die Geleise über die Brücke bis zum Herzogpark (Montgelasstraße) geführt wurden, obwohl der Endpunkt dieser Strecke noch 650 m nach Westen von dem Standpunkt der magnetischen Registrierinstrumente entfernt bleibt. Es mußten daher die Aufzeichnungen der magnetischen Wage

---

[1]) Messerschmitt, J. B., Magnetische Ortsbestimmungen in Bayern. Diese Berichte Bd. XXXV, Heft 1, S. 69—83. 1905 und Bd. XXXVI, Heft 3, S. 545—579, 1906, mit einer Karte.

als völlig unzuverlässig ganz eingestellt werden. Die beiden anderen Elemente dagegen sind für die Reduktion der Feldbeobachtungen, sowie zur Ableitung von Mittelwerten noch genügend zuverlässig und kann die Unsicherheit in Deklination zu $\pm$ 0'.2 Zehntel Bogenminute und in der Horizontalintensität zu $\pm 2\gamma$ angenommen werden. Doch kommen in den Registrierkurven hie und da jetzt Sprünge vor, die offenbar von zeitlichem Kurzschluß in den Trambahnlinien herrühren, wodurch also einzelne Werte unter Umständen ungenauer werden können.

Die Vergrößerung der Störungen durch die Trambahn rührt offenbar daher, daß zwischen den Endstrecken der beiden zunächst gelegenen Linien, nämlich in der Ismaningerstraße, 195 m Entfernung nach WSW, und Montgelasstraße, 650 m nach W, eine Art leitende Verbindung in den vagabundierenden Strömen hergestellt wird, obwohl die beiderseitigen Schienen nicht miteinander verbunden sind, sondern 400 m voneinander entfernt bleiben. Eine direkte Verbindung der Geleise oder auch die Verlängerung eines derselben würden die Brauchbarkeit der magnetischen Beobachtungen am magnetischen Observatorium ganz in Frage stellen. Sogenannte Feinregistrierungen, bei denen Genauigkeiten von 0,1 $\gamma$ mindestens verlangt werden, sind ja schon jetzt nicht mehr auszuführen. Es kann daher die Verlegung des Observatoriums nur noch eine Frage der Zeit sein.

Die magnetischen Elemente in München, gültig für den Anfang des Jahres, sind aus den Mittelwerten der Monate Dezember des vorhergehenden Jahres und dem Januar des folgenden Jahres abgeleitet. Sie sind in der nachstehenden Tabelle 1 zusammengestellt.

Aus den direkt beobachteten Werten der Deklination $D$, der Horizontalintensität $H$ und der Inklination $J$ sind die rechtwinkligen Koordinaten

Nordkomponente: $X = H \cdot \cos D$
Westkomponente: $Y = H \cdot \sin D$
Vertikalkomponente: $Z = H \cdot \operatorname{tg} J$

abgeleitet worden, woraus dann die Totalintensität:

$$F = H \cdot \sec J = Z \cdot \operatorname{cosec} J$$

folgt.

**Tabelle I.**

N. Br. 48° 8'.8. Länge 11° 36'.5 ö. v. Greenw. Höhe = 530 m.

| München | D | H | J | X | Y | Z | F |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1899.0 | 10° 36'.8 W | 0.20 572 | 63° 23'.2 | 0.20 220 | −0.03 789 | 0.41 056 | 0.45 922 |
| 1900.0 | 30.2 | 595 | 20.0 | 250 | 780 | 1 011 | 890 |
| 1901.0 | 25.8 | 629 | 18.1 | 288 | 735 | 1 019 | 914 |
| 1902.0 | 21.2 | 643 | 15.1 | 307 | 710 | 0 957 | 865 |
| 1903.0 | 16.9 | 652 | 11.8 | 320 | 686 | 0 878 | 798 |
| 1904.0 | 11.1 | 643 | 10.9 | 319 | 644 | 0 834 | 755 |
| 1905.0 | 7.3 | 653 | 10.5 | 331 | 630 | 0 841 | 767 |
| 1906.0 | 2.0 | 651 | 10.3 | 335 | 598 | 0 832 | 757 |
| 1907.0 | 9 56.7 | 646 | 9.9 | 336 | 566 | 0 810 | 736 |

Die Inklination ist nur aus absoluten Beobachtungen mit dem Bambergschen Nadel-Inklinatorium und dem Wild-Edelmannschen Rotations-Inklinatorium berechnet. Für die Reduktion der Feldbeobachtungen wurden die stündlichen Beobachtungen von Potsdam und Pola mit herangezogen.

Die Deklination zeigt jetzt eine mittlere Abnahme von 4'.9; der nämliche Wert folgt aus den Jahresmitteln der letzten 8 Jahre. Die Horizontalintensität ist in den letzten 5 Jahren dagegen nahe ungeändert geblieben; die Inklination nimmt nur wenig ab; ein Ergebnis, das mit dem Verlauf der magnetischen Elemente der nächstgelegenen Observatorien in Potsdam und Pola gut übereinstimmt.[1])

Die nachfolgende Tabelle II enthält der Hauptsache nach die Beobachtungen des Jahres 1906, doch sind noch einige ältere unveröffentlichte Beobachtungen hinzugefügt worden, welche entweder gelegentlich Rekognoszierungen erhalten wur-

[1]) Messerschmitt, J. B., Neuere Mißweisungsbestimmungen in Mitteleuropa. Annalen der Hydrogr. und Mar.-Met. 35. Jahrg., 1907, S. 522—526.

| Nr. | Ort | Breite | Länge östl. von Greenw. | Meereshöhe | $D_{05.0}$ | $H_{05.0}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Kirchheimbolanden | 49° 39′ 53″ | 8° 0′ 19″ | 320 m | 11° 56.′2 | 0.19 599 |
| 2 | Kusel | 32 12 | 7 24 33 | 280 | 12 14.7 | 19 750 |
| 3 | Frankenthal | 31 49 | 8 21 24 | 95 | 11 39.7 | 19 807 |
| 4 | Weißenheim a. Bg. | 30 6 | 8 9 31 | 265 | 11 40.5 | 19 753 |
| 5 | Landstuhl | 25 16 | 7 33 52 | 240 | 12 6.1 | 19 773 |
| 6 | Neustadt a. H. | 20 34 | 8 8 30 | 220 | 11 54.6 | 19 811 |
| 7 | Homburg i. Pf. | 19 16 | 7 20 41 | 300 | 12 32.9 | 19 813 |
| 8 | St. Ingbert | 16 0 | 7 6 0 | 150 | 12 21.8 | 19 828 |
| 9 | Landau i. Pf. | 12 14 | 8 6 53 | 150 | 11 59.3 | 19 910 |
| 10 | Ludwigstadt | 50 29 27 | 11 23 21 | 485 | — | 19 567 |
| 11 | Mellrichstadt | 25 27 | 10 18 39 | 275 | — | — |
| 12 | Oberkotzau | 16 18 | 11 56 22 | 570 | — | — |
| 13 | Kronach | 14 20 | 11 20 13 | 310 | 10 26.1 | 19 626 |
| 14 | Mittelsinn | 11 25 | 9 37 12 | 200 | — | — |
| 15 | Ebenhausen | 7 58 | 10 7 57 | 300 | — | — |
| 16 | Oberredwitz | 0 22 | 12 4 52 | 535 | — | — |
| 17 | Weiden | 49 40 26 | 12 9 3 | 400 | — | 19 952 |
| 18 | Ochsenfurt | 39 45 | 10 4 22 | 195 | — | — |
| 19 | Rothenburg o. T. | 22 37 | 10 11 30 | 425 | — | — |
| 20 | Furth i. W. | 18 16 | 12 51 8 | 395 | 9 42.2 | 20 175 |
| 21 | Roth a. S. | 15 2 | 11 5 58 | 350 | 10 28.8 | 20 082 |
| 22 | Gunzenhausen | 7 21 | 10 45 23 | 450 | — | — |
| 23 | Regenstauf | 7 12 | 12 8 0 | 350 | 9 57.2 | 20 185 |
| 24 | Waldmennach | 3 4 | 12 42 57 | 470 | 9 38.2 | 20 247 |
| 25 | Wülzburg | 1 30 | 11 0 24 | 630 | 10 27.2 | 20 137 |
| 26 | Abbach | 48 55 10 | 11 59 54 | 355 | 10 3.0 | 20 253 |
| 27 | Bogen | 54 46 | 12 40 53 | 315 | 9 41.5 | 20 280 |
| 28 | Abensberg | 48 49 | 11 50 36 | 365 | 10 6.4 | 20 289 |
| 29 | Donauwörth | 43 34 | 10 46 52 | 430 | — | — |
| 30 | Osterhofen a. D. | 42 0 | 13 1 15 | 315 | 9 26.9 | 20 413 |
| 31 | Hauzenberg | 38 56 | 13 37 19 | 520 | 8 59.1 | 20 423 |
| 32 | Wolnzach | 36 20 | 11 34 56 | 400 | 10 14.1 | 20 357 |
| 33 | Neustift | 34 3 | 13 23 26 | 320 | 9 23.3 | 20 488 |
| 34 | Höhenstatt | 29 56 | 13 19 12 | 360 | 9 26.1 | 20 503 |
| 35 | Langweid a. L. | 29 15 | 10 50 50 | 450 | 10 33.9 | 20 378 |
| 36 | Burlafingen | 24 30 | 10 5 5 | 460 | 10 45.8 | 20 401 |

**Tabelle II.**

| $J_{05.0}$ | $X_{05.0}$ | $Y_{05.0}$ | $Z_{05.0}$ | $F_{05.0}$ | Lamont | Top. Atlas | Nr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 64° 54.′8 | 0.19 175 | —0.04 054 | 0.41 865 | 0.46 226 | — | 104 O | 1 |
| 64 43.9 | 19 301 | — 04 189 | 41 842 | 46 269 | — | 102 O | 2 |
| 64 47.4 | 19 397 | — 04 004 | 42 073 | 46 502 | — | 107 O | 3 |
| 64 42.0 | 19 345 | — 03 997 | 41 789 | 46 222 | — | 107 W | 4 |
| 64 42.0 | 19 334 | — 04 145 | 41 831 | 46 269 | — | 106 W | 5 |
| 64 18.5 | 19 383 | — 04 086 | 41 165 | 45 685 | I 140 | 107 W | 6 |
| 64 31.9 | 19 337 | — 04 302 | 41 706 | 46 092 | I 99 | 105 W | 7 |
| 64 33.9 | 19 368 | — 04 245 | 41 693 | 46 168 | — | 108 W | 8 |
| 64 27.6 | 19 475 | — 04 135 | 41 667 | 46 179 | — | 110 W | 9 |
| 65 7.8 | — | — | 42 210 | 46 524 | — | 7 W | 10 |
| 65 7.8 | — | — | — | — | — | 5 W | 11 |
| 64 49.7 | — | — | — | — | — | 8 W | 12 |
| 64 59.7 | 19 301 | — 03 555 | 42 078 | 46 430 | — | 14 W | 13 |
| 65 6.1 | — | — | — | — | — | 10 O | 14 |
| 64 57.5 | — | — | — | — | — | 11 O | 15 |
| 64 38.8 | — | — | — | — | — | 22 W | 16 |
| 64 22.6 | — | — | 41 599 | 46 176 | II 180 | 30 W | 17 |
| 64 32.8 | — | — | — | — | — | 26 O | 18 |
| 64 17.6 | — | — | — | — | I 151 | 32 O | 19 |
| 64 4.7 | 19 886 | — 03 400 | 41 508 | 46 151 | — | 43 O | 20 |
| 64 9.4 | 19 746 | — 03 653 | 41 461 | 46 069 | I 160, II 149 | 40 O | 21 |
| 64 4.4 | — | — | — | — | I 87 | 45 O | 22 |
| 63 58.7 | 19 881 | — 03 489 | 41 345 | 46 010 | — | 48 W | 23 |
| 63 56.6 | 19 961 | — 03 389 | 41 408 | 46 093 | — | 49 O | 24 |
| 64 4.2 | 19 799 | — 03 652 | 41 404 | 46 042 | — | 46 W | 25 |
| 63 48.3 | 19 942 | — 03 534 | 41 169 | 45 881 | — | 48 W | 26 |
| 63 49.8 | 19 991 | — 03 414 | 41 270 | 45 983 | — | 49 W | 27 |
| 63 46.7 | 19 974 | — 03 563 | 41 193 | 45 918 | II 23 | 54 O | 28 |
| 63 52.4 | 19 939 | — 03 722 | 41 144 | — | I 74 | 52 O | 29 |
| 63 34.6 | 20 136 | — 03 351 | 41 080 | 45 871 | — | 57 W | 30 |
| 63 28.5 | 20 181 | — 03 191 | 40 935 | 45 751 | — | 66 W | 31 |
| 63 37.4 | 20 051 | — 03 620 | 41 087 | 45 863 | — | 62 W | 32 |
| 63 31.3 | 20 213 | — 03 342 | 41 132 | 45 952 | — | 65 O | 33 |
| 63 36.6 | 20 225 | — 03 361 | 41 320 | 46 127 | — | 65 O | 34 |
| 63 37.5 | 20 032 | — 03 736 | 41 096 | 45 871 | — | 61 W | 35 |
| 63 33.6 | 20 042 | — 03 810 | 41 024 | 45 816 | I 183 Ulm | 67 W | 36 |

| Nr. | Ort | Breite | Länge östl. von Greenw. | Meereshöhe | $D_{05.0}$ | $H_{05.0}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 37 | Pfersee | 48° 22′ 0″ | 10° 51′ 57″ | 480 m | — | — |
| 38 | Mühldorf | 14 44 | 12 31 1 | 410 | — | — |
| 39 | München | 8 47 | 11 36 32 | 530 | 10° 7.′3 | 0 20 653 |
| 40 | Grafrath | 7 43 | 11 9 48 | 570 | 10 24.0 | 20 577 |
| 41 | Planegg | 6 30 | 11 24 44 | 550 | — | 20 595 |
| 42 | Haar | 6 30 | 11 44 9 | 540 | 10 9.0 | 20 585 |
| 43 | Fasangarten | 5 18 | 11 36 17 | 544 | 10 10.8 | 20 599 |
| 44 | Söcking | 47 59 56 | 11 19 45 | 630 | 10 20.2 | 20 638 |
| 45 | Holzkirchen | 52 52 | 11 41 42 | 690 | — | — |
| 46 | Kaufbeuern | 52 47 | 10 37 9 | 700 | — | — |
| 47 | Rosenheim | 51 28 | 12 8 44 | 460 | — | 20 732 |
| 48 | Hasperting | 49 46 | 12 36 30 | 640 | 9 36.6 | 20 725 |
| 49 | Adelholzen | 49 35 | 12 36 36 | 590 | 9 38.7 | 20 719 |
| 50 | Bernhaupten | 49 20 | 12 38 58 | 600 | 9 40.9 | 20 739 |
| 51 | Seeshaupt | 49 9 | 11 17 8 | 600 | — | 20 714 |
| 52 | Bernau | 48 44 | 12 22 49 | 540 | 9 50.6 | 20 740 |
| 53 | Marquartstein | 45 37 | 12 27 39 | 540 | 9 43.0 | 20 772 |
| 54 | Ruhpolding | 45 26 | 12 39 2 | 660 | 9 35.5 | 20 774 |
| 55 | Immenstadt | 33 48 | 10 13 25 | 750 | — | 20 759 |
| 56 | Füssen | 34 19 | 10 42 7 | 800 | — | — |
| 57 | Oberstaufen | 33 23 | 10 1 42 | 800 | 10 49.7 | 20 754 |

den oder bei denen infolge schlechter Witterungsverhältnisse nicht alle drei Elemente beobachtet werden konnten.

Auf den Stationen Weißenheim a. Bg. und Wülzburg ist bereits zweimal gemessen worden. Es folgt daraus:

für Weißenheim am Berg:

| | $D_{1905}$ | $H_{1905}$ | $J_{1905}$ |
|---|---|---|---|
| 1903 | 11° 41.′1 | 0.19 757 | 64° 39.′9 |
| 1906 | 39.9 | 749 | 44.2 |
| Mittel | 11 40.5 | 0.19 753 | 64 42.0 |

für Wülzburg:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1903 | — | 0.20 129 | 64 3.1 |
| 1906 | 10 27.2 | 0 20 145 | 64 5.4 |
| Mittel | 10 27.2 | 0.20 137 | 64 4.2 |

Tabelle II (Fortsetzung).

| $J_{05.0}$ | $X_{05.0}$ | $Y_{05.0}$ | $Z_{05.0}$ | $F_{05.0}$ | Lamont | Top. Atlas | Nr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 63° 28.′9 | — | — | — | — | I 52 | 69 W | 37 |
| 63 19.9 | — | — | — | — | II 110 | 72 W | 38 |
| 63 10.5 | 0.20 331 | −0.03 630 | 0.40 841 | 0.45 767 | I 135 | 77 O | 39 |
| 63 17.9 | 20 239 | — 03 715 | 40 910 | 45 794 | — | 76 O | 40 |
| 63 13.0 | — | — | 40 802 | 45 706 | — | 77 W | 41 |
| — | 20 263 | — 03 628 | 40 707 | 45 616 | — | 77 O | 42 |
| 63 15.0 | 20 275 | — 03 641 | 40 868 | 45 766 | — | 77 O | 43 |
| 63 10.5 | 20 303 | — 03 703 | 40 812 | 45 733 | — | 82 O | 44 |
| 63 6.2 | — | — | — | — | I 98, II 84 | 83 O | 45 |
| 63 7.2 | — | — | — | — | I 106 | 81 O | 46 |
| 63 1.1 | — | — | 40 730 | 45 687 | I 159, II 148 | 84 O | 47 |
| — | 20 434 | — 03 460 | 40 783 | 45 677 | — | 85 W | 48 |
| 63 1.7 | 20 427 | — 03 471 | 40 714 | 45 682 | — | 85 W | 49 |
| 63 0.5 | 20 444 | — 03 488 | 40 717 | 45 695 | — | 85 W | 50 |
| 63 5.1 | — | — | 40 717 | 45 755 | — | 82 O | 51 |
| 62 59.1 | 20 435 | — 03 546 | 40 677 | 45 659 | II 36 | 84 O | 52 |
| 66 55.8 | 20 474 | — 03 506 | 40 645 | 45 646 | — | 93 W | 53 |
| 62 57.2 | 20 484 | — 03 461 | 40 689 | 45 686 | — | 93 W | 54 |
| 62 58.2 | — | — | 40 642 | — | I 102 | 88 O | 55 |
| 62 53.2 | — | — | — | — | I 81 | 89 O | 56 |
| 62 57.7 | 20 385 | — 03 899 | 40 665 | 45 655 | — | 88 O | 57 |

Dabei ist zu bemerken, daß die ersten Messungen im Jahre 1903 mit einem anderen Instrumente (siehe erste Mitteilung) ausgeführt wurden. In Wülzburg wurde 1906 genau am gleichen Orte beobachtet, in Weißenheim mußte wegen der Kulturen um 30 m südlicher aufgestellt werden.

In Weiden wurde die Inklination zweimal gemessen. 1903 wurde mit dem Tesdorpfschen Theodoliten (Nr. 1769) $J = 64^{0}\ 22'.5$ und 1904 mit dem Bambergschen Inklinatorium (Nr. 6817) $J = 64^{0}\ 22'.8$ in guter Übereinstimmung gefunden.

In Kronach wurde noch an einem zweiten Ort: 50° 14′ 23″ N.B., 11° 19′ 25″ ö. G. die Horizontalintensität $H = 0.19640$ bestimmt. Der letztere Ort dürfte wegen der in der Nähe befindlichen

| Nr. | Ort | *Δ D* | | | *Δ H* | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1905 | 1850 | Diff. | 1905 | 1850 | Diff. | Diff. + 90 |
| 1 | Kirchheimbolanden | +1° 48.′9 | [+1°56′] | − 7′ | −1054 | [− 900] | − 154 | − 64 |
| 2 | Kusel | +2 7.4 | [+2 16] | − 9 | − 903 | − [900] | − 3 | + 87 |
| 3 | Frankenthal | +1 32.4 | [+1 41] | − 9 | − 846 | − [860] | + 14 | + 104 |
| 4 | Weißenheim a. Bg. | +1 33.2 | [+1 50] | − 7 | − 900 | − [850] | − 50 | + 40 |
| 5 | Landstuhl | +1 58.8 | [+2 9] | − 10 | − 880 | − [850] | − 30 | + 60 |
| 6 | Neustadt a. H. | +1 47.3 | +1 52.1 | − 4.8 | − 842 | − 822 | − 20 | + 70 |
| 7 | Homburg i. Pf. | +2 25.6 | +2 15.7 | + 9.9 | − 840 | − 816 | − 24 | + 66 |
| 8 | St. Ingbert | +2 14.5 | [+2 19′] | − 4 | − 825 | − [800] | − 25 | + 65 |
| 9 | Landau i. Pf. | +1 52.0 | [+1 53] | − 1 | − 743 | − [660] | − 73 | + 17 |
| 10 | Ludwigstadt | — | [+ 24] | — | −1086 | [− 990] | − 96 | − 6 |
| 11 | Mellrichstadt | — | [+ 56] | — | — | [−1020] | — | — |
| 12 | Oberkotzau | — | [+ 4] | — | — | [− 900] | — | — |
| 13 | Kronach | + 18.8 | [+ 26] | − 7 | −1027 | [− 915] | − 112 | − 22 |
| 14 | Mittelsinn | — | [+ 79] | — | — | [− 990] | — | — |
| 15 | Ebenhausen | — | [+ 59] | — | — | [− 940] | — | — |
| 16 | Oberredwitz | — | [− 2] | — | — | [− 760] | — | — |
| 17 | Weiden | — | [− 6] | — | − 701 | − 604 | − 97 | − 7 |
| 18 | Ochsenfurt | — | [+ 57] | — | — | [− 740] | — | — |
| 19 | Rothenburg o. T. | — | + 50.4 | — | — | − 601 | — | — |
| 20 | Furth i. W. | − 25.1 | [− 30] | + 5 | − 478 | [− 400] | − 78 | + 12 |
| 21 | Roth a. S. | + 21.5 | [+ 22] | 0 | − 571 | − 472 | − 99 | − 9 |
| 22 | Gunzenhausen | — | + 34.4 | — | — | − 469 | — | — |
| 23 | Regenstauf | − 10.1 | [− 10] | 0 | − 468 | − 380 | − 80 | + 10 |
| 24 | Waldmennach | − 29.1 | [− 22] | − 7 | − 406 | [− 350] | − 56 | + 34 |
| 25 | Wülzburg | + 18.9 | [+ 25] | − 6 | − 516 | [− 415] | − 101 | − 11 |
| 26 | Abbach | − 4.3 | [− 9] | − 5 | − 400 | − [300] | − 100 | − 10 |
| 27 | Bogen | − 25.8 | [− 25] | − 1 | − 373 | − [250] | − 123 | − 33 |
| 28 | Abensberg | − 0.9 | − 0.9 | 0.0 | − 364 | − 248 | − 116 | − 26 |
| 29 | Donauwörth | — | + 26.6 | — | — | − 305 | — | — |
| 30 | Osterhofen a. D. | − 40.4 | [− 36] | − 4 | − 240 | − [60] | − 180 | − 90 |
| 31 | Hauzenberg | − 68.2 | [− 60] | − 8 | − 221 | − [10] | − 211 | − 121 |
| 32 | Wolnzach | + 6.8 | [+ 18] | − 11 | − 278 | − [240] | − 38 | + 52 |
| 33 | Neustift | − 44.0 | [− 50] | − 6 | − 165 | + [10] | − 175 | − 85 |
| 34 | Höhenstadt | − 41.2 | [ 50] | − 9 | − 150 | + [30] | − 180 | − 90 |
| 35 | Langweid a. L. | + 26.6 | [+ 22] | + 5 | − 275 | − [190] | − 185 | − 95 |
| 36 | Burlafingen | + 38.5 | [+ 46] | − 7 | − 252 | − [200] | − 52 | − 38 |

Tabelle III.

| $\Delta J$ | | | | 1905 | | | | Nr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1905 | 1850 | Diff. | Diff. − 7.5 | $\Delta X$ | $\Delta Y$ | $\Delta Z$ | $\Delta F$ | |
| + 1° 44.'3 | [+ 1° 48'] | − 4 | + 3 | −1156 | + 424 | +1024 | + 459 | 1 |
| + 1 33.4 | [+ 1 41] | − 8 | − 1 | −1031 | + 559 | +1001 | + 502 | 2 |
| + 1 36.9 | [+ 1 40] | − 3 | + 4 | − 934 | + 374 | +1232 | + 735 | 3 |
| + 1 31.5 | [+ 1 41] | − 9 | − 2 | − 986 | + 367 | + 948 | + 455 | 4 |
| + 1 31.5 | [+ 1 35] | − 4 | + 3 | − 997 | + 515 | + 990 | + 502 | 5 |
| + 1 8.0 | + 1 27.6 | − 19.6 | − 12.6 | − 948 | + 456 | + 324 | − 82 | 6 |
| + 1 21.4 | + 1 29.2 | − 7.8 | − 0.8 | − 994 | + 672 | + 865 | + 325 | 7 |
| + 1 23.6 | [+ 1 29] | − 5 | + 2 | − 963 | + 615 | + 852 | + 401 | 8 |
| + 1 17.1 | [+ 1 20] | − 3 | + 4 | − 856 | + 505 | + 826 | + 412 | 9 |
| + 1 57.3 | [+ 1 48] | + 9 | + 1.5 | — | — | — | — | 10 |
| + 1 57.3 | [+ 1 56] | + 1 | − 6.5 | — | — | — | — | 11 |
| + 1 39.2 | [+ 1 31] | + 8 | + 0.5 | — | — | — | — | 12 |
| + 1 49.2 | [+ 1 35] | + 14 | + 6.5 | −1030 | − 75 | +1237 | + 663 | 13 |
| + 1 55.6 | [+ 1 50] | + 6 | − 1.5 | — | — | — | — | 14 |
| + 1 47.0 | [+ 1 44] | + 3 | − 4.5 | — | — | — | — | 15 |
| + 1 28.3 | [+ 1 20] | + 8 | + 0.5 | — | — | — | — | 16 |
| + 1 12.1 | + 1 6.0 | + 6.1 | − 1.4 | — | — | — | + 758 | 17 |
| + 1 22.3 | [+ 1 17] | + 5 | − 2.5 | — | — | — | — | 18 |
| + 1 7.1 | + 1 2.5 | + 4.6 | − 2.9 | — | — | — | — | 19 |
| + 0 54.2 | [+ 0 41] | + 13 | + 5.5 | − 445 | − 230 | + 667 | + 384 | 20 |
| + 58.9 | + 55.5 | + 3.4 | − 4.1 | − 585 | + 23 | + 620 | + 302 | 21 |
| + 53.9 | + 47.7 | + 6.2 | − 1.3 | — | — | — | — | 22 |
| + 48.2 | [+ 40] | + 8 | + 0.5 | − 450 | − 141 | + 504 | + 243 | 23 |
| + 46.1 | [+ 30] | + 16 | + 8.5 | − 370 | − 241 | + 567 | + 326 | 24 |
| + 53.7 | [+ 51] | + 3 | − 4.5 | − 532 | + 22 | + 563 | + 275 | 25 |
| + 37.8 | [+ 31] | + 7 | − 0.5 | − 389 | − 96 | + 328 | + 114 | 26 |
| + 39.3 | [+ 25] | + 14 | + 6.5 | − 340 | − 216 | + 429 | + 216 | 27 |
| + 36.2 | + 32.3 | + 3.9 | − 3.6 | − 357 | − 67 | + 352 | + 151 | 28 |
| + 41.9 | + 33.4 | + 8.5 | + 1.0 | − 392 | + 92 | + 303 | − | 29 |
| + 24.1 | [+ 9] | + 15 | + 7.5 | − 195 | − 297 | + 239 | + 104 | 30 |
| + 18.0 | [− 8] | + 26 | + 18.5 | − 150 | − 439 | + 94 | − 16 | 31 |
| + 26.9 | [+ 21] | + 6 | − 1.5 | − 280 | − 10 | + 246 | + 96 | 32 |
| + 20.8 | [− 10] | + 11 | + 3.5 | − 118 | − 288 | + 291 | + 185 | 33 |
| + 26.1 | [− 10] | + 16 | + 8.5 | − 106 | − 269 | + 479 | + 360 | 34 |
| + 27.0 | [+ 20] | + 7 | − 0.5 | − 299 | + 106 | + 255 | + 104 | 35 |
| + 23.1 | + [23] | 0 | − 7.5 | − 289 | + 180 | + 183 | + 49 | 36 |

| Nr. | Ort | Δ D | | | Δ H | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1905 | 1850 | Diff. | 1905 | 1850 | Diff. | Diff. + 90 |
| 37 | Pfersee | — | + 21.1′ | — | — | — 156 | — | — |
| 38 | Mühldorf | — | — 24.5 | — | — | — 9 | — | — |
| 39 | München | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | + 90 |
| 40 | Grafrath | + 16.7 | [+ 14 ] | + 3′ | — 76 | [— 40] | — 36 | + 54 |
| 41 | Planegg | — | [+ 6 ] | — | — 58 | [ 0 ] | — 58 | + 32 |
| 42 | Haar | + 1.7 | [— 4 ] | + 6 | — 68 | [+ 30] | — 98 | — 8 |
| 43 | Fasangarten | + 3.5 | [ 0 ] | + 4 | — 54 | [+ 15] | — 69 | — 21 |
| 44 | Söcking | + 12.9 | [+ 9 ] | + 4 | — 15 | [+ 40] | — 55 | + 35 |
| 45 | Holzkirchen | — | — 4.0 | — | — | + 110 | — | — |
| 46 | Kaufbeuren | — | + 33.6 | — | — | + 29 | — | — |
| 47 | Rosenheim | — | — 25.7 | — | + 79 | + 152 | — 73 | + 17 |
| 48 | Hasperting | — 30.7 | [— 34 ] | + 3 | + 72 | [+ 200] | — 128 | — 38 |
| 49 | Adelholzen | — 28.6 | [— 34 ] | + 5 | + 66 | [+ 200] | — 134 | — 44 |
| 50 | Bernhaupten | — 26.4 | [— 34 ] | + 8 | + 86 | [+ 200] | — 114 | — 24 |
| 51 | Seeshaupt | — | [+ 8 ] | — | — 61 | [+ 110] | — 49 | + 41 |
| 52 | Bernau | — 16.7 | [— 31 ] | + 14 | + 87 | [+ 190] | — 103 | — 13 |
| 53 | Marquartstein | — 24.3 | [— 33 ] | + 9 | + 119 | [+ 210] | — 91 | — 1 |
| 54 | Ruhpolding | — 31.8 | [— 35 ] | + 3 | + 121 | + 230 | — 109 | — 19 |
| 55 | Immenstadt | — | + 38.4 | — | + 97 | + 157 | — 60 | + 30 |
| 56 | Füssen | — | + 22.0 | — | — | + 184 | — | — |
| 57 | Oberstaufen | + 42.4 | [+ 41 ] | — 1 | + 101 | [+ 130] | — 29 | + 61 |

Gebäulichkeiten vielleicht lokal gestört sein, weshalb er auch verlassen und ein zweiter, besser gelegener aufgesucht wurde.

Bildet man, wie früher, wieder die Unterschiede der auf den Stationen erhaltenen Elemente gegen die Basisstation München, so erhält man die Tabelle III, worin die Differenzen der Deklination ($\Delta D$), der Horizontalintensität ($\Delta H$) in Einheiten der 5. Dezimalstelle (C. G. S.) und der Inklination ($\Delta J$) im Sinne: „Feldbeobachtungen minus Münchener Wert“ genommen sind. Zum Vergleich sind wieder die von Lamont für 1850 gefundenen Unterschiede beigefügt. Die eingeklammerten Zahlen sind seinem Atlas (Magnetische Karten. München 1854) entnommen, die übrigen seinen Veröffentlichungen: „Magnetische Ortsbestimmungen in Bayern.“ München 1854 und 1856.

Tabelle III (Fortsetzung).

| ΔJ | | | | 1905 | | | | Nr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1905 | 1850 | Diff. | Diff. − 7.5 | ΔX | ΔY | ΔZ | ΔF | |
| + 18.'4 | + 15.4' | + 3.0 | − 4.5 | — | — | — | — | 37 |
| + 9.4 | − 3.5 | + 12.9 | + 5.4 | — | — | — | — | 38 |
| 0 | 0 | 0.0 | − 7.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 39 |
| + 7.4 | [+ 3 ] | + 4 | − 3.5 | − 92 | + 85 | + 69 | + 27 | 40 |
| + 2.5 | [− 1 ] | + 4 | − 3.5 | — | — | − 39 | − 61 | 41 |
| — | [− 3 ] | — | — | − 68 | − 2 | − 134 | − 156 | 42 |
| + 4.5 | [− 1 ] | + 5 | − 2.5 | − 56 | + 11 | + 27 | 1 | 43 |
| 0.0 | [− 4 ] | + 4 | — | − 28 | + 73 | − 29 | − 34 | 44 |
| − 4.3 | − 16.2 | + 12 | + 4.5 | — | — | — | — | 45 |
| − 3.3 | − 10.4 | + 7 | − 0.5 | — | — | — | — | 46 |
| − 9.4 | − 15.9 | + 6 | − 1.5 | — | — | — | − 80 | 47 |
| — | [− 18 ] | — | — | + 103 | − 170 | − 136 | − 90 | 48 |
| − 8.8 | [− 18 ] | + 9 | + 1.5 | + 96 | − 159 | − 127 | − 85 | 49 |
| − 10.0 | [− 19 ] | + 9 | + 1.5 | + 113 | − 142 | − 124 | − 72 | 50 |
| − 5.4 | [− 12 ] | + 7 | − 0.5 | — | — | − 42 | − 12 | 51 |
| − 11.4 | [− 19 ] | + 8 | + 0.5 | + 104 | − 84 | − 164 | − 108 | 52 |
| − 14.7 | [− 21 ] | + 6 | − 1.5 | + 143 | − 124 | − 196 | − 121 | 53 |
| − 13.3 | [− 23 ] | + 10 | + 2.5 | + 153 | − 169 | − 152 | − 81 | 54 |
| − 12.3 | − 13.7 | + 1 | − 6.5 | — | — | − 199 | — | 55 |
| − 17.3 | − 19.1 | + 2 | − 5.5 | — | — | — | — | 56 |
| − 12.8 | [− 8 ] | − 5 | − 12.5 | + 54 | + 269 | − 176 | − 112 | 57 |

Die Differenzen zwischen den beiden Beobachtungsreihen sind jeweilen in der dritten Kolumne eingetragen. Für die Deklination ergibt sich daraus, wie in den früheren Veröffentlichungen, für das rechtsrheinische Bayern kein konstanter Unterschied. Für die Pfalz dagegen weichen im Mittel die Werte um — 4.'7 ab. Da aber nur 2 Stationen, nämlich Neustadt a. H. und Homburg, identisch sind, welche überdies entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen, während die übrigen Werte nur den magnetischen Karten entnommen sind, so läßt sich daraus kein sicherer Schluß ziehen, insbesondere wenn man berücksichtigt, daß Lamont nur an 7 Stationen in der Pfalz die Deklination maß und daher die magnetischen Kurven in diesem stark gestörten Gebiete nur angenähert richtig ziehen konnte.

Es bietet sich aber noch ein zweiter Vergleich mit den 1855/56 durch G. von Neumayer ausgeführten magnetischen Ortsbestimmungen.[1])

Prof. von Neumayer hatte für seine Vermessung in Frankenthal eine magnetische Station errichtet, welcher Ort noch zugänglich ist, weshalb ich daselbst auch meine Messungen ausführen konnte: nur stellte ich wegen der jetzt dort in der Nähe vorbeiführenden Lokalbahn das Instrument etwa 20 Meter südlicher auf.

In Kirchheimbolanden konnte ich den nämlichen Stationspunkt wie Prof. von Neumayer benutzen: in Neustadt a. H. dagegen mußte ich etwa 50 Meter westlich davon aufstellen. Ein Vergleich der drei Stationen ergibt die nachfolgende Tabelle (Differenzen gegen München für Prof. Neumayer ($N$) und mir ($M$)).

| Station | $\Delta D$ | | | $\Delta H$ | | | $\Delta J$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $N$ | $M$ | Diff. | $N$ | $M$ | Diff. | $N$ | $M$ | Diff. |
| Kirchheimbolanden | $+1^0\ 40'.9$ | $+1^0\ 48'.9$ | $-\ 8.9$ | $-1067$ | $-1054$ | $-13$ | $+1^0\ 48'.6$ | $+1^0\ 44'.3$ | $+\ 4.3$ |
| Frankenthal | $+1\ \ 57.6$ | $+1\ \ 32.4$ | $+25.2$ | $-\ 860$ | $-\ 846$ | $-14$ | $+1\ \ 28.8$ | $+1\ \ 35.9$ | $-\ 8.1$ |
| Neustadt a.H. | $+1\ \ 42.0$ | $+1\ \ 47.3$ | $-\ 5.3$ | $-\ 810$ | $-\ 842$ | $+32$ | $+1\ \ 34.9$ | $+1\ \ 8.0$ | $+26.9$ |

Dabei wurden die magnetischen Elemente in München für 1856.0 nach der „Beilage zu den monatlichen Sendungen der Münchener Sternwarte" 1872 Nr. 11 im Mittel aus 1855 und 1856 angenommen und zwar:

$D = 15^0\ 8'.6$; $H = 0{,}19660$; $J = 64^0\ 41'.5$,

woraus:

$X = 0{,}19267$; $Y = -0{,}05214$; $Z = 0{,}42209$ und $F = 0{,}46691$

folgen.

[1]) G. von Neumayer, Eine erdmagnetische Vermessung der bayerischen Rheinpfalz 1855/56. Mitteilungen der Polichia, Nr. 21, LXII. Jahrg., 1905. Bad Dürkheim 1905.

Die Differenzen sind mit Ausnahme von $\Delta D$ in Frankenthal und $\Delta J$ in Neustadt nicht groß und können zwanglos aus der Veränderung der säkularen Variationen erklärt werden. Die Inklination in Neustadt ist bei meiner Messung unsicher, da die Nadeln schon während der Beobachtungen auffallende Abweichungen zeigten, deren Ursache nicht aufgeklärt werden konnte. Bei der Deklination in Frankenthal könnten vielleicht Lokalstörungen vorhanden sein, da jetzt nahe eine Bahn vorbeiführt und außerdem auch größere Fabriken und Häuser in der Nähe sind.

Da somit die rheinpfälzischen Messungen von Neumayer und von Lamont recht wohl mit den meinigen verträglich sind, so erscheint es angebracht, sie hier in der gleichen Reduktionsweise zusammengestellt, mitzuteilen.

Für die Beobachtungen von Neumayer (Tabelle IV, A) mußten nur die Differenzen gebildet werden, für diejenigen von Lamont (Tabelle IV, B) mußten dagegen erst die geographischen Koordinaten aus den Soldnerschen Koordinaten berechnet werden, während die Differenzen gegen München bereits vorlagen.

Von der Berechnung der rechtwinkligen Koordinaten $X$, $Y$, $Z$ und der Totalintensität wurde abgesehen, da diese sich nicht ohne weiteres auf die gleiche Epoche reduzieren lassen. Da aber die vorliegenden Beobachtungen wieder zeigen, daß die früheren magnetischen Beobachtungen in allen Teilen gute Resultate enthalten, so dürfte eine Bearbeitung derselben wohl der Mühe lohnen.

Wie bereits früher (2. Mitteilung) erwähnt, besteht in der Horizontalintensität zwischen den Lamontschen und den neueren Beobachtungen ein konstanter Unterschied von 90 $\gamma$ und in der Inklination von 7.'5; in der Deklination ist keiner vorhanden. Diese Werte sind für das rechtsrheinische Bayern auch hier wieder bestätigt worden. Für die Rheinpfalz hingegen muß für die Horizontalintensität eine kleinere Korrektion, nämlich 41 $\gamma$, angenommen werden: in Inklination ist die Abweichung 7' und in Deklination 4.'7. Freilich beruhen dabei die meisten

Zahlen auf den aus den Lamontschen magnetischen Karten interpolierten Werten, haben also nicht die gleiche Genauigkeit, wie die zuerst angegebenen Differenzen.

Tabelle IV.

| Ort | Breite | Länge östl. von Greenw. | $\Delta D$ | $\Delta H$ | $\Delta J$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A. | | | |
| Ebernburg | 49° 48.'3 | 7° 50.'1 | + 1° 32.'2 | — 973 | + 1° 45.'7 |
| Obermoschel | 43.5 | 7 47.0 | + 1 53.4 | — 1048 | — |
| Bayerfeld | 41.9 | 7 48.0 | + 1 49.9 | — 966 | + 1 50.4 |
| Odenbach a. Glan | 41.7 | 7 39.0 | +(3 54.3) | — 985 | + 1 48.9 |
| Kirchheimbolanden | 39.9 | 8 0.3 | + 1 40.9 | — 1067 | + 1 48.6 |
| Rockenhausen | 39.0 | 7 49.7 | + 1 43.9 | — 947 | + 1 46.2 |
| Donnersberg | 37.6 | 7 55.8 | + 1 40.2 | — 947 | — |
| Göllheim | 36.2 | 8 3.1 | + 1 34.3 | — 955 | + 1 41.4 |
| Wolfstein | 35.2 | 7 36.3 | + 1 36.2 | — 922 | + 1 43.3 |
| Mörsch | 33.1 | 8 21.4 | + 1 47.6 | — 841 | — |
| Frankenthal | 31.8 | 8 21.4 | + 1 57.6 | — 860 | + 1 28.8 |
| Weisenheim a. S. | 31.3 | 8 14.5 | + 1 37.3 | — 878 | + 1 33.9 |
| Kaiserslautern | 27.2 | 7 45.4 | + 1 17.3 | — 901 | + 1 33.1 |
| Brücken-Ohmbach | 25.6 | 7 21.8 | + 1 29.8 | — 886 | + 1 44.8 |
| Grimmeldingen | 22.3 | 8 9.3 | + 1 41.5 | — 842 | + 1 35.8 |
| Neustadt a. H. | 20.9 | 8 8.7 | + 1 42.0 | — 810 | + 1 34.9 |
| Mittelbexbach 1 | 20.6 | 7 15.6 | + 1 46.8 | — 1013 | — |
| „ 2 | 20.5 | 7 15.3 | + 1 45.9 | — | + 1 29.6 |
| Brennender Berg[1] | 17 | 7 2 | — | — 232 | — |
| Berghausen | 17.7 | 8 24.9 | + 1 48.9 | — 759 | — |
| Edenkoben | 16.7 | 8 7.2 | + 1 49.0 | — 764 | + 1 29.6 |
| Mechtersheim | 16.3 | 8 29.0 | + 1 37.6 | — 731 | + 1 27.9 |
| Zweibrücken 1 | 15.8 | 7 21.9 | + 1 14.5 | — 827 | — |
| „ 2 | 14.4 | 7 23.2 | + 2 32.2 | — 832 | — |
| Birsingen | 13.7 | 7 12.1 | + 1 26.6 | — 828 | + 1 33.9 |
| Pirmasens | 11.2 | 7 37.9 | + 1 37.3 | — 821 | + 1 30.6 |
| Dietrichingen | 11.1 | 7 25.8 | + 1 53.9 | — 778 | + 1 30.2 |
| Klingenmünster 1 | 9.0 | 8 1.5 | + 1 53.9 | — 688 | + 1 20.3 |
| „ 2 | 8.7 | 8 1.0 | + 2 9.1 | — 721 | + 1 26.4 |
| Langenkandel | 5.6 | 8 13.7 | + 1 42.8 | — 621 | + 1 17.8 |
| Rumbach | 5.0 | 7 47.9 | + 1 24.2 | — 887 | + 1 31.1 |

[1]) Bei Dudweiler.

Tabelle IV (Fortsetzung).

| Ort | Breite | Länge östl. von Greenw. | Δ D | Δ H | Δ J |
|---|---|---|---|---|---|
| | | B. | | | |
| Lauterecken | 49° 41′ 1″ | 7° 38′ 9″ | — | — 900 | + 1° 43.′5 |
| St. Julien | 36 40 | 7 29 3 | — | — 874 | + 1 41.6 |
| Ludwigshafen | 29 4 | 8 25 56 | + 1° 39.′8 | — 826 | + 1 35.6 |
| Mannheim | — | — | + 1 41.0 | — 821 | + 1 30.5 |
| Kaiserslautern C | 27 57 | 7 45 29 | + 2 1.6 | — | + 1 31.8 |
| „ A | 27 10 | 7 45 23 | + 2 2.5 | — 823 | + 1 33.8 |
| Pirmasens | 21 58 | 7 36 38 | + 2 5.2 | — 796 | + 1 29.5 |
| Neustadt a. H. | 21 34 | 8 8 19 | + 1 52.1 | — 822 | + 1 27.6 |
| Homburg | 19 16 | 7 20 45 | + 2 15.7 | — 816 | + 1 29.2 |
| Speyer | 17 55 | 8 24 48 | + 1 41.7 | — 708 | + 1 21.3 |
| Annweiler | 12,2 | 7 58,2 | — | — 630 | + 1 23.3 |
| Langenkandel A | 4′57″ | 8 11′ 6″ | + 1 51.7 | — 611 | + 1 9.7 |
| „ C | 4 56 | 8 10 1 | + 1 52.5 | — 621 | — |

Zum Schluß möge noch die Vergleichung der beobachteten rechtwinkligen Koordinaten mit den theoretischen Werten in Tabelle V gegeben werden. Dabei wählte ich, wie früher, das von Ad. Schmidt berechnete System, das sich auf das Jahr 1885,0 bezieht. Für das rechtsrheinische Bayern konnte hierfür die bereits früher berechnete Tabelle wieder verwendet werden, während für die Rheinpfalz eine neue Tabelle der $X$, $Y$, $Z$ angelegt wurde, in welcher die Intervalle in Länge und Breite von 10′ zu 10′ fortschreiten, so daß die Interpolation ziemlich einfach wurde.

Es mag noch daran erinnert werden, daß die Differenzen. im Sinne „Beobachtung minus Rechnung“ gebildet sind und die beiderseitigen Zahlen sich auf zweierlei Epochen, nämlich 1885,0 und 1905,0 beziehen, was aber in dem vorliegenden Falle ohne Bedeutung ist. Im übrigen kann auf das in der früheren Mitteilung Gesagte verwiesen werden.

---

[1]) Siehe Lamont Bd. I, Seite 126 und „Magnet. Beobachtungen 1843, 44 und 45“.

| Nr. | Ort | Breite | Länge östl. von Greenw. | $X_B$ | $X_R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Kirchheimbolanden | 49° 39.'9 | 8° 0.'3 | 0.19 175 | 0.18 625 |
| 2 | Kusel | 32.2 | 7 24.6 | 19 301 | 18 599 |
| 3 | Frankenthal | 31.8 | 8 21.6 | 19 397 | 18 734 |
| 4 | Weißenheim a. Bg. | 30.1 | 8 9.5 | 19 345 | 18 710 |
| 5 | Landstuhl | 25.3 | 7 33.9 | 19 334 | 18 665 |
| 6 | Neustadt a. H. | 20.6 | 8 8.5 | 19 383 | 18 772 |
| 7 | Homburg i. Pf. | 19.3 | 7 20.7 | 19 337 | 18 672 |
| 8 | St. Ingbert | 16.0 | 7 6.0 | 19 368 | 18 668 |
| 9 | Landau i. Pf. | 12.2 | 8 6.9 | 19 475 | 18 823 |
| 10 | Ludwigstadt | 50 29.5 | 11 23.3 | — | 18 717 |
| 11 | Mellrichstadt | 25.5 | 10 18.7 | — | 18 614 |
| 12 | Oberkotzau | 16.3 | 11 56.4 | — | 18 872 |
| 13 | Kronach | 14.3 | 11 20.2 | 19 301 | 18 814 |
| 14 | Mittelsinn | 11.4 | 9 37.2 | — | 18 621 |
| 15 | Ebenhausen | 8.0 | 10 8.0 | — | 18 708 |
| 16 | Oberredwitz | 0.4 | 12 4.9 | — | 18 957 |
| 17 | Bayreuth | 49 57.0 | 11 37.2 | — | 18 963 |
| 18 | Weiden | 40.4 | 12 9.1 | — | 19 143 |
| 19 | Ochsenfurt | 39.8 | 10 4.4 | — | 18 888 |
| 20 | Burgfarnbach | 29.6 | 10 55.7 | — | 19 058 |
| 21 | Rothenburg o. T. | 22.6 | 10 11.5 | — | 19 019 |
| 22 | Furth i. W. | 18.3 | 12 51.1 | 19 886 | 19 386 |
| 23 | Roth a. S. | 15.0 | 11 6.0 | 19 746 | 19 184 |
| 24 | Gunzenhausen | 7.4 | 10 45.4 | — | 19 184 |
| 25 | Regenstauf | 7.2 | 12 8.0 | 19 881 | 19 366 |
| 26 | Waldmennach | 3.1 | 12 43.0 | 19 961 | 19 464 |
| 27 | Wülzburg | 1.5 | 11 0.4 | 19 799 | 19 270 |
| 28 | Abbacch | 48 55.2 | 11 59.9 | 19 942 | 19 431 |
| 29 | Bogen | 54.8 | 12 40.9 | 19 991 | 19 518 |
| 30 | Wasserzell | 52.6 | 11 9.4 | — | 19 345 |
| 31 | Abensberg | 48.8 | 11 50.6 | 19 974 | 19 456 |
| 32 | Donauwörth | 43.1 | 10 47.5 | 19 939 | 19 365 |
| 33 | Osterhofen a. D. | 42.0 | 13 1.3 | 20 136 | 19 647 |
| 34 | Hauzenberg | 38.9 | 13 37.2 | 20 181 | 19 743 |
| 35 | Wolnzach | 36.3 | 11 34.9 | 20 051 | 19 510 |
| 36 | Neustift | 34.1 | 13 23.4 | 20 213 | 19 759 |

Tabelle V.

| $Y_B$ | $Y_R$ | $Z_B$ | $Z_R$ | $X_B - X_R$ | $Y_B - Y_R$ | $Z_B - Z_R$ | Nr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −0.04 054 | −0.04 540 | 0.41 865 | 0.42 514 | + 550γ | + 486γ | − 649γ | 1 |
| − 04 189 | − 04 661 | 41 842 | 42 489 | + 702 | + 472 | − 647 | 2 |
| − 04 004 | − 04 480 | 42 073 | 42 429 | + 663 | + 476 | − 356 | 3 |
| − 03 997 | − 04 519 | 41 789 | 42 421 | + 635 | + 522 | − 632 | 4 |
| − 04 145 | − 04 638 | 41 831 | 42 404 | + 669 | + 493 | − 573 | 5 |
| − 04 086 | − 04 532 | 41 165 | 42 340 | + 611 | + 446 | − 1175 | 6 |
| − 04 302 | − 04 684 | 41 706 | 42 366 | + 665 | + 382 | − 660 | 7 |
| − 04 245 | − 04 733 | 41 693 | 42 345 | + 700 | + 488 | − 652 | 8 |
| − 04 135 | − 04 546 | 41 667 | 42 266 | + 652 | + 411 | − 599 | 9 |
| — | − 03 815 | 42 210 | 42 818 | — | — | − 608 | 10 |
| — | − 04 058 | — | 42 819 | — | — | — | 11 |
| — | − 03 721 | — | 42 686 | — | — | — | 12 |
| − 03 555 | − 03 872 | 42 078 | 42 690 | + 487 | + 317 | − 612 | 13 |
| — | · 04 205 | — | 42 721 | — | — | — | 14 |
| — | − 04 109 | — | 42 674 | — | — | — | 15 |
| — | − 03 743 | — | 42 609 | — | — | — | 16 |
| — | − 03 835 | 41 909 | 42 531 | — | — | − 622 | 17 |
| — | − 03 749 | 41 605 | 42 370 | — | — | − 765 | 18 |
| — | − 04 149 | — | 42 431 | — | — | — | 19 |
| — | − 03 995 | 41 492 | 42 311 | — | — | − 819 | 20 |
| — | − 04 141 | — | 42 274 | — | — | — | 21 |
| − 03 400 | − 03 673 | 41 508 | 42 156 | + 500 | + 273 | − 648 | 22 |
| − 03 653 | − 03 977 | 41 461 | 42 185 | + 562 | + 324 | − 724 | 23 |
| — | − 04 051 | — | 42 118 | — | — | — | 24 |
| − 03 489 | − 03 790 | 41 345 | 42 072 | + 515 | + 301 | − 727 | 25 |
| − 03 389 | − 03 680 | 41 408 | 42 016 | + 497 | + 291 | − 608 | 26 |
| − 03 652 | − 04 010 | 41 404 | 42 057 | + 529 | + 358 | − 653 | 27 |
| − 03 534 | − 03 826 | 41 169 | 41 965 | + 511 | + 292 | − 796 | 28 |
| − 03 414 | − 03 763 | 41 270 | 41 941 | + 473 | + 349 | − 671 | 29 |
| — | − 03 990 | 41 241 | 41 970 | — | — | − 729 | 30 |
| − 03 563 | − 03 863 | 41 193 | 41 921 | + 518 | + 300 | − 728 | 31 |
| − 03 722 | − 03 996 | 41 144 | 41 895 | + 574 | + 274 | − 751 | 32 |
| − 03 351 | − 03 645 | 41 080 | 41 815 | + 489 | + 294 | − 735 | 33 |
| − 03 191 | − 03 534 | 40 935 | 41 767 | + 438 | + 343 | − 832 | 34 |
| − 03 620 | − 03 927 | 41 087 | 41 805 | + 541 | + 307 | − 718 | 35 |
| − 03 342 | − 03 552 | 41 132 | 41 728 | + 454 | + 210 | − 596 | 36 |

| Nr. | Ort | Breite | Länge östl. von Greenw. | $X_B$ | $X_R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 37 | Höhenstatt | 48° 29.'9 | 13° 19.'2 | 0.20 225 | 0.19 770 |
| 38 | Langweid a. L. | 29.3 | 10 50.8 | 20 032 | 19 467 |
| 39 | Günzburg | 27.7 | 10 17.5 | — | 19 406 |
| 40 | Burlafingen | 24.5 | 10 5.1 | 20 042 | 19 406 |
| 41 | Pfersee | 22.0 | 10 52.0 | — | 19 517 |
| 42 | Neufahrn b. Fr. | 19.6 | 11 39.7 | — | 19 637 |
| 43 | Senden | 19.5 | 10 3.4 | — | 19 432 |
| 44 | Mühldorf | 14.7 | 12 31.0 | — | 19 776 |
| 45 | Haspelmoor | 13.5 | 11 6.2 | — | 19 608 |
| 46 | München | 8.8 | 11 36.5 | 20 331 | 19 704 |
| 47 | Grafrath | 7.7 | 11 9.8 | 20 239 | 19 756 |
| 48 | Planegg | 6.5 | 11 24.7 | — | 19 695 |
| 49 | Haar | 6.5 | 11 44.2 | 20 263 | 19 736 |
| 50 | Fasangarten | 5.3 | 11 36.3 | 20 275 | 19 729 |
| 51 | Grafing | 2.6 | 11 56.4 | — | 19 788 |
| 52 | Söcking | 47 59.9 | 11 19.8 | 20 303 | 19 730 |
| 53 | Holzkirchen | 52.9 | 11 41.7 | — | 19 825 |
| 54 | Kaufbeuren | 52.8 | 10 37.2 | — | 19 691 |
| 55 | Rosenheim | 51.5 | 12 8.7 | — | 19 900 |
| 56 | Hasperting | 49.8 | 12 36.5 | 20 434 | 19 962 |
| 57 | Adelholzen | 49.6 | 12 36.6 | 20 427 | 19 963 |
| 58 | Bernhaupten | 49.3 | 12 39.0 | 20 441 | 19 970 |
| 59 | Seeshaupt | 49.2 | 11 17.1 | — | 19 801 |
| 60 | Bernau | 48.7 | 12 22.8 | 20 435 | 19 941 |
| 61 | Marquartstein | 45.6 | 12 27.7 | 20 474 | 19 974 |
| 62 | Ruhpolding | 45.4 | 12 39.0 | 20 484 | 20 000 |
| 63 | Immenstadt | 33.8 | 10 13.4 | — | 19 769 |
| 64 | Füssen | 34.3 | 10 42.1 | — | 19 830 |
| 65 | Oberstaufen | 33.4 | 10 1.7 | 20 385 | 19 748 |

Tabelle V (Fortsetzung).

| $Y_B$ | $Y_R$ | $Z_B$ | $Z_R$ | $X_B - X_R$ | $Y_B - Y_R$ | $Z_B - Z_R$ | Nr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −0.03 361 | −0.03 601 | 0.41 320 | 0.41 692 | + 455γ | + 244γ | − 372γ | 37 |
| − 03 736 | − 04 073 | 41 096 | 41 765 | + 565 | + 337 | − 669 | 38 |
| — | − 04 180 | 41 075 | 41 773 | — | — | − 698 | 39 |
| − 03 810 | − 04 233 | 41 024 | 41 753 | + 636 | + 423 | − 729 | 40 |
| — | − 04 077 | — | 41 697 | — | — | — | 41 |
| — | − 03 929 | 41 247 | 41 645 | — | — | − 398 | 42 |
| — | − 04 233 | 41 810 | 41 706 | — | — | + 104 | 43 |
| — | − 03 772 | — | 41 571 | — | — | — | 44 |
| — | − 04 059 | 40 993 | 41 608 | — | — | − 615 | 45 |
| − 03 630 | − 03 952 | 40 841 | 41 546 | + 627 | + 322 | − 705 | 46 |
| − 03 715 | − 04 037 | 40 910 | 41 551 | + 483 | + 322 | − 641 | 47 |
| — | − 03 992 | 40 802 | 41 531 | — | — | − 729 | 48 |
| − 03 628 | − 03 930 | 40 707 | 41 510 | + 527 | + 302 | − 803 | 49 |
| − 03 641 | − 03 957 | 40 868 | 41 512 | + 546 | + 316 | − 644 | 50 |
| — | − 03 865 | 40 820 | 41 475 | — | — | − 655 | 51 |
| − 03 703 | − 04 015 | 40 812 | 41 471 | + 573 | + 312 | − 659 | 52 |
| — | − 03 953 | — | 41 390 | — | — | — | 53 |
| — | − 04 155 | — | 41 430 | — | — | — | 54 |
| — | − 03 869 | 40 730 | 41 360 | — | — | − 630 | 55 |
| − 03 460 | − 03 783 | 40 705 | 41 898 | + 472 | + 323 | − 1193 | 56 |
| − 03 471 | − 03 784 | 40 714 | 41 897 | + 464 | + 313 | − 1183 | 57 |
| − 03 488 | − 03 764 | 40 717 | 41 892 | + 474 | + 276 | − 1175 | 58 |
| — | − 04 035 | 40 799 | 41 367 | — | — | − 568 | 59 |
| − 03 546 | − 03 829 | 40 677 | 41 885 | + 491 | + 283 | − 1208 | 60 |
| − 03 506 | − 03 816 | 40 645 | 41 867 | + 500 | + 310 | − 1222 | 61 |
| − 03 461 | − 03 780 | 40 689 | 41 856 | + 484 | + 319 | − 1167 | 62 |
| — | − 04 252 | 40 642 | 41 263 | — | — | − 621 | 63 |
| — | − 04 171 | — | 41 248 | — | — | — | 64 |
| − 03 899 | − 04 288 | 40 665 | 41 129 | + 637 | + 389 | − 464 | 65 |



# Über die Konvergenz der Jacobi-Kettenalgorithmen mit komplexen Elementen.

Von **Oskar Perron.**

*(Eingelaufen 7. Dezember 1907.)*

Das Studium des Kettenbruches

$$\frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

ist gleichbedeutend mit dem Studium der dreigliedrigen linearen Rekursionsformel:

$$A_{\nu+2} = a_\nu A_\nu + b_\nu A_{\nu+1} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots \infty).$$

Denn aus dieser berechnen sich sukzessive sowohl die Zähler als die Nenner der Näherungsbrüche, wenn man nur von geeigneten Anfangswerten $A_0$, $A_1$ ausgeht. Man kann dabei von der formalen Bildungsweise des Kettenbruches überhaupt absehen und die ganze Theorie auf die Rekursionsformel gründen.

Ebenso ist die Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus nichts anderes als eine Theorie der $(n+2)$-gliedrigen Rekursionsformel:

$$A_{\nu+n+1} = a_0^{(\nu)} A_\nu + a_1^{(\nu)} A_{\nu+1} + \cdots + a_n^{(\nu)} A_{\nu+n}.$$

Wie nun bei den unendlichen Kettenbrüchen die Frage nach der Konvergenz das Hauptproblem darstellt, so steht auch bei der Jacobischen Verallgemeinerung ein analoges Konvergenzproblem im Vordergrund (was allerdings Jacobi selbst, der von dem ganzen Algorithmus bloß die formale Seite ins Auge

faßte, gar nicht bemerkt zu haben scheint). Ich habe in meiner Habilitationsschrift[1]) für den Fall reeller positiver $a_i^{(\nu)}$, die noch gewissen einschränkenden Ungleichungen genügen, die Konvergenz festgestellt und die gleiche Frage außerdem für periodische Algorithmen auch im Fall komplexer $a_i^{(\nu)}$ vollständig erledigt. In der gegenwärtigen Arbeit will ich nun auch beliebige komplexe $a_i^{(\nu)}$ in Betracht ziehen und für diesen Fall eine Reihe von Konvergenzkriterien aufstellen. Für $n = 1$, d. h. für die Kettenbrüche, ergeben sich daraus insbesondere auch das Fundamentaltheorem des Herrn Pringsheim, wonach der obige Kettenbruch allemal konvergiert, wenn durchweg $|b_\nu| \geq 1 + |a_\nu|$ ist, späterhin (§ 4) aber auch einige neue Kriterien.

Sind die Teilzähler und -nenner des Kettenbruches ganze rationale (positive oder negative) Zahlen, so besagt ein Satz von Legendre, daß der Kettenbruch, wenn durchweg $|b_\nu| > 1 + |a_\nu|$ ist, abgesehen von einem leicht angebbaren Ausnahmsfall, stets einen irrationalen Wert hat. Mit Hilfe dieses Satzes ergibt sich bekanntlich aus dem Lambertschen Kettenbruch für die Exponentialfunktion die Irrationalität der Zahlen $e$, $e^n$, $\pi$ u. a. m. Der Legendresche Irrationalitätssatz gestattet nun eine Ausdehnung auf den Jacobischen Algorithmus, woraus dann ganz entsprechend gefolgert werden kann, daß zwischen gewissen Transzendenten keine lineare Relation mit rationalen Koeffizienten besteht (§ 9). Bei dieser Gelegenheit leite ich dann nicht nur das genaue Analogon zum Lambertschen Kettenbruch her, sondern gebe gleichzeitig noch viel allgemeinere Entwicklungen an, welche der bekannten Kettenbruchdarstellung für den Quotienten zweier Besselschen Funktionen entsprechen. Weitere funktionentheoretische Anwendungen gedenke ich an anderer Stelle zu veröffentlichen.

---

[1]) Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus (Math. Annal. 64 (1907), pag. 1—76).

## § 1.

### Definitionen und formale Entwicklungen.

Sei $n$ eine natürliche Zahl, deren Wert wir im Laufe der Untersuchung unverändert festhalten, und

$$a_0^{(\nu)}, a_1^{(\nu)}, \ldots a_n^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots \infty)$$

unendlich viele ganz beliebige (reelle oder komplexe) Zahlen. Wir leiten daraus eine unbegrenzte Folge von Zahlen $A^{(\nu)}$ her vermittels der rekurrenten Formel:

$$A^{(\nu+n+1)} = a_0^{(\nu)} A^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} A^{(\nu+1)} + \cdots + a_n^{(\nu)} A^{(\nu+n)}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots \infty),$$

wobei ein beliebiges System von Anfangswerten $A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots A^{(n)}$ zum Ausgang gewählt werden mag. Geht man von irgendwelchen anderen Anfangswerten aus, die zum Unterschied etwa mit $A_i^{(0)}, A_i^{(1)}, \ldots A_i^{(n)}$ bezeichnet sein mögen, so liefert die Rekursionsformel auch eine andere unendliche Zahlenfolge, deren Individuen wir entsprechend durch $A_i^{(\nu)}$ bezeichnen wollen. Die unendlich vielen Möglichkeiten für die Anfangswerte liefern so unendlich viele Zahlenfolgen, die wir durch Suffixe unterscheiden. Wir nennen dann mehrere solche Zahlenfolgen

$$A_0^{(\nu)}, A_1^{(\nu)}, \ldots A_m^{(\nu)}$$

voneinander unabhängig, wenn keine Relation der Form

$$\gamma_0 A_0^{(\nu)} + \gamma_1 A_1^{(\nu)} + \cdots + \gamma_m A_m^{(\nu)} = 0$$

mit von $\nu$ unabhängigen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten $\gamma_i$ besteht. Unter all den betrachteten Zahlenfolgen sind dann nur $n + 1$ voneinander unabhängige, die aber auf mannigfache Weise ausgewählt werden können; und aus irgend $n + 1$ unabhängigen läßt sich jede andere linear zusammensetzen.

Denn man wähle $n + 1$ verschiedene Systeme von Anfangswerten

$$
\begin{array}{cccc}
A_0^{(0)} & A_0^{(1)} & \ldots & A_0^{(n)} \\
A_1^{(0)} & A_1^{(1)} & \ldots & A_1^{(n)} \\
- & - & - & - \\
A_n^{(0)} & A_n^{(1)} & \ldots & A_n^{(n)}
\end{array}
$$

derart, daß die Determinante $|A_i^{(k)}| \neq 0$ ist, und bilde daraus die $n+1$ Zahlenfolgen:

$$A_0^{(\nu)}, A_1^{(\nu)}, \ldots A_n^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1. \ldots \infty),$$

welche offenbar im obigen Sinne voneinander unabhängig sind. Ist dann $A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots A^{(n)}$ ein ganz beliebiges System von Anfangswerten, so kann man $n+1$ Zahlen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_n$ so bestimmen, daß

$$A^{(\nu)} = \gamma_0 A_0^{(\nu)} + \gamma_1 A_1^{(\nu)} + \cdots + \gamma_n A_n^{(\nu)} \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, \ldots n$$

wird. Aus der Rekursionsformel folgt dann sukzessive, daß dieselbe Gleichung auch für $\nu = n+1$, $n+2$ u. s. w. besteht. Also läßt sich $A^{(\nu)}$ linear aus $A_0^{(\nu)}, A_1^{(\nu)}, \ldots A_n^{(\nu)}$ zusammensetzen mit von $\nu$ unabhängigen Koeffizienten.

Für die $n+1$ voneinander unabhängigen Zahlenfolgen wählt man am einfachsten diejenigen mit den Anfangswerten:

$$A_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{„} \quad i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \ldots n),$$

bei welchen ja die Bedingung, daß die Determinante $|A_i^{(k)}| \neq 0$ sein soll, erfüllt ist. Der Kürze halber will ich mich nun der folgenden Ausdrucksweise bedienen:

**Definition I.** Das System der linearen Rekursionsformeln

$$A_i^{(\nu+n+1)} = a_0^{(\nu)} A_i^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} A_i^{(\nu+1)} + \cdots + a_n^{(\nu)} A_i^{(\nu+n)} \tag{1}$$
$$(i = 0, 1, \ldots n;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \infty)$$

mit den Anfangswerten

$$A_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{„} \quad i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \ldots n) \tag{2}$$

heißt eine **Jacobi-Kette** oder einfach **Kette $n^{\text{ter}}$ Ordnung.** Die Zahlen $a_i^{(\nu)}$ heißen die Elemente der Kette.

Jede Wahl von unendlich vielen Zahlen

$$a_0^{(\nu)}, a_1^{(\nu)}, \ldots a_n^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots \infty)$$

bestimmt hienach eine Kette $n^{\text{ter}}$ Ordnung. Die Theorie der Ketten erster Ordnung ist identisch mit der Theorie der Kettenbrüche.

Aus den die Zahlen $A_i^{(\nu)}$ definierenden Rekursionsformeln schließt man genau wie bei den Kettenbrüchen:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} A_0^{(\nu)} & A_0^{(\nu+1)} & \ldots & A_0^{(\nu+n)} \\ A_1^{(\nu)} & A_1^{(\nu+1)} & \ldots & A_1^{(\nu+n)} \\ - & - & - & - \\ A_n^{(\nu)} & A_n^{(\nu+1)} & \ldots & A_n^{(\nu+n)} \end{vmatrix} = (-1)^{n\nu} a_0^{(0)} a_0^{(1)} \ldots a_0^{(\nu-1)}.^{1)}$$

Zur Aufstellung der weiteren Formeln ist es zweckmäßig, die Elemente $a_i^{(\nu)}$ nicht als numerisch gegebene Zahlwerte, sondern zunächst als irgendwelche Unbestimmte oder Variable anzusehen. Die $A_i^{(\nu)}$ berechnen sich dann aus den Rekursionsformeln als ganze rationale Funktionen der $a_k^{(\mu)}$. Wenn man in der Funktion $A_i^{(\nu)}$ die oberen Indices aller auftretenden $a_k^{(\mu)}$ um eine Zahl $\lambda$ erhöht, so soll der entstehende Ausdruck mit $A_{i,\lambda}^{(\nu)}$ bezeichnet werden; danach ist insbesondere auch $A_{i,0}^{(\nu)}$ mit $A_i^{(\nu)}$ gleichbedeutend. Für die $A_{i,\lambda}^{(\nu)}$ gelten nach ihrer Definition die zu (1) analogen Rekursionsformeln:

$$(4) \quad \begin{gathered} A_{i,\lambda}^{(\nu+n+1)} = a_0^{(\nu+\lambda)} A_{i,\lambda}^{(\nu)} + a_1^{(\nu+\lambda)} A_{i,\lambda}^{(\nu+1)} + \cdots + a_n^{(\nu+\lambda)} A_{i,\lambda}^{(\nu+n)} \\ (i = 0, 1, \ldots n;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \infty), \end{gathered}$$

und die Anfangswerte sind wieder:

$$(5) \qquad A_{i,\lambda}^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{,, } i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \ldots n).$$

Hieraus folgt unschwer die wichtige Beziehung:

---

1) Für $\nu = 0$ ist die rechte Seite durch 1 zu ersetzen.

$$(6)\quad A_i^{(\nu+\lambda)} = A_{0,\lambda}^{(\nu)} A_i^{(\lambda)} + A_{1,\lambda}^{(\nu)} A_i^{(\lambda+1)} + \cdots + A_{n,\lambda}^{(\nu)} A_i^{(\lambda+n)};$$

denn einerseits ist dies für $\nu = 0, 1, \ldots n$ evident; anderseits geht aber aus (1) und (4) hervor, daß, wenn die Formel (6) für $n+1$ aufeinander folgende Werte von $\nu$ gilt, sie auch für den nächstfolgenden Wert richtig ist. Damit ist ihre Allgemeingültigkeit erwiesen.

Man merke insbesondere die aus (1) und (4) für $\nu = 0$ hervorgehenden Formeln:

$$(7)\qquad A_i^{(n+1)} = a_i^{(0)}, \quad A_{i,\lambda}^{(n+1)} = a_i^{(\lambda)}.$$

Ferner folgt aus (6) für $\lambda = 1$:

$$A_i^{(\nu+1)} = A_{i-1,1}^{(\nu)} + A_{n,1}^{(\nu)} a_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$
$$A_0^{(\nu+1)} = A_{n,1}^{(\nu)} a_0^{(0)},$$

oder auch, wenn $\nu - 1$ an Stelle von $\nu$ gesetzt wird:

$$(8)\qquad \begin{aligned} A_i^{(\nu)} &= a_i^{(0)} A_{n,1}^{(\nu-1)} + A_{i-1,1}^{(\nu-1)} \quad (i = 1, 2, \ldots n), \\ A_0^{(\nu)} &= a_0^{(0)} A_{n,1}^{(\nu-1)}. \end{aligned}$$

Erhöht man hier wieder die oberen Indices aller $a_k^{(\mu)}$ um eine Zahl $\lambda$, so folgt allgemeiner:

$$(9)\qquad \begin{aligned} A_{i,\lambda}^{(\nu)} &= a_i^{(\lambda)} A_{n,\lambda+1}^{(\nu-1)} + A_{i-1,\lambda+1}^{(\nu-1)} \quad (i = 1, 2, \ldots n), \\ A_{0,\lambda}^{(\nu)} &= a_0^{(\lambda)} A_{n,\lambda+1}^{(\nu-1)}. \end{aligned}$$

Aus der Art, wie wir $A_{i,\lambda}^{(\nu)}$ aus $A_i^{(\nu)}$ entstehen ließen, folgt, daß in $A_{i,\lambda}^{(\nu)}$ nur solche $a_k^{(\mu)}$ auftreten können, bei denen $\mu \geq \lambda$ ist; es ist also $A_{i,\lambda}^{(\nu)}$ unabhängig von allen $a_k^{(\mu)}$ für $\mu < \lambda$. Insbesondere ist daher $A_{i,1}^{(\nu-1)}$ unabhängig von $a_k^{(0)}$, also gewiß von $a_0^{(0)}$. Aus (8) folgt somit, daß auch

$$A_1^{(\nu)}, A_2^{(\nu)}, \ldots A_n^{(\nu)}$$

von $a_0^{(0)}$ ganz unabhängig sind, während dagegen $A_0^{(\nu)}$ das Produkt aus $a_0^{(0)}$ in einen von $a_0^{(0)}$ unabhängigen Faktor ist. Ebenso sind dann auch

$$A_{1,\lambda}^{(\nu)}, A_{2,\lambda}^{(\nu)}, \ldots A_{n,\lambda}^{(\nu)}$$

unabhängig von $a_0^{(\lambda)}$, während $A_{0,\lambda}^{(\nu)}$ das Produkt aus $a_0^{(\lambda)}$ in einen von $a_0^{(\lambda)}$ freien Faktor ist.

Das eingangs erwähnte Konvergenzproblem knüpft sich nun an die folgende

**Definition II.** Sind die Elemente $a_i^{(\nu)}$ einer Kette als bestimmte numerische Zahlen vorgegeben, so heißt die Kette **konvergent**, wenn die Quotienten $a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}$ mit wachsendem $\nu$ gegen bestimmte endliche Grenzwerte konvergieren:

$$a_0^{(0)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = a_1^{(0)}, \quad a_0^{(0)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_2^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = a_2^{(0)}, \quad \ldots \quad a_0^{(0)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_n^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = a_n^{(0)},$$

welche dann **das Wertesystem der Kette** genannt werden. Andernfalls heißt die Kette divergent.[1])

Die Konvergenz erfordert hienach, daß, zum mindesten von einer gewissen Stelle $\nu \geq \nu'$ ab, durchweg $A_0^{(\nu)} \neq 0$ ist; dagegen soll es nicht ausgeschlossen sein, daß für eine endliche Anzahl von $\nu$-Werten gleichwohl $A_0^{(\nu)} = 0$ ist.

Nach den vorigen Bemerkungen ist das Wertesystem der Kette (welches natürlich bloß im Fall der Konvergenz existiert) unabhängig von $a_0^{(0)}$, und wegen (8) kann man statt der obigen Gleichungen auch schreiben:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_1^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu-1)}} = a_1^{(0)}, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_2^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu-1)}} = a_2^{(0)}, \quad \ldots \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_n^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu-1)}} = a_n^{(0)}.$$

Diese Schreibweise hat vor der ersten den Vorzug, daß sie auch für $a_0^{(0)} = 0$ ihren Sinn behält, während zuvor für diesen Fall alle Nenner den Wert Null hatten. Indessen wollen wir für die gegenwärtige Arbeit **gleich jetzt ein für allemal festsetzen, dass $a_0^{(0)} \neq 0$ ist; ebenso $a_0^{(\nu)} \neq 0$ für alle $\nu$.** Man kann infolgedessen an der ersten Schreibweise festhalten; außerdem ist zu beachten, daß jetzt auch die Determinante (3) stets von Null verschieden ist, was für spätere Untersuchungen von Wichtigkeit sein wird.

---

[1]) Ein ähnlicher Konvergenzbegriff auch bei Herrn Pincherle: Contributo alla generalizzazione delle frazioni continue, Memorie della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna, ser. V, t. IV (1894) p. 297—320.

Aus den Formeln (8) folgt:

$$(8^a) \qquad a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = a_i^{(0)} + \frac{A_{i-1,1}^{(\nu-1)}}{A_{n,1}^{(\nu-1)}} \quad (i = 1, 2, \ldots n);$$

die Konvergenz der Kette ist daher auch gleichbedeutend mit der Existenz der Grenzwerte:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_{0,1}^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu)}}, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{1,1}^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu)}} \quad \ldots \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{n-1,1}^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu)}}.$$

Da diese Brüche von $a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \ldots a_n^{(0)}$ nicht abhängen (nach pag. 406 unten), so schließen wir, daß Konvergenz und Divergenz der Kette durch die Zahlen $a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \ldots a_n^{(0)}$ nicht beeinflußt werden können. Erst das Verhalten von $a_i^{(\nu)}$ für $\nu \geq 1$ kommt dabei in Frage.

Den Zusammenhang der Kette mit ihrem Wertesystem deuten wir symbolisch an durch die Formel:

$$(10) \qquad \begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & a_0^{(3)} & \ldots \\ a_1^{(0)}, & a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & a_1^{(3)} & \ldots \\ - & - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & a_n^{(3)} & \ldots \end{bmatrix} = \begin{cases} a_1^{(0)} \\ a_2^{(0)} \\ \\ a_n^{(0)}. \end{cases}$$

Danach wird insbesondere für Ketten erster Ordnung ($n = 1$):

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)} & \ldots \\ a_1^{(0)}, & a_1^{(1)}, & a_1^{(2)} & \ldots \end{bmatrix} = a_1 = a_0^{(0)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}},$$

also das Symbol

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)} & \ldots \\ a_1^{(0)}, & a_1^{(1)}, & a_1^{(2)} & \ldots \end{bmatrix}$$

gleichbedeutend mit dem unendlichen Kettenbruch

$$a_1^{(0)} + \frac{a_0^{(1)} |}{| a_1^{(1)}} + \frac{a_0^{(2)} |}{| a_1^{(2)}} + \frac{a_0^{(3)} |}{| a_1^{(3)}} + \cdots.$$

Übrigens soll das Zeichen auf der linken Seite von (10) überhaupt als Symbol für die Kette gebraucht werden, ohne Rücksicht auf Konvergenz oder Divergenz. Eine Gleichung

der Form (10) hat dann allerdings bloß einen Sinn, wenn das Wertesystem der Kette existiert, also nur, wenn die Konvergenz feststeht; bei Divergenz hat das Kettensymbol, ebenso wie ein Kettenbruch lediglich formale Bedeutung. An Stelle des ausführlichen Kettensymboles (10) soll gelegentlich auch abkürzend

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\nu)} \\ - \\ a_n^{(\nu)} \end{bmatrix}_{\nu=0}^{\infty} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(\nu)} \\ - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(\nu)} \end{bmatrix}_{\nu=1}^{\infty} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(\nu)} \\ - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(\nu)} \end{bmatrix}_{\nu=2}^{\infty} \quad \text{etc.}$$

geschrieben werden.

Wir betrachten jetzt die beiden Ketten $n^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \dots \\ a_1^{(0)}, & a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & \dots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \dots \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} 1, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \dots \\ 0, & a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & \dots \\ - & - & - & - \\ 0, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \dots \end{bmatrix}.$$

Ist eine von diesen konvergent, so ist es auch die andere, da ja die Konvergenz durch $a_i^{(0)}$ nicht beeinflußt wird. Bezeichnet man dann das Wertesystem der ersten Kette wieder mit $\alpha_1^{(0)}, \dots \alpha_n^{(0)}$, das der zweiten mit $\beta_1^{(0)}, \dots \beta_n^{(0)}$, so ist wegen (8ᵃ):

$$\alpha_i^{(0)} = a_0^{(0)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = a_i^{(0)} + \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{i-1,1}^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu)}}.$$

Die zweite der obigen Ketten geht nun aber aus der ersten dadurch hervor, daß

$$a_0^{(0)} = 1, \; a_1^{(0)} = a_2^{(0)} = \cdots = a_n^{(0)} = 0$$

gesetzt wird, während alle andern Elemente unverändert bleiben. Man erhält also entsprechend, da $A_{0,1}^{(\nu)}, A_{1,1}^{(\nu)}, \dots A_{n,1}^{(\nu)}$ von $a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \dots a_n^{(0)}$ gar nicht abhängen,

$$\beta_i^{(0)} = \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{i-1,1}^{(\nu)}}{A_{n,1}^{(\nu)}},$$

und folglich auch:

$$\alpha_i^{(0)} = a_i^{(0)} + \beta_i^{(0)}.$$

Dies wichtige Resultat wird für Ketten erster Ordnung trivial, sobald man die Kette in Form eines Kettenbruches

schreibt. Es besagt dann nämlich nichts weiter, als daß der Kettenbruch

$$a_1^{(0)} + \frac{a_0^{(1)} |}{| a_1^{(1)}} + \frac{a_0^{(2)} |}{| a_1^{(2)}} + \frac{a_0^{(3)} |}{| a_1^{(3)}} + \cdots$$

die Summe ist von $a_1^{(0)}$ und dem Kettenbruch

$$\frac{a_0^{(1)} |}{| a_1^{(1)}} + \frac{a_0^{(2)} |}{| a_1^{(2)}} + \frac{a_0^{(3)} |}{| a_1^{(3)}} + \cdots.$$

Ferner untersuchen wir die beiden Ketten $n^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\nu)} \\ a_1^{(\nu)} \\ -- \\ a_{n-1}^{(\nu)} \\ a_n^{(\nu)} \end{bmatrix}_{\nu=0}^{\infty} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} a_0^{(\nu)} \varrho_\nu \varrho_{\nu-1} \cdots \varrho_{\nu-n} \\ a_1^{(\nu)} \varrho_\nu \varrho_{\nu-1} \cdots \varrho_{\nu-n+1} \\ - \; - \; - \; - \; - \; - \\ a_{n-1}^{(\nu)} \varrho_\nu \varrho_{\nu-1} \\ a_n^{(\nu)} \varrho_\nu \end{bmatrix}_{\nu=0}^{\infty},$$

wobei $\varrho_\nu = 1$ ist für $\nu < 0$, während die $\varrho_\nu$ für $\nu \geq 0$ ganz beliebige, aber von Null verschiedene Zahlen bedeuten sollen. Zur ersten dieser beiden Ketten gehören die Rekursionsformeln (1), während die entsprechenden zur zweiten Kette gehörigen Formeln lauten:

$$B_i^{(\nu+n+1)} = a_0^{(\nu)} \varrho_\nu \varrho_{\nu-1} \cdots \varrho_{\nu-n} B_i^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} \varrho_\nu \varrho_{\nu-1} \cdots \varrho_{\nu-n+1} B_i^{(\nu+1)}$$
$$+ \cdots + a_{n-1}^{(\nu)} \varrho_\nu \varrho_{\nu-1} B_i^{(\nu+n-1)} + a_n^{(\nu)} \varrho_\nu B_i^{(\nu+n)},$$

wobei die Anfangswerte wieder

$$B_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \;\;\text{„} \;\; i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \ldots n)$$

sind. Hieraus folgt nun sogleich durch den Schluß von $\nu$ auf $\nu + 1$:

$$B_i^{(\nu+n+1)} = \varrho_0 \varrho_1 \cdots \varrho_\nu A_i^{(\nu+n+1)} \quad (\nu = 0, 1, \ldots \infty),$$

und folglich auch:

$$\varrho_0 \cdot \left( a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\nu+n+1)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} \right) = a_0^{(0)} \varrho_0 \cdot \frac{B_i^{(\nu+n+1)}}{B_0^{(\nu+n+1)}},$$

sobald nur $A_0^{(\nu+n+1)} \neq 0$ ist. Läßt man $\nu$ über alle Grenzen wachsen, so besagt dies: Wenn von den obigen beiden Ketten die eine konvergent ist, so ist es auch die andere, und das Wertesystem der zweiten Kette ist das $\varrho_0$-fache des Wertesystems der ersten. Ist speziell $\varrho_0 = 1$, so heißen die beiden Ketten **äquivalent**, in Zeichen:

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\nu)} \\ a_1^{(\nu)} \\ - \\ a_n^{(\nu)} \end{bmatrix}_{\nu=0}^{\infty} \sim \begin{bmatrix} a_0^{(\nu)} \varrho_\nu \varrho_{\nu-1} \cdots \varrho_{\nu-n} \\ a_1^{(\nu)} \varrho_\nu \varrho_{\nu-1} \cdots \varrho_{\nu-n+1} \\ - \; - \; - \; - \; - \; - \\ a_n^{(\nu)} \varrho_\nu \end{bmatrix}_{\nu=0}^{\infty} \quad \begin{pmatrix} \varrho_\nu = 1 \text{ für } \nu \leq 0 \\ \varrho_\nu \neq 0 \quad „ \quad \nu > 0 \end{pmatrix},$$

und wir erhalten den Satz:

Zwei äquivalente Ketten sind stets gleichzeitig konvergent oder divergent und haben im Fall der Konvergenz das gleiche Wertesystem.

Sind die Elemente $a_i^{(\nu)}$ einer Kette sämtlich rationale Zahlen, so kann man offenbar durch geeignete Wahl der Multiplikatoren $\varrho_\nu$ eine äquivalente Kette finden, deren Elemente, wenigstens von der zweiten Kolonne ab, sämtlich ganze Zahlen sind.

Herr Pringsheim[1]) nennt einen Kettenbruch unbedingt konvergent, wenn er nach Weglassung einer beliebigen Anzahl von Anfangsgliedern konvergent bleibt. Im Anschluß hieran definieren wir:

**Definition III.** Die Kette $n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)} & \ldots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)} & \ldots \end{bmatrix}$$

heißt **unbedingt konvergent**, wenn die Ketten

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\lambda)}, & a_0^{(\lambda+1)}, & a_0^{(\lambda+2)} & \ldots \\ - \; - & - \; - & - & - \\ a_n^{(\lambda)}, & a_n^{(\lambda+1)}, & a_n^{(\lambda+2)} & \ldots \end{bmatrix} \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots \infty)$$

[1]) Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche. Diese Sitzungsberichte, Bd. 28 (1898), pag. 295—324.

sämtlich konvergent sind. Finden sich dagegen eine oder mehrere divergente unter diesen Ketten, so heißt die Kette (wenn sie überhaupt konvergiert) nur bedingt konvergent.

Eine unbedingt konvergente Kette ist also dadurch ausgezeichnet, daß für alle $\lambda$ die Grenzwerte

$$a_0^{(\lambda)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{1,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = a_1^{(\lambda)}, \quad a_0^{(\lambda)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{2,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = a_2^{(\lambda)}, \ldots$$

$$a_0^{(\lambda)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{n,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = a_n^{(\lambda)}$$

existieren; diese sind offenbar von $a_0^{(\lambda)}$ unabhängig, wie ja auch $a_i^{(0)}$ von $a_0^{(0)}$ unabhängig war. Offenbar kann auch die unbedingte Konvergenz durch die Zahlen $a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \ldots a_n^{(0)}$ nicht beeinflußt werden.

Aus den Gleichungen (9) erhält man:

$$(11) \quad a_0^{(\lambda)} \frac{A_{i,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = a_i^{(\lambda)} + \frac{A_{i-1,\lambda+1}^{(\nu-1)}}{A_{n,\lambda+1}^{(\nu-1)}} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots n \\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots \infty \end{pmatrix}.$$

Bei unbedingter Konvergenz nähert sich die linke Seite in (11) mit wachsendem $\nu$ dem endlichen Grenzwert $a_i^{(\lambda)}$; daher muß insbesondere (für $i = 1$) auch $\frac{A_{0,\lambda+1}^{(\nu-1)}}{A_{n,\lambda+1}^{(\nu-1)}}$ einen endlichen Grenzwert haben; da dieser aber offenbar gleich $\frac{a_0^{(\lambda+1)}}{a_n^{(\lambda+1)}}$ ist, so folgt $a_n^{(\lambda+1)} \neq 0$, d. h.:

$$a_n^{(1)} \neq 0, \quad a_n^{(2)} \neq 0, \quad a_n^{(3)} \neq 0, \ldots;$$

dagegen kann sehr wohl $a_n^{(0)} = 0$ sein. Läßt man nun in (11) $\nu$ unbegrenzt wachsen, so folgt:

$$a_1^{(\lambda)} = a_1^{(\lambda)} + \frac{a_0^{(\lambda+1)}}{a_n^{(\lambda+1)}}$$

$$a_i^{(\lambda)} = a_i^{(\lambda)} + \frac{a_{i-1}^{(\lambda+1)}}{a_n^{(\lambda+1)}} \quad (i = 2, 3, \ldots n).$$

Dies ist gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem:

$$
(12)\qquad
\begin{array}{l}
a_1^{(0)} = a_1^{(0)} + \dfrac{a_0^{(1)}}{a_n^{(1)}},\quad a_2^{(0)} = a_2^{(0)} + \dfrac{a_1^{(1)}}{a_n^{(1)}},\ \ldots\ a_n^{(0)} = a_n^{(0)} + \dfrac{a_{n-1}^{(1)}}{a_n^{(1)}} \\[2ex]
a_1^{(1)} = a_1^{(1)} + \dfrac{a_0^{(2)}}{a_n^{(2)}},\quad a_2^{(1)} = a_2^{(1)} + \dfrac{a_1^{(2)}}{a_n^{(2)}},\ \ldots\ a_n^{(1)} = a_n^{(1)} + \dfrac{a_{n-1}^{(2)}}{a_n^{(2)}} \\
- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -,
\end{array}
$$

welches in meiner Habilitationsschrift zum Ausgangspunkt der Untersuchung gewählt war; nur war dort durchweg $a_0^{(\lambda)} = 1$.

Es empfiehlt sich, statt der Größen $a_i^{(\lambda)}$ gewisse homogene Größen einzuführen, nämlich:

$$
\frac{a_i^{(\lambda)}}{a_0^{(\lambda)}} = \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{i,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = \frac{x_i^{(\lambda)}}{x_0^{(\lambda)}} \qquad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots n \\ \lambda = 0, 1, \ldots \infty \end{array}\right),
$$

wobei $x_0^{(\lambda)} \neq 0$ ist, und die Zahlen $x_0^{(\lambda)}, x_1^{(\lambda)}, \ldots x_n^{(\lambda)}$ nur bis auf einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor bestimmt sind (der natürlich mit $\lambda$ variieren darf). Nach geeigneter Festsetzung der willkürlichen Faktoren gewinnt man aus (12) das folgende homogene Gleichungssystem:

$$
(13)\qquad
\begin{array}{l}
x_0^{(0)} = a_0^{(0)} x_n^{(1)},\ x_1^{(0)} = x_0^{(1)} + a_1^{(0)} x_n^{(1)},\ x_2^{(0)} = x_1^{(1)} + a_2^{(0)} x_n^{(1)},\ \ldots \\
\qquad\qquad x_n^{(0)} = x_{n-1}^{(1)} + a_n^{(0)} x_n^{(1)} \\[1ex]
x_0^{(1)} = a_0^{(1)} x_n^{(2)},\ x_1^{(1)} = x_0^{(2)} + a_1^{(1)} x_n^{(2)},\ x_2^{(1)} = x_1^{(2)} + a_2^{(1)} x_n^{(2)},\ \ldots \\
\qquad\qquad x_n^{(1)} = x_{n-1}^{(2)} + a_n^{(1)} x_n^{(2)} \\[1ex]
x_0^{(2)} = a_0^{(2)} x_n^{(3)},\ x_1^{(2)} = x_0^{(3)} + a_1^{(2)} x_n^{(3)},\ x_2^{(2)} = x_1^{(3)} + a_2^{(2)} x_n^{(3)},\ \ldots \\
\qquad\qquad x_n^{(2)} = x_{n-1}^{(3)} + a_n^{(2)} x_n^{(3)} \\
- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -
\end{array}
$$

Dieses stimmt der Form nach überein mit einem System linearer Substitutionen, durch welche die $x_i^{(0)}$ sukzessive in $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$, etc. transformiert werden. Will man durch Zusammensetzung der Substitutionen die $x_i^{(0)}$ direkt in $x_i^{(\lambda)}$ transformieren, so geschieht das durch die Formeln

$$
(14)\qquad x_i^{(0)} = A_i^{(\lambda)} x_0^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+1)} x_1^{(\lambda)} + \cdots + A_i^{(\lambda+n)} x_n^{(\lambda)} \qquad (i = 0, 1, \ldots n),
$$

wie durch den Schluß von $\lambda$ auf $\lambda + 1$ ohne weiteres bestätigt wird, nachdem die Formel für $\lambda = 0$ ja evident ist. Erhöht man in einer der Gleichungen (13) die oberen Indices der $a_i^{(\nu)}$, $x_i^{(\nu)}$ um eine Zahl $\mu$, so kommt wieder eine Gleichung des Systems (13) zum Vorschein. Man darf also auch in (14) diese Operation ausführen und erhält dann:

$$x_i^{(\mu)} = A_{i,\mu}^{(\lambda)} x_0^{(\lambda+\mu)} + A_{i,\mu}^{(\lambda+1)} x_1^{(\lambda+\mu)} + \cdots + A_{i,\mu}^{(\lambda+n)} x_n^{(\lambda+\mu)} \tag{14^a}$$
$$(i = 0, 1, \ldots n).$$

Da $x_0^{(0)} \neq 0$ ist, so folgt aus (14), indem man wieder zur inhomogenen Bezeichnung zurückkehrt:

$$a_i^{(0)} = a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+1)} a_1^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+2)} a_2^{(\lambda)} + \cdots + A_i^{(\lambda+n)} a_n^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+1)} a_1^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+2)} a_2^{(\lambda)} + \cdots + A_0^{(\lambda+n)} a_n^{(\lambda)}} \tag{15}$$
$$(i = 1, 2, \ldots n;\ \lambda = 0, 1, \ldots \infty).$$

Diese Formel wurde abgeleitet unter der Voraussetzung unbedingter Konvergenz; bei nur bedingter Konvergenz sind ja die zur Herleitung sukzessive benutzten Zahlen $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}, \ldots,$ die als gewisse Grenzwerte definiert sind, gar nicht immer vorhanden.[1]) Es ist aber von größter Wichtigkeit, daß trotzdem der folgende Satz gilt:

**Lemma**: Wenn die Kette:

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\lambda)}, & a_0^{(\lambda+1)}, & a_0^{(\lambda+2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(\lambda)}, & a_n^{(\lambda+1)}, & a_n^{(\lambda+2)}, & \ldots \end{bmatrix},$$

wo $\lambda$ ein **bestimmter** Index $\lambda > 1$ ist, konvergiert, und ihr Wertesystem mit $a_1^{(\lambda)}, \ldots a_n^{(\lambda)}$ bezeichnet wird, so ist die Kette

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix}$$

konvergent oder divergent, je nachdem die Größe

[1]) Dagegen ist die Einführung der homogenen Größen $x_i^{(\lambda)}$ für den Beweis der Formel (15) unwesentlich; diese wird vielmehr auch direkt durch vollständige Induktion gewonnen.

$$A_0^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+1)} a_1^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+2)} a_2^{(\lambda)} + \cdots + A_0^{(\lambda+n)} a_n^{(\lambda)}$$

von Null verschieden oder gleich Null ist. Das Wertesystem der Kette ist im Konvergenzfall gegeben durch die Formel:

$$a_i^{(0)} = a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+1)} a_1^{(\lambda)} + \cdots + A_i^{(\lambda+n)} a_n^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+1)} a_1^{(\lambda)} + \cdots + A_0^{(\lambda+n)} a_n^{(\lambda)}} \; (i = 1, 2, \ldots n).$$

Man beachte, daß hier nirgends von unbedingter Konvergenz die Rede ist. Es kann sehr wohl vorkommen, daß die in dem Satz auftretenden Ketten beide konvergieren, während dagegen

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\nu)}, & a_0^{(\nu+1)}, & a_0^{(\nu+2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(\nu)}, & a_n^{(\nu+1)}, & a_n^{(\nu+2)}, & \ldots \end{bmatrix}$$

für $0 < \nu < \lambda$ divergiert. Zum Beweis des Satzes beachte man, daß nach unseren Voraussetzungen die Grenzwerte

$$a_0^{(\lambda)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{i,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = a_i^{(\lambda)}$$

existieren, und daß also für genügend große $\nu$ stets $A_{0,\lambda}^{(\nu)} \neq 0$ ist. Daher folgt aus Formel (6):

$$\frac{A_i^{(\nu+\lambda)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = A_i^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+1)} \frac{A_{1,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} + A_i^{(\lambda+2)} \frac{A_{2,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} + \cdots + A_i^{(\lambda+n)} \frac{A_{n,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}}.$$

Multipliziert man mit $a_0^{(\lambda)}$ und läßt dann $\nu$ unbegrenzt wachsen, so nähern sich die einzelnen Terme der rechten Seite bestimmten endlichen Grenzwerten. Gleiches gilt also auch von der linken Seite, und zwar ist:

$$(16) \quad a_0^{(\lambda)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu+\lambda)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = A_i^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+1)} a_1^{(\lambda)} + \cdots + A_i^{(\lambda+n)} a_n^{(\lambda)};$$

insbesondere für $i = 0$:

$$(17) \quad a_0^{(\lambda)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_0^{(\nu+\lambda)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} = A_0^{(\lambda)} a_0^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+1)} a_1^{(\lambda)} + \cdots + A_0^{(\lambda+n)} a_n^{(\lambda)}.$$

Ist dieser letztere Ausdruck von Null verschieden, so folgt die Behauptung, soweit sie sich auf diesen Fall bezieht, unmittelbar, indem man Gleichung (16) durch (17) dividiert. Hat der Ausdruck (17) aber den Wert Null, so können die Ausdrücke (16) nicht für alle Werte von $i$ ebenfalls verschwinden, sonst müßte die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_0^{(\lambda)} & A_0^{(\lambda+1)} & \dots & A_0^{(\lambda+n)} \\ - & - & - & - \\ A_n^{(\lambda)} & A_n^{(\lambda+1)} & \dots & A_n^{(\lambda+n)} \end{vmatrix} = 0$$

sein, was nach Formel (3) nicht der Fall ist. Es ist daher wenigstens für einen Wert von $i$, indem man Gleichung (17) durch (16) dividiert,

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_0^{(\nu+\lambda)}}{A_i^{(\nu+\lambda)}} = 0.$$

Also kann der reziproke Bruch keinen endlichen Grenzwert haben, und folglich divergiert die Kette. Damit ist aber der Satz in allen Teilen bewiesen.

## § 2.

### Konvergenz für positive $a_i^{(\nu)}$ und für $|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leq \vartheta(|a_n^{(\nu)}| - 1)$.

Es handelt sich nun vor allem darum, bei numerisch gegebenen Elementen festzustellen, ob die Kette konvergiert, und auch, ob sie unbedingt konvergiert. Ein erstes Konvergenzkriterium entnimmt man dem Satz II meiner Habilitationsschrift (a. a. O., pag. 12); ich will es der Vollständigkeit halber hier in etwas anderer Form wiederholen:

**Theorem I.** Wenn die Elemente $a_i^{(\nu)}$ reelle Zahlen sind und für $\nu \geq 1$ den Ungleichungen:

$$a_n^{(\nu)} \geq c; \quad a_n^{(\nu)} \geq c\, a_i^{(\nu)} \geq 0 \quad (i = 0, 1, \dots n-1)$$

genügen, wo $c$ eine von $\nu$ unabhängige, positive, im

übrigen aber auch beliebig kleine Zahl bedeutet, so ist die Kette

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)} & \dots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)} & \dots \end{bmatrix}$$

unbedingt konvergent.[1])

A. a. O. sind allerdings die gleichen Bedingungen auch für $\nu = 0$ gefordert, und ist obendrein nur die Konvergenz schlechthin, nicht die unbedingte, bewiesen. Da aber, wie bereits hervorgehoben, die Zahlen $a_i^{(0)}$ die Konvergenz gar nicht beeinflussen, so sind die ihnen auferlegten Bedingungen überflüssig. Weiter ist aber die Konvergenz auch eine unbedingte; denn bei den Ketten

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\lambda)}, & a_0^{(\lambda+1)}, & a_0^{(\lambda+2)} & \dots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(\lambda)}, & a_n^{(\lambda+1)}, & a_n^{(\lambda+2)} & \dots \end{bmatrix} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots \infty)$$

sind ja ebenfalls die Bedingungen des Theorems erfüllt, also sind sie sämtlich konvergent.

Wir wenden uns jetzt zu dem fundamentalsten Konvergenzkriterium für komplexe Elemente. Es lautet:

**Theorem II.** Wenn für $\nu \geqq 1$ durchweg die Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leqq \vartheta\,(|a_n^{(\nu)}| - 1)$$

gilt, wo $\vartheta$ eine positive Zahl kleiner als 1 bedeutet, während die Zahlen $a_i^{(\nu)}$ auch komplex sein dürfen, so ist die Kette

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)} & \dots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)} & \dots \end{bmatrix}$$

unbedingt konvergent.

---

[1]) Die Bedingung $a_0^{(\nu)} \neq 0$ wurde schon pag. 407 ein für allemal gestellt. und wird daher in allen Kriterien neben den jeweiligen Bedingungen noch stillschweigend als erfüllt vorausgesetzt, obwohl dies gerade bei Theorem I nicht absolut nötig wäre.

Die Voraussetzungen sind hier offenbar wieder derartige, daß aus der einmal bewiesenen Konvergenz auch sogleich die unbedingte Konvergenz gefolgert werden kann. Da ferner die Zahlen $a_i^{(0)}$ die Konvergenz nicht beeinflussen, so können wir beim Beweis des Theorems annehmen, daß die Bedingungen auch für $\nu = 0$ erfüllt sind; also:

$$\vartheta\,|a_n^{(\nu)}| - |a_0^{(\nu)}| - |a_1^{(\nu)}| - \cdots - |a_{n-1}^{(\nu)}| \geqq \vartheta \quad (\text{für } \nu = 0, 1, 2, \ldots \infty).$$

Dabei bedeute $\vartheta$ vorläufig eine Zahl, die $\leqq 1$ ist. Tritt in den Gleichungen (9) $\nu - \lambda$ an Stelle von $\lambda$, so folgt, wenn $i$ der Reihe nach gleich $n, n-1, \ldots 1$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
|A_{n,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| &\geqq |a_n^{(\lambda)} A_{n,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| - |A_{n-1,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}|,\\
|A_{n-1,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| &\leqq |a_{n-1}^{(\lambda)} A_{n,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| + |A_{n-2,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}|,\\
|A_{n-2,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| &\leqq |a_{n-2}^{(\lambda)} A_{n,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| + |A_{n-3,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}|,\\
&-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\\
|A_{1,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| &\leqq |a_1^{(\lambda)} A_{n,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| + |A_{0,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}|,\\
|A_{0,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| &= |a_0^{(\lambda)} A_{n,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}|.
\end{aligned}$$

Die erste dieser Ungleichungen multiplizieren wir mit $\vartheta$ und subtrahieren davon die $n$ übrigen; dann folgt:

$$\begin{aligned}
&\vartheta\,|A_{n,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| - (|A_{0,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| + |A_{1,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| + \cdots + |A_{n-1,\lambda}^{(\nu-\lambda)}|)\\
&\geqq (\vartheta\,|a_n^{(\lambda)}| - |a_0^{(\lambda)}| - |a_1^{(\lambda)}| - \cdots - |a_{n-1}^{(\lambda)}|)\,|A_{n,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}|\\
&- (|A_{0,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| + |A_{1,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| + \cdots + |A_{n-2,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| + \vartheta\,|A_{n-1,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}|)\\
&\geqq \vartheta \cdot |A_{n,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| - (|A_{0,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| + |A_{1,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}| + \cdots + |A_{n-1,\lambda+1}^{(\nu-\lambda-1)}|).
\end{aligned}$$

Hier bedeuten $\nu, \lambda$ irgendwelche Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \ldots$; nur muß natürlich $\nu \geqq \lambda + 1$ sein, damit keine negativen oberen Indices vorkommen. Setzt man zur Abkürzung:

$$\vartheta\,|A_{n,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| - (|A_{0,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| + |A_{1,\lambda}^{(\nu-\lambda)}| + \cdots + |A_{n-1,\lambda}^{(\nu-\lambda)}|) = \Phi_{\nu,\lambda},$$

so besagt die letzte Ungleichung:

$$\Phi_{\nu,\lambda} \geqq \Phi_{\nu,\lambda+1}.$$

Daher nimmt die Größe $\Phi_{\nu,\lambda}$ mit wachsendem $\lambda$ niemals zu; es ist also auch, wenn $\nu > n$ vorausgesetzt wird,

$$\Phi_{\nu,0} > \Phi_{\nu,\nu-n},$$

oder ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned} &\vartheta\,|A_n^{(\nu)}| - (|A_0^{(\nu)}| + |A_1^{(\nu)}| + \cdots + |A_{n-1}^{(\nu)}|) \\ &\geq \vartheta\,|A_{n,\nu-n}^{(n)}| - (|A_{0,\nu-n}^{(n)}| + |A_{1,\nu-n}^{(n)}| + \cdots + |A_{n-1,\nu-n}^{(n)}|) \\ &= \vartheta. \end{aligned}$$

Somit ist allgemein:

$$\vartheta\,|A_n^{(\nu)}| \geq \vartheta + |A_0^{(\nu)}| + |A_1^{(\nu)}| + \cdots + |A_{n-1}^{(\nu)}| \quad (\text{für } \nu > n); \tag{18}$$

ebenso, wenn man die oberen Indices aller $a_k^{(\mu)}$ um $\lambda$ erhöht, wobei ja die Voraussetzungen des Theorems erhalten bleiben:

$$\vartheta\,|A_{n,\lambda}^{(\nu)}| \geq \vartheta + |A_{0,\lambda}^{(\nu)}| + |A_{1,\lambda}^{(\nu)}| + \cdots + |A_{n-1,\lambda}^{(\nu)}| \quad (\text{für } \nu > n). \tag{19}$$

Aus (18) ergibt sich einmal, daß $|A_n^{(\nu)}| \geq 1$ ist, sodann aber vor allem, daß die Quotienten

$$\frac{A_0^{(\nu)}}{A_n^{(\nu)}}, \quad \frac{A_1^{(\nu)}}{A_n^{(\nu)}}, \ldots \frac{A_{n-1}^{(\nu)}}{A_n^{(\nu)}}$$

absolut genommen unter einer von $\nu$ unabhängigen endlichen Schranke bleiben, nämlich alle kleiner als $\vartheta$. Daraus folgt bekanntlich, daß es eine gewisse unendliche Auswahl von wachsenden $\nu$-Werten gibt: $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ derart, daß die Grenzwerte

$$\lim_{s=\infty} \frac{A_0^{(\nu_s)}}{A_n^{(\nu_s)}}, \quad \lim_{s=\infty} \frac{A_1^{(\nu_s)}}{A_n^{(\nu_s)}}, \ldots \lim_{s=\infty} \frac{A_{n-1}^{(\nu_s)}}{A_n^{(\nu_s)}} \tag{20}$$

existieren, und zwar sind sie absolut $\leq \vartheta$.

Dabei ist aber der erste dieser Grenzwerte sicher auch von Null verschieden. Denn aus (19) ergibt sich auch, daß $|A_{n,\lambda}^{(\nu)}| \geq 1$ ist, und daß $\left|\frac{A_{i,\lambda}^{(\nu)}}{A_{n,\lambda}^{(\nu)}}\right| < \vartheta$ bleibt für alle $\nu > n$; also insbesondere für $\lambda = 1$, $i = n-1$:

$$\left|\frac{A^{(\nu)}_{n-1,1}}{A^{(\nu)}_{n,1}}\right| < \vartheta.$$

Anderseits erhält man aus (8) für $i = n$:

$$|A^{(\nu)}_n| \leq |a^{(0)}_n A^{(\nu-1)}_{n,1}| + |A^{(\nu-1)}_{n-1,1}|$$

und

$$|A^{(\nu)}_0| = |a^{(0)}_0 A^{(\nu-1)}_{n,1}| > |a^{(0)}_0| > 0.$$

Also durch Division:

$$\left|\frac{A^{(\nu)}_n}{A^{(\nu)}_0}\right| \leq \left|\frac{a^{(0)}_n}{a^{(0)}_0}\right| + \left|\frac{A^{(\nu-1)}_{n-1,1}}{a^{(0)}_0 A^{(\nu-1)}_{n,1}}\right| < \left|\frac{a^{(0)}_n}{a^{(0)}_0}\right| + \frac{\vartheta}{|a^{(0)}_0|},$$

und folglich, indem man die reziproken Werte nimmt:

$$\lim_{s=\infty}\left|\frac{A^{(\nu_s)}_0}{A^{(\nu_s)}_n}\right| > \frac{|a^{(0)}_0|}{|a^{(0)}_n| + \vartheta} > 0, \text{ w. z. b. w.}$$

Von den Zahlen (20) kann man daher die $n-1$ letzten durch die erste dividieren, und findet so, daß die folgenden Grenzwerte existieren:

$$(21) \qquad a^{(0)}_0 \lim_{s=\infty}\frac{A^{(\nu_s)}_1}{A^{(\nu_s)}_0} = a^{(0)}_1, \ \ldots\ a^{(0)}_0 \lim_{s=\infty}\frac{A^{(\nu_s)}_n}{A^{(\nu_s)}_0} = a^{(0)}_n,$$

und daß insbesondere auch $a^{(0)}_n \neq 0$ ist.

Wir beweisen nun durch vollständige Induktion, daß ganz allgemein auch die Grenzwerte

$$(22) \qquad a^{(\lambda)}_0 \lim_{s=\infty}\frac{A^{(\nu_s-\lambda)}_{1,\lambda}}{A^{(\nu_s-\lambda)}_{0,\lambda}} = a^{(\lambda)}_1, \ \ldots\ a^{(\lambda)}_0 \lim_{s=\infty}\frac{A^{(\nu_s-\lambda)}_{n,\lambda}}{A^{(\nu_s-\lambda)}_{0,\lambda}} = a^{(\lambda)}_n$$

existieren und daß $a^{(\lambda)}_n \neq 0$ ist. Für $\lambda = 0$ ist dies nämlich soeben bewiesen worden. Nehmen wir daher an, die Behauptung sei für einen bestimmten Wert von $\lambda$ richtig, so folgt aus Formel (11), wenn dort $\nu_s - \lambda$ an Stelle von $\nu$ tritt,

$$a^{(\lambda)}_0 \frac{A^{(\nu_s-\lambda)}_{i,\lambda}}{A^{(\nu_s-\lambda)}_{0,\lambda}} = a^{(\lambda)}_i + \frac{A^{(\nu_s-\lambda-1)}_{i-1,\lambda+1}}{A^{(\nu_s-\lambda-1)}_{n,\lambda+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

und durch Übergang zur Grenze $s = \infty$:

$$(23) \qquad \alpha_i^{(\lambda)} = a_i^{(\lambda)} + \lim_{s=\infty} \frac{A_{i-1,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}}{A_{n,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}} \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Es existieren also die Grenzwerte:

$$\lim_{s=\infty} \frac{A_{0,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}}{A_{n,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}}, \quad \lim_{s=\infty} \frac{A_{1,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}}{A_{n,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}}, \ldots \lim_{s=\infty} \frac{A_{n-1,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}}{A_{n,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}},$$

deren erster sich analog wie oben als von Null verschieden erweist.[1]) Man kann also die $n-1$ letzten durch ihn dividieren, und dadurch ergibt sich die Existenz der folgenden Grenzwerte:

$$\alpha_0^{(\lambda+1)} \lim_{s=\infty} \frac{A_{1,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}}{A_{0,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}} = \alpha_1^{(\lambda+1)}, \ldots \alpha_0^{(\lambda+1)} \lim_{s=\infty} \frac{A_{n,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}}{A_{0,\lambda+1}^{(\nu_s-\lambda-1)}} = \alpha_n^{(\lambda+1)},$$

deren letzter gewiß von Null verschieden ist.

Diese unterscheiden sich von (22) lediglich dadurch, daß $\lambda + 1$ an Stelle von $\lambda$ steht, so daß die Grenzwerte (22) in der Tat für beliebiges $\lambda$ existieren.

Nachdem dies feststeht, gilt auch die daraus abgeleitete Gleichung (23), aus welcher dann folgt:

$$(24) \qquad \begin{gathered} \alpha_1^{(\lambda)} = a_1^{(\lambda)} + \frac{\alpha_0^{(\lambda+1)}}{\alpha_n^{(\lambda+1)}}, \; \alpha_2^{(\lambda)} = a_2^{(\lambda)} + \frac{\alpha_1^{(\lambda+1)}}{\alpha_n^{(\lambda+1)}}, \ldots \\ \alpha_n^{(\lambda)} = a_n^{(\lambda)} + \frac{\alpha_{n-1}^{(\lambda+1)}}{\alpha_n^{(\lambda+1)}}. \end{gathered}$$

Für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots \infty$ stimmen diese Gleichungen formal genau überein mit dem System (12), und auch jetzt ergibt sich daher genau wie früher (durch den Schluß von $\lambda$ auf $\lambda + 1$):

$$\alpha_i^{(0)} = \alpha_0^{(0)} \frac{A_i^{(\lambda)} \alpha_0^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+1)} \alpha_1^{(\lambda)} + \cdots + A_i^{(\lambda+n)} \alpha_n^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)} \alpha_0^{(\lambda)} + A_0^{(\lambda+1)} \alpha_1^{(\lambda)} + \cdots + A_0^{(\lambda+n)} \alpha_n^{(\lambda)}}.$$

[1]) Der Beweis entsteht natürlich aus dem früher gegebenen einfach dadurch, daß man die oberen Indices aller $a_k^{(\mu)}$ um die Zahl $\lambda + 1$ erhöht.

Setzt man daher zur Abkürzung:

$$(25) \qquad a_0^{(0)} A_i^{(\lambda)} - a_i^{(0)} A_0^{(\lambda)} = H_i^{(\lambda)} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots n \\ \lambda = 0, 1, \ldots \infty \end{pmatrix},$$

so kommt:

$$(26) \quad a_0^{(\lambda)} H_i^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} H_i^{(\lambda+1)} + a_2^{(\lambda)} H_i^{(\lambda+2)} + \cdots + a_n^{(\lambda)} H_i^{(\lambda+n)} = 0.$$

Hier brauchen wir nun eine wichtige Ungleichung, welcher die Zahlen $a_i^{(\lambda)}$ genügen. Man erhält sie aus (19), indem man rechter Hand den Summanden $\vartheta$ wegläßt, und dann die ganze Ungleichung durch $|A_{0,\lambda}^{(\nu)}|$ dividiert und mit $|a_0^{(\lambda)}|$ multipliziert; es ergibt sich so:

$$\vartheta \left| a_0^{(\lambda)} \frac{A_{n,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} \right| > |a_0^{(\lambda)}| + \left| a_0^{(\lambda)} \frac{A_{1,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} \right| + \cdots + \left| a_0^{(\lambda)} \frac{A_{n-1,\lambda}^{(\nu)}}{A_{0,\lambda}^{(\nu)}} \right|.$$

Setzt man hier $\nu = \nu_s - \lambda$ und läßt $s$ ins Unendliche wachsen, so kommt nach den Definitionsgleichungen (22):

$$(27) \qquad \vartheta |a_n^{(\lambda)}| \geqq |a_0^{(\lambda)}| + |a_1^{(\lambda)}| + |a_2^{(\lambda)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\lambda)}| \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots \infty),$$

welches die gesuchte Ungleichung ist. Man bemerke bei dieser Gelegenheit auch:

$$(28) \qquad |a_1^{(\lambda)} - a_1^{(\lambda)}| + |a_2^{(\lambda)} - a_2^{(\lambda)}| + \cdots + |a_n^{(\lambda)} - a_n^{(\lambda)}| \leqq \vartheta, \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots \infty);$$

denn die linke Seite ist nach (24) gleich:

$$\frac{|a_0^{(\lambda+1)}| + |a_1^{(\lambda+1)}| + |a_2^{(\lambda+1)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\lambda+1)}|}{|a_n^{(\lambda+1)}|},$$

also nach (27) in der Tat $\leqq \vartheta$.

Da $|a_n^{(\lambda)}| > 0$ ist, so folgt aus Gleichung (26):

$$|H_i^{(\lambda+n)}| \leqq \frac{|a_0^{(\lambda)} H_i^{(\lambda)}| + |a_1^{(\lambda)} H_i^{(\lambda+1)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\lambda)} H_i^{(\lambda+n-1)}|}{|a_n^{(\lambda)}|}.$$

Bezeichnet man daher die größte der $n$ Zahlen

$$|H_i^{(\lambda)}|, \ |H_i^{(\lambda+1)}|, \ \ldots \ |H_i^{(\lambda+n-1)}|$$

mit $M_i^{(\lambda)}$, so ergibt sich:

$$|H_i^{(\lambda+n)}| < \frac{|a_0^{(\lambda)}| + |a_1^{(\lambda)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\lambda)}|}{|a_n^{(\lambda)}|} M_i^{(\lambda)},$$

und daher mit Rücksicht auf (27):

$$(29) \qquad |H_i^{(\lambda+n)}| \leq \vartheta M_i^{(\lambda)} \leq M_i^{(\lambda)}.$$

Es ist daher auch $M_i^{(\lambda+1)} \leq M_i^{(\lambda)}$; somit nehmen die Zahlen $M_i^{(\lambda)}$ mit wachsendem $\lambda$ monoton ab; sie und folglich auch die Zahlen $|H_i^{(\lambda)}|$ bleiben also unter einer von $\lambda$ unabhängigen Schranke.

Soweit ergab sich dies alles unter der Annahme $\vartheta \leq 1$. Von jetzt ab sei aber $\vartheta < 1$. Dann ist wegen (29):

$$\begin{aligned} |H_i^{(\lambda+n)}| &\leq \vartheta M_i^{(\lambda)} \\ |H_i^{(\lambda+n+1)}| &\leq \vartheta M_i^{(\lambda+1)} \leq \vartheta M_i^{(\lambda)} \\ &- - - - - - - \\ |H_i^{(\lambda+2n-1)}| &\leq \vartheta M_i^{(\lambda+n-1)} \leq \vartheta M_i^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

Es ist also auch die größte der $n$ Zahlen

$$|H_i^{(\lambda+n)}|, \ |H_i^{(\lambda+n+1)}|, \ \ldots \ |H_i^{(\lambda+2n-1)}|$$

höchstens gleich $\vartheta M_i^{(\lambda)}$, d. h.:

$$M_i^{(\lambda+n)} \leq \vartheta M_i^{(\lambda)},$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Ungleichung folgt dann auch:

$$(30) \qquad M_i^{(\lambda+\nu n)} \leq \vartheta^\nu M_i^{(\lambda)},$$

also gewiß wegen $\vartheta < 1$:

$$\lim_{\nu=\infty} M_i^{(\lambda+\nu n)} = 0.$$

Da aber die Zahlen $M_i^{(\lambda)}$ mit wachsendem $\lambda$ monoton abnehmen, so ergibt sich hieraus:

$$\lim_{\lambda=\infty} M_i^{(\lambda)} = 0,$$

und folglich auch:

$$\lim_{\lambda=\infty} H_i^{(\lambda)} = 0.$$

Nach der Definition von $H_i^{(\lambda)}$ (Gleichung (25)) besagt dies aber:

(31) $$\lim_{\lambda=\infty} (a_0^{(0)} A_i^{(\lambda)} - a_i^{(0)} A_0^{(\lambda)}) = 0.$$

Nun ist für $\nu > n$ wegen Ungleichung (19): $|A_{n,\lambda}^{(\nu)}| > 1$; also:

$$|A_0^{(\lambda)}| = |a_0^{(0)} A_{n,1}^{(\lambda-1)}| \geq |a_0^{(0)}| \quad (\text{für } \lambda > n+1).$$

$A_0^{(\lambda)}$ liegt also über einer von $\lambda$ unabhängigen positiven Zahl; daher kann man die Formel (31) durch $A_0^{(\lambda)}$ dividieren und erhält so:

$$\lim_{\lambda=\infty} \left( a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)}} - a_i^{(0)} \right) = 0.$$

Somit konvergieren die Zahlen $a_0^{(0)} \dfrac{A_i^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)}}$ mit wachsendem $\lambda$ gegen die endlichen Grenzwerte $a_i^{(0)}$, und damit ist unser Theorem vollständig bewiesen.

Die übrigen in dieser Untersuchung erlangten Resultate fassen wir zusammen in:

**Theorem III.** Wenn für $\nu \geq 0$ durchweg die Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leq \vartheta (|a_n^{(\nu)}| - 1)$$

gilt, wo $\vartheta$ eine positive Zahl kleiner als 1 bedeutet, so genügt das Wertesystem der nach Theorem II konvergenten Kette

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix} = \begin{cases} a_1^{(0)} \\ \\ a_n^{(0)} \end{cases}$$

den zwei Ungleichungen:

$$\vartheta |a_n^{(0)}| \geq |a_0^{(0)}| + |a_1^{(0)}| + |a_2^{(0)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(0)}|,$$

$$|a_1^{(0)} - a_1^{(0)}| + |a_2^{(0)} - a_2^{(0)}| + \cdots + |a_n^{(0)} - a_n^{(0)}| \leq \vartheta;$$

und außerdem gilt die Beziehung:

$$\lim_{\nu=\infty} (a_0^{(0)} A_i^{(\nu)} - a_i^{(0)} A_0^{(\nu)}) = 0,$$

wobei die Zahlen $A_i^{(\nu)}$ vermittels der Formeln (1) (2) aus den Elementen $a_k^{(\mu)}$ gebildet sind.

Diese letzte Formel besagt, da im allgemeinen $|A_0^{(\nu)}|$ mit $\nu$ ins Unendliche wachsen wird,[1]) daß die Annäherung der Brüche $a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}$ an ihren Grenzwert $a_i$ eine verhältnismäßig rasche ist.

Durch das Theorem III erzielt man auch eine Verschärfung des Satzes V und folglich auch VI meiner Habilitationsschrift (a. a. O. pag. 24, 25), indem dort an Stelle von

$$\frac{n + a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}}$$

der kleinere Bruch

$$\frac{2 + a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}},$$

ja sogar

$$\frac{1 + \vartheta + a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}}$$

treten darf.[2]) Ich will diese Gelegenheit benutzen, um für den so modifizierten Satz V noch einen Beweis mitzuteilen, der viel einfacher ist, als er aus dem Vorstehenden entnommen werden kann. Wir setzen also voraus, daß für alle $\nu$, die eine Zahl $\nu'$ übersteigen,

$$\frac{1 + \vartheta + a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}} < \vartheta < 1$$

[1]) Näheres darüber siehe im nächsten Paragraphen.

[2]) Nur für $n = 1$ sind die beiden letzten Brüche nicht kleiner als der erste. Jedoch ist dieser Fall ohnehin interesselos, da für die regelmäßigen Kettenbrüche ja immer die sehr viel mehr als Satz V sagende Fehlerformel gilt: $\left| \frac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} - a_1^{(0)} \right| < \frac{1}{A_0^{(\nu)2}}$.

ist. Der a. a. O., pag. 24 gegebene Beweis bleibt dann vollkommen in Kraft, sobald wir zeigen können, daß für $\nu > \nu'$ auch

$$\lambda_\nu = \frac{1 + a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}} \leq \vartheta$$

wird. Nun sind a. a. O. die Zahlen $\frac{1}{a_n^{(\nu)}}, \frac{a_i^{(\nu)}}{a_n^{(\nu)}}$ echte Brüche, also gewiß $\lambda_\nu < n$. Anderseits ist auch für $\nu > \nu'$:

$$\lambda_\nu = \frac{1 + a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \cdots + a_{n-1}^{(\nu)} + \frac{1}{a_n^{(\nu+1)}} + \frac{a_1^{(\nu+1)}}{a_n^{(\nu+1)}} + \cdots + \frac{a_{n-2}^{(\nu+1)}}{a_n^{(\nu+1)}}}{a_n^{(\nu)}}$$

$$< \frac{\vartheta\, a_n^{(\nu)} - \vartheta + \lambda_{\nu+1} - \frac{a_{n-1}^{(\nu+1)}}{a_n^{(\nu+1)}}}{a_n^{(\nu)}}$$

$$= \frac{\vartheta\, a_n^{(\nu)} - \vartheta + \lambda_{\nu+1} - (a_n^{(\nu)} - a_n^{(\nu)})}{a_n^{(\nu)}}.$$

Also durch leichte Reduktion:

$$\lambda_\nu - \vartheta \leq \frac{\lambda_{\nu+1} - \vartheta - (\vartheta + 1)(a_n^{(\nu)} - a_n^{(\nu)})}{a_n^{(\nu)}}$$

$$< \frac{\lambda_{\nu+1} - \vartheta}{a_n^{(\nu)}}.$$

Setzt man diese Ungleichung für eine Reihe aufeinanderfolgender $\nu$-Werte an, so erhält man durch Multiplikation:

$$\lambda_\nu - \vartheta < \frac{\lambda_{\nu+\varkappa} - \vartheta}{a_n^{(\nu)}\, a_n^{(\nu+1)} \ldots a_n^{(\nu+\varkappa-1)}}$$

$$< \frac{n - \vartheta}{a_n^{(\nu)}\, a_n^{(\nu+1)} \ldots a_n^{(\nu+\varkappa-1)}} \quad (\text{für } \nu > \nu').$$

Der hier auftretende Nenner ist aber unter Benutzung von Formel (7) meiner Habilitationsschrift gleich:

$$\frac{A_0^{(\nu+\varkappa-1)} + A_0^{(\nu+\varkappa)} a_1^{(\nu+\varkappa-1)} + \cdots + A_0^{(\nu+\varkappa+n-1)} a_n^{(\nu+\varkappa-1)}}{A_0^{(\nu-1)} + A_0^{(\nu)} a_1^{(\nu-1)} + \cdots + A_0^{(\nu+n-1)} a_n^{(\nu-1)}},$$

wächst also bei festbleibendem $\nu$ mit $\varkappa$ ins Unendliche. Daher folgt $\lambda_\nu - \vartheta \leqq 0$ oder $\lambda_\nu \leqq \vartheta$ für $\nu > \nu'$; w. z. b. w.

## § 3.

### Untersuchung für $\vartheta = 1$.

Indem wir zum eigentlichen Gegenstand dieser Arbeit zurückkehren, soll jetzt untersucht werden, inwieweit bei den Theoremen II und III des vorigen Paragraphen auch der Wert $\vartheta = 1$ zulässig ist. Wir setzen daher jetzt

$$(32) \quad |a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leqq |a_n^{(\nu)}| - 1 \quad \text{für } \nu \geqq 0$$

voraus. Wie pag. 423 gezeigt wurde, bleiben dann die Zahlen

$$H_i^{(\lambda)} = a_0^{(0)} A_i^{(\lambda)} - a_i^{(0)} A_0^{(\lambda)}\,[1]$$

absolut unter einer von $\lambda$ unabhängigen Schranke, da ja bei der Ableitung dieser Tatsache der Wert $\vartheta = 1$ ausdrücklich zugelassen war. Wenn sich nun sogar

$$\lim_{\lambda=\infty} H_i^{(\lambda)} = 0$$

herausstellt, so ergibt sich die Konvergenz wörtlich wie im vorigen Paragraphen. Wenn aber diese Grenzbeziehung nicht erweisbar ist, so findet gleichwohl Konvergenz statt, sobald nur

[1]) Es ist vielleicht nicht überflüssig, darauf aufmerksam zu machen, daß hier das Auftreten der Zahlen $a_i^{(0)}$ durchaus nicht schon die Konvergenz voraussetzt. Die $a_i^{(0)}$ sind lediglich durch die Gleichungen (21) definiert, nicht etwa wie in § 1 durch:

$$a_i^{(0)} = a_0^{(0)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}.$$

Daß diese letzte Beziehung tatsächlich statthat, und somit die Kette konvergiert, bleibt stets Gegenstand eines eigenen Beweises.

$$\lim_{\lambda=\infty} |A_0^{(\lambda)}| = \infty$$

wird: denn da $H_i^{(\lambda)}$ endlich bleibt, so folgt dann:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{H_i^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)}} = 0; \quad \text{d. h.} \lim_{\lambda=\infty} \left( a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)}} - a_i^{(0)} \right) = 0,$$

wodurch wieder die Konvergenz evident wird.

Wir wollen daher zuvörderst das Wachstum der Zahlen $|A_0^{(\lambda)}|$ unter der Annahme (32) untersuchen. Als erstes Resultat beweisen wir, daß die $|A_0^{(\lambda)}|$ von $\lambda = 1$ ab mit $\lambda$ monoton wachsen, d. h. es gilt die Ungleichung:

$$|A_0^{(\lambda+1)}| \geqq |A_0^{(\lambda)}| \quad (\lambda \geqq 1).$$

Die Behauptung ist evident für $\lambda = 1, 2, \ldots n$; ihre Allgemeingültigkeit ergibt sich durch vollständige Induktion. Angenommen nämlich, es sei bereits bewiesen:

$$|A_0^{(1)}| \leqq |A_0^{(2)}| \leqq \ldots \leqq |A_0^{(\lambda+n-1)}| \leqq |A_0^{(\lambda+n)}|,$$

was jedenfalls für $\lambda = 1$ zutrifft. Es ist dann mit Rücksicht auf Voraussetzung (32):

$$|A_0^{(\lambda+n+1)}| = |a_0^{(\lambda)} A_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)} A_0^{(\lambda+1)} + \cdots + a_n^{(\lambda)} A_0^{(\lambda+n)}|$$

$$\geqq |a_n^{(\lambda)} A_0^{(\lambda+n)}| - (|a_0^{(\lambda)} A_0^{(\lambda)}| + |a_1^{(\lambda)} A_0^{(\lambda+1)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\lambda)} A_0^{(\lambda+n-1)}|)$$

$$\geqq |a_n^{(\lambda)} A_0^{(\lambda+n)}| - (|a_0^{(\lambda)}| + |a_1^{(\lambda)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\lambda)}|) |A_0^{(\lambda+n-1)}|$$

$$\geqq |a_n^{(\lambda)} A_0^{(\lambda+n)}| - (|a_n^{(\lambda)}| - 1) |A_0^{(\lambda+n-1)}|.$$

Also auch, wenn man beiderseits $|A_0^{(\lambda+n)}|$ subtrahiert:

$$|A_0^{(\lambda+n+1)}| - |A_0^{(\lambda+n)}| \geqq (|a_n^{(\lambda)}| - 1)(|A_0^{(\lambda+n)}| - |A_0^{(\lambda+n-1)}|) \geqq 0.$$

Es folgt hieraus $|A_0^{(\lambda+n+1)}| \geqq |A_0^{(\lambda+n)}|$, womit die Behauptung vollständig erwiesen ist.

Wir können aber jetzt das Wachstum der $|A_0^{(\lambda)}|$ noch genauer bestimmen. Denn nachdem das monotone Wachstum für $\lambda \geqq 1$ festgestellt ist, besteht auch die soeben daraus abgeleitete Ungleichung

$$|A_0^{(\lambda+n+1)}| - |A_0^{(\lambda+n)}| \geqq (|a_n^{(\lambda)}| - 1)(|A_0^{(\lambda+n)}| - |A_0^{(\lambda+n-1)}|)$$

für $\lambda \geqq 1$ zu Recht. Aus dieser folgt dann, indem man sie für $\lambda = 1, 2, \ldots \lambda$ anwendet:

$$|A_0^{(\lambda+n+1)}| - |A_0^{(\lambda+n)}| \geqq |a_0^{(0)}|(|a_n^{(1)}| - 1)(|a_n^{(2)}| - 1)\ldots(|a_n^{(\lambda)}| - 1);$$

und hieraus endlich:

$$|A_0^{(\lambda+n+1)}| > |a_0^{(0)}| + |a_0^{(0)}|(|a_n^{(1)}| - 1) + |a_0^{(0)}|(|a_n^{(1)}| - 1)(|a_n^{(2)}| - 1)$$
$$+ \cdots + |a_0^{(0)}|(|a_n^{(1)}| - 1)(|a_n^{(2)}| - 1) \cdots (|a_n^{(\lambda)}| - 1).$$

Wenn daher die unendliche Reihe

$$(33) \qquad \begin{aligned} &(|a_n^{(1)}| - 1) + (|a_n^{(1)}| - 1)(|a_n^{(2)}| - 1) \\ &+ (|a_n^{(1)}| - 1)(|a_n^{(2)}| - 1)(|a_n^{(3)}| - 1) + \cdots \end{aligned}$$

divergiert, so ist gewiß:

$$\lim_{\lambda=\infty} |A_0^{(\lambda+n+1)}| = \infty,$$

und daher nach den Erörterungen zu Beginn dieses Paragraphen die Kette konvergent. Um auch die unbedingte Konvergenz behaupten zu können, werden wir verlangen müssen, daß unsere Bedingungen erhalten bleiben, wenn man darin die oberen Indices aller $a_k^{(\nu)}$ um eine beliebige Zahl $\lambda$ vermehrt; dann sind nämlich auch für die Ketten

$$\begin{bmatrix} a_0^{(\lambda)}, & a_0^{(\lambda+1)}, & a_0^{(\lambda+2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(\lambda)}, & a_n^{(\lambda+1)}, & a_n^{(\lambda+2)}, & \ldots \end{bmatrix} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots \infty)$$

die gleichen Konvergenzbedingungen erfüllt. Diese Forderung ist aber schon von selbst befriedigt. Denn wenn man in der Reihe (33) die oberen Indices aller $a_k^{(\nu)}$ um $\lambda$ erhöht, so entsteht eine Reihe, die aus (33) offenbar auch durch Weglassung der ersten $\lambda$ Glieder und Unterdrückung eines allen Gliedern gemeinsamen Faktors gewonnen werden kann, die also ebenfalls divergent ist. Wir erhalten also:

**Theorem IV.** Wenn für $\nu > 1$ durchweg die Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leq |a_n^{(\nu)}| - 1$$

gilt,[1]) und wenn außerdem die unendliche Reihe

$$(|a_n^{(1)}| - 1) + (|a_n^{(1)}| - 1)(|a_n^{(2)}| - 1)$$
$$+ (|a_n^{(1)}| - 1)(|a_n^{(2)}| - 1)(|a_n^{(3)}| - 1) + \cdots$$

divergiert, so ist die Kette

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix}$$

unbedingt konvergent.

Man bemerke, daß die einfacher gebaute Reihe

$$(34) \qquad |a_0^{(1)}| + |a_0^{(1)} a_0^{(2)}| + |a_0^{(1)} a_0^{(2)} a_0^{(3)}| + \ldots$$

infolge der geforderten Ungleichungen kleinere Glieder hat als die vorige. Die Kette ist daher a fortiori unbedingt konvergent, wenn die Reihe (34) divergiert. Dies trifft insbesondere in dem wichtigen Fall, wenn alle $a_0^{(\nu)} = 1$ sind, stets zu.

Wir wenden uns jetzt zu der zweiten Möglichkeit, daß die Reihe (29) konvergiert. Dann kann gleichwohl $\lim\limits_{\lambda=\infty} |A_0^{(\lambda)}| = \infty$ sein, und in diesem Fall ist die Kette sicher wieder konvergent. Andernfalls aber nähern sich die Zahlen $|A_0^{(\lambda)}|$, da sie von $\lambda = 1$ ab mit $\lambda$ monoton wachsen, einem bestimmten endlichen Grenzwerte:

$$\lim_{\lambda=\infty} |A_0^{(\lambda)}| = A,$$

der von keinem $|A_0^{(\lambda)}|$ $(\lambda > 1)$ an Größe übertroffen wird, also wegen $A_0^{(n+1)} = a_0^{(0)} \neq 0$ jedenfalls größer als Null ist. Nach den auch für $\vartheta = 1$ gültigen Gleichungen (21) in § 2 hat man:

[1]) Daß wir beim Beweis auch für $\nu = 0$ diese Ungleichung vorausgesetzt hatten, schadet natürlich wieder so wenig wie bei Theorem II.

$$a_0^{(0)} \lim_{s=\infty} \frac{A_i^{(\nu_s)}}{A_0^{(\nu_s)}} = a_i^{(0)},$$

und da jetzt $|A_0^{(\nu_s)}| \leq A$ ist, so folgt hieraus:

$$\lim_{s=\infty} (a_0^{(0)} A_i^{(\nu_s)} - a_i^{(0)} A_0^{(\nu_s)}) = 0.$$

Oder auch unter Anwendung der früheren Bezeichnung:

$$\lim_{s=\infty} H_i^{(\nu_s)} = 0,$$

und daher jedenfalls:

(35) $$\underline{\lim}_{\lambda=\infty} |H_i^{(\lambda)}| = 0.$$

Außerdem ist auf pag. 423 gezeigt, daß $|H_i^{(\lambda+n)}|$ nicht größer ist als die größte der Zahlen:

$$|H_i^{(\lambda)}|, \quad |H_i^{(\lambda+1)}|, \quad \ldots \quad |H_i^{(\lambda+n-1)}|.$$

Nehmen wir daher zuerst den Fall $n = 1$, so besagt dies (da dann auch für $i$ nur der Wert 1 Bedeutung hat):

$$|H_1^{(\lambda+1)}| < |H_1^{(\lambda)}|.$$

Die Zahlen $|H_1^{(\lambda)}|$ nehmen also mit wachsendem $\lambda$ monoton ab, und haben anderseits nach (35) den unteren Limes Null; sie nähern sich daher schlechtweg der Grenze Null, also:

$$\lim_{\lambda=\infty} (a_0^{(0)} A_1^{(\lambda)} - a_1^{(0)} A_0^{(\lambda)}) = 0.$$

Dividiert man dies durch $\lim_{\lambda=\infty} |A_0^{(\lambda)}| = A > 0$, so kommt:

$$\lim_{\lambda=\infty} \left( a_0^{(0)} \frac{A_1^{(\lambda)}}{A_0^{(\lambda)}} - a_1^{(0)} \right) = 0.$$

Das besagt aber, daß die Kette konvergiert. Bei Ketten erster Ordnung findet also auch für $\vartheta = 1$ stets Konvergenz statt, ob der Grenzwert $\lim_{\lambda=\infty} |A_0^{(\lambda)}|$ unendlich oder endlich ist. Wir erhalten damit das Fundamentalkriterium des Herrn Pringsheim:

Der Kettenbruch $a_1^{(0)} + \frac{a_0^{(1)}|}{|a_1^{(1)}} + \frac{a_0^{(2)}|}{|a_1^{(2)}} + \frac{a_0^{(3)}|}{|a_1^{(3)}} + \cdots$

ist unbedingt konvergent, wenn für $\nu \geqq 1$ durchweg $|a_0^{(\nu)}| \leqq |a_1^{(\nu)}| - 1$ ist.

Nachdem die Ketten erster Ordnung hiemit vollständig erledigt sind, wollen wir von jetzt ab ausdrücklich $n > 1$ voraussetzen. Dann gilt folgendes:

**Theorem V.** Wenn für $\nu \geqq 1$ durchweg die Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leqq |a_n^{(\nu)}| - 1$$

gilt, und wenn außerdem für alle $\nu$ von einer gewissen Stelle $\nu \geqq \nu'$ ab

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leqq \frac{\Theta}{2(n-1)}$$

ist, wo $\Theta$ eine positive Zahl kleiner als 1 bedeutet: dann ist die Kette $n\,(>1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix}$$

unbedingt konvergent.

Offenbar genügt es wieder, die Konvergenz schlechthin zu beweisen, die dann sicher eine unbedingte ist. Auch bedeutet es wie früher keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir die erste Ungleichung des Theorems auch für $\nu = 0$ als erfüllt voraussetzen und uns damit auf den Boden unserer früheren Untersuchungen stellen. Wenn sich dann $\lim_{\nu=\infty} |A_0^{(\nu)}| = \infty$ oder $\lim_{\nu=\infty} H_i^{(\nu)} = 0$ herausstellt, so folgt daraus, wie wir wissen, sogleich die Konvergenz der Kette. Wir wollen daher im Gegenteil voraussetzen, man habe gleichzeitig:

$$(\alpha) \qquad \lim_{\nu=\infty} |A_0^{(\nu)}| = A,$$

$$(\beta) \qquad \lim_{\nu=\infty} H_i^{(\nu)} = \eta_i > 0.$$

letzteres wenigstens für einen der Werte $i = 1, 2, \ldots n$. Wir wollen zeigen, daß diese beiden Annahmen nicht zusammen mit den Bedingungen des Theorems bestehen können.

Von den $n$ Zahlen

$$|H_i^{(\nu)}|, \ |H_i^{(\nu+1)}|, \ldots |H_i^{(\nu+n-1)}|$$

muß wenigstens eine $\geqq \eta_i$ sein. Denn wären sie alle $\leqq \zeta_i$, wo $\zeta_i < \eta_i$ ist, so würde die Zahl $|H_i^{(\nu+n)}|$, welche ja nach pag. 423 höchstens gleich der größten der obigen $n$ Zahlen ist, ebenfalls $\leqq \zeta_i$ sein. Durch Wiederholung des gleichen Schlusses folgt dann sukzessive, daß auch die Zahlen

$$|H_i^{(\nu+n+1)}|, \ |H_i^{(\nu+n+2)}|, \ |H_i^{(\nu+n+3)}|, \ldots$$

sämtlich $\leqq \zeta_i < \eta_i$ sind, was der Annahme ($\beta$) widerstreitet.

Bezeichnet man daher die absolut größte der $n$ Zahlen:

$$\frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}, \ \frac{H_i^{(\nu+1)}}{A_0^{(\nu+1)}}, \ldots \frac{H_i^{(\nu+n-1)}}{A_0^{(\nu+n-1)}}, \tag{36}$$

oder, falls mehrere den absolut größten Betrag haben, eine beliebige von diesen, mit $G_i^{(\nu)}$, so ist wegen $|A_0^{(\nu)}| \leqq A$ auch für alle $\nu \geqq 0$:

$$|G_i^{(\nu)}| \geqq \frac{\eta_i}{A}. \tag{37}$$

Ferner folgt aus den Annahmen ($\alpha$), ($\beta$):

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left| \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| = \frac{\eta_i}{A},$$

und daher für alle genügend großen Werte von $\nu$, etwa für $\nu \geqq N$:

$$\left| \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < \frac{\eta_i + \varepsilon}{A}, \quad (\nu \geqq N), \tag{38}$$

wo $\varepsilon$ eine beliebig kleine positive Zahl bedeuten darf.

Nach diesen Vorbereitungen setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{a_k^{(\nu)} A_0^{(\nu+k)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} = l_k^{(\nu)} \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots n \\ \nu = 1, 2, \ldots \infty \end{pmatrix}.$$

Es ist dann, wie man sofort aus Formel (1) entnimmt:

$$l_0^{(\nu)} + l_1^{(\nu)} + \cdots + l_n^{(\nu)} = 1,$$

$$\frac{A_i^{(\nu+n+1)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} = l_0^{(\nu)} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} + l_1^{(\nu)} \frac{A_i^{(\nu+1)}}{A_0^{(\nu+1)}} + \cdots + l_n^{(\nu)} \frac{A_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}}.$$

Nun ist aber nach der Definition von $H_i^{(\nu)}$ (Formel (25)):

$$a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = a_i^{(0)} + \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}},$$

sodaß sich die letzte Gleichung nach Multiplikation mit $a_0^{(0)}$ auch folgendermaßen schreiben läßt:

$$a_i^{(0)} + \frac{H_i^{(\nu+n+1)}}{A_0^{(\nu+n+1)}}$$

$$= l_0^{(\nu)}\left(a_i^{(0)} + \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}\right) + l_1^{(\nu)}\left(a_i^{(0)} + \frac{H_i^{(\nu+1)}}{A_0^{(\nu+1)}}\right) + \cdots + l_n^{(\nu)}\left(a_i^{(0)} + \frac{H_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}}\right).$$

Hier hebt sich $a_i^{(0)}$ auf der linken Seite gegen

$$(l_0^{(\nu)} + l_1^{(\nu)} + \cdots + l_n^{(\nu)})\, a_i^{(0)} = a_i^{(0)}$$

auf der rechten Seite. Subtrahiert man dann noch beiderseits die Zahl $\frac{H_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}}$, so kommt:

$$\frac{H_i^{(\nu+n+1)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} - \frac{H_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}}$$

$$= l_0^{(\nu)} \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} + \cdots + l_{n-1}^{(\nu)} \frac{H_i^{(\nu+n-1)}}{A_0^{(\nu+n-1)}} + (l_n^{(\nu)} - 1) \frac{H_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}},$$

woraus weiter unter Berücksichtigung von Ungleichung (38) folgt:

$$\left| \frac{H_i^{(\nu+n+1)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} - \frac{H_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}} \right|$$

$$(39) \quad < \left| l_0^{(\nu)} \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| + \cdots + \left| l_{n-1}^{(\nu)} \frac{H_i^{(\nu+n-1)}}{A_0^{(\nu+n-1)}} \right| + \left| (l_n^{(\nu)}-1) \frac{H_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}} \right|$$

$$< (|l_0^{(\nu)}| + |l_1^{(\nu)}| + \cdots + |l_{n-1}^{(\nu)}| + |l_n^{(\nu)} - 1|) \frac{\eta_i + \varepsilon}{A},$$

sobald nur $\nu > N$ ist.

Da $|A_0^{(\nu)}|$ von $\nu = 1$ ab mit $\nu$ monoton wächst, so folgt aus der Definitionsgleichung von $l_k^{(\nu)}$: $|l_k^{(\nu)}| \leq |a_k^{(\nu)}|$. Also mit Rücksicht auf die Bedingungen des Theorems V:

$$|l_0^{(\nu)}| + |l_1^{(\nu)}| + \cdots + |l_{n-1}^{(\nu)}| \leq |a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}|$$
$$< \frac{\Theta}{2(n-1)} \quad (\text{für } \nu \geq \nu');$$

ebenso auch:

$$\begin{aligned} |1 - l_n^{(\nu)}| &= |l_0^{(\nu)} + l_1^{(\nu)} + \cdots + l_{n-1}^{(\nu)}| \\ &\leq |l_0^{(\nu)}| + |l_1^{(\nu)}| + \cdots + |l_{n-1}^{(\nu)}| \\ &\leq \frac{\Theta}{2(n-1)} \qquad (\text{für } \nu > \nu'). \end{aligned}$$

Daher geht Ungleichung (39) über in:

$$\left| \frac{H_i^{(\nu+n+1)}}{A_0^{(\nu+n+1)}} - \frac{H_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu+n)}} \right| < \frac{\Theta}{n-1} \frac{\eta_i + \varepsilon}{A} \quad \left(\text{für } \nu \begin{cases} \geq \nu' \\ \geq N \end{cases}\right).$$

Man hat also, sobald $\nu$ eine gewisse Grenze $\nu''$ erreicht oder übersteigt:

$$\left| \frac{H_i^{(\nu+1)}}{A_0^{(\nu+1)}} - \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < \frac{\Theta}{n-1} \frac{\eta_i + \varepsilon}{A} \quad (\nu \geq \nu'');$$

daher auch:

$$\left| \frac{H_i^{(\nu+2)}}{A_0^{(\nu+2)}} - \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < 2 \frac{\Theta}{n-1} \frac{\eta_i + \varepsilon}{A}$$

$$\left| \frac{H_i^{(\nu+3)}}{A_0^{(\nu+3)}} - \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < 3 \frac{\Theta}{n-1} \frac{\eta_i + \varepsilon}{A}$$

— — — — — — — — —

$$\left| \frac{H_i^{(\nu+n-1)}}{A_0^{(\nu+n-1)}} - \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < (n-1) \frac{\Theta}{n-1} \frac{\eta_i + \varepsilon}{A}.$$

Da die rechten Seiten in all diesen Ungleichungen sämtlich nicht größer als $\Theta \frac{\eta_i + \varepsilon}{A}$ sind, so erhält man insbesondere auch:

$$\left| G_i^{(\nu)} - \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < \Theta \frac{\eta_i + \varepsilon}{A} \quad (\text{für } \nu \geq \nu''),$$

wo $G_i^{(\nu)}$ wieder die gleiche Bedeutung hat wie pag. 433 Mitte.

Nun hat aber nach (35) $|H_i^{(\nu)}|$ den unteren Limes 0; man kann also $\nu\,(> \nu'')$ derart auswählen, daß auch

$$\left| \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < \varepsilon$$

ist; für solche Werte von $\nu$ folgt dann:

$$|G_i^{(\nu)}| < \left| G_i^{(\nu)} - \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| + \left| \frac{H_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} \right| < \Theta \frac{\eta_i + \varepsilon}{A} + \varepsilon.$$

Da aber $\Theta < 1$ und $\varepsilon$ beliebig klein ist, so widerspricht dies der für alle $\nu$ gültigen Ungleichung (37). Daraus schließen wir, daß die Annahmen ($\alpha$), ($\beta$) nicht beide zugleich mit den Bedingungen des Theorems V verträglich sind. Wir müssen daher mindestens eine der zwei Annahmen ($\alpha$), ($\beta$) als irrtümlich fallen lassen; dann konvergiert aber die Kette. W. z. b. w.

Weiter ist noch folgendes von Interesse. Die in Theorem III behaupteten Ungleichungen

$$(40)\qquad \begin{gathered} \vartheta\,|a_n^{(0)}| \geq |a_0^{(0)}| + |a_1^{(0)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(0)}|, \\ |a_1^{(0)} - a_1^{(0)}| + |a_2^{(0)} - a_2^{(0)}| + \cdots + |a_n^{(0)} - a_n^{(0)}| \leq \vartheta \end{gathered}$$

bleiben nach ihrer Herleitung auch für $\vartheta = 1$ bestehen (sofern dann die Kette überhaupt konvergiert). Dagegen ist die Beziehung

$$\lim_{\nu=\infty} (a_0^{(0)} A_i^{(\nu)} - a_i^{(0)} A_0^{(\nu)}) = 0$$

nicht mehr allgemein richtig, wie schon das Beispiel der Kette erster Ordnung

$$\begin{bmatrix} 1, & -1, & -1, & -1, & \ldots \\ 2, & 2, & 2, & 2, & \ldots \end{bmatrix}$$

beweist. Bei diesem ist nämlich, wie leicht zu sehen:

$$a_0^{(0)} = 1; \quad A_0^{(\nu)} = \nu - 1; \quad A_1^{(\nu)} = \nu \quad (\nu > 1)$$

$$a_1^{(0)} = a_0^{(0)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = \lim_{\nu=\infty} \frac{\nu}{\nu - 1} = 1.$$

Also hat man:

$$a_0^{(0)} A_1^{(\nu)} - a_1^{(0)} A_0^{(\nu)} = \nu - (\nu - 1) = 1,$$

und die linke Seite kann daher nicht den Grenzwert Null haben.[1])

Einige Bemerkungen knüpfen sich noch an den Fall, daß

$$\vartheta = 1; \quad \lim_{\nu=\infty} |A_0^{(\nu)}| = A = \text{endlich}$$

ist, und die Kette trotzdem konvergiert. Dann ist nämlich stets:

$$\lim_{\nu=\infty} (a_0^{(0)} A_i^{(\nu)} - a_i^{(0)} A_0^{(\nu)}) = 0,$$

da ja diese Beziehung jetzt nichts weiter aussagt als:

$$\lim_{\nu=\infty} \left( a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} - a_i^{(0)} \right) = 0,$$

d. h. als die Konvergenz.

Außerdem gestattet aber jetzt die erste Ungleichung (40) eine erhebliche Verschärfung. Denn wenn man die Ungleichung (18) durch $|A_0^{(\nu)}|$ dividiert und mit $a_0^{(0)}$ multipliziert, so erhält man durch Übergang zur Grenze $\nu = \infty$:

$$\vartheta \, |a_n^{(0)}| \geq \frac{\vartheta \, |a_0^{(0)}|}{A} + |a_0^{(0)}| + |a_1^{(0)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(0)}|,$$

worin die gesuchte Verschärfung ausgesprochen ist. Man erhält daraus speziell für $\vartheta = 1$:

[1]) Auch nicht den unteren Limes 0. Dies steht nicht im Widerspruch mit Ungleichung (35), da diese nur unter der Voraussetzung „$\lim_{\nu=\infty} |A_0^{(\nu)}| = \text{endlich}$" abgeleitet wurde.

$$(41) \qquad \frac{|a_0^{(0)}| + |a_1^{(0)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(0)}|}{|a_n^{(0)}|} \leq 1 - \frac{|a_0^{(0)}|}{|a_n^{(0)}| A}.$$

Diese Ungleichung gilt auch dann, wenn die Konvergenz der Kette noch gar nicht feststeht, und die Zahlen $a_i^{(0)}$ demgemäß nur durch die Gleichungen (21) definiert sind.[1]) Sie kann dann unter Umständen sogar zur nachträglichen Feststellung der Konvergenz dienlich sein, wie die folgenden Betrachtungen lehren.

Zunächst folgt aus der Endlichkeit von $\lim_{\nu=\infty} |A_0^{(\nu)}|$ auch die von $\lim_{\nu=\infty} |A_{0,1}^{(\nu)}|$, und daraus dann sukzessive die Endlichkeit von $\lim_{\nu=\infty} |A_{0,2}^{(\nu)}|$, $\lim_{\nu=\infty} |A_{0,3}^{(\nu)}|$, etc.

Denn nach Formel (8) hat man:

$$\begin{aligned} a_0^{(0)} A_1^{(\nu)} &= a_0^{(0)} a_1^{(0)} A_{n,1}^{(\nu-1)} + a_0^{(0)} A_{0,1}^{(\nu-1)} \\ &= a_1^{(0)} A_0^{(\nu)} + a_0^{(0)} A_{0,1}^{(\nu-1)}. \end{aligned}$$

Daher auch:

$$\begin{aligned} a_0^{(0)} A_{0,1}^{(\nu-1)} &= a_0^{(0)} A_1^{(\nu)} - a_1^{(0)} A_0^{(\nu)} \\ &= H_1^{(\nu)} + (a_1^{(0)} - a_1^{(0)}) A_0^{(\nu)}; \end{aligned}$$

aber auf der rechten Seite bleibt hier mit wachsendem $\nu$ alles endlich, also bleibt es auch die linke Seite, w. z. b. w. Wir setzen demgemäß:

$$\lim_{\nu=\infty} |A_{0,\lambda}^{(\nu)}| = A_\lambda.$$

Analog zu (41) ist dann auch:

$$\frac{|a_0^{(\lambda)}| + |a_1^{(\lambda)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\lambda)}|}{|a_n^{(\lambda)}|} < 1 - \frac{|a_0^{(\lambda)}|}{|a_n^{(\lambda)}| A_\lambda},$$

wobei die Zahlen $a_i^{(\lambda)}$ natürlich durch die Gleichungen (22) zu

[1]) Der Beweis bleibt der gleiche; nur muß beim Grenzübergang natürlich $\nu$ auf die Werte $\nu_s$ beschränkt werden.

definieren sind. Hieraus folgt nun unter Beibehaltung der Bezeichnung und Schlußweise von pag. 423:

$$|H_i^{(\lambda+n)}| \leq \left(1 - \frac{|a_0^{(\lambda)}|}{|a_n^{(\lambda)}| A_\lambda}\right) M_i^{(\lambda)}.$$

Wie damals, können wir daraus auch jetzt die Konvergenz folgern, sobald $\frac{|a_0^{(\lambda)}|}{|a_n^{(\lambda)}| A_\lambda}$ über einer von $\lambda$ unabhängigen positiven Zahl $\sigma$ bleibt; alsdann ist nämlich wieder

$$|H_i^{(\lambda+n)}| \leq \vartheta M_i^{(\lambda)}, \qquad (\vartheta = 1 - \sigma < 1);$$

und der weitere Beweis bleibt wörtlich der gleiche wie pag. 423 f. Ob nun diese Forderung

$$\frac{|a_0^{(\lambda)}|}{|a_n^{(\lambda)}| A_\lambda} > \sigma$$

erfüllt ist, dürfte im allgemeinen schwer zu entscheiden sein. In einem Fall ist sie aber stets erfüllt, nämlich bei periodischen Ketten. Wir nennen eine Kette $k$-gliedrig periodisch, wenn von einem gewissen Wert $\nu$ ab stets

$$a_i^{(\nu+k)} = a_i^{(\nu)} \quad (i = 0, 1, \ldots n)$$

ist. Alsdann ist offenbar auch:

$$A_{\nu+k} = A_\nu.$$

Daher kommt für $\frac{|a_0^{(\lambda)}|}{A_\lambda}$ überhaupt nur eine endliche Anzahl verschiedener Werte in Betracht; also bleibt

$$\frac{|a_0^{(\lambda)}|}{A_\lambda} > \varrho,$$

wo $\varrho$ eine von $\lambda$ unabhängige positive Zahl bedeutet. Außerdem folgt aber aus der auch für $\vartheta = 1$ gültigen Ungleichung (28):

$$|a_n^{(\lambda)} - a_n^{(\lambda)}| \leq 1,$$

und hieraus wieder:

$$|a_n^{(\lambda)}| < |a_n^{(\lambda)}| + 1.$$

Wegen der Periodizität bleibt $|a_n^{(\lambda)}|$ unter einer von $\lambda$ unabhängigen Schranke $R$, und folglich $|a_n^{(\lambda)}| < R + 1.$[1]) Daher ist auch:

$$\frac{|a_0^{(\lambda)}|}{|a_n^{(\lambda)}| A_\lambda} > \frac{\varrho}{R+1};$$

dieser Quotient bleibt also über einer von $\lambda$ unabhängigen positiven Zahl, w. z. b. w. Wir erhalten demnach:

**Theorem VI.** Wenn bei einer **periodischen** Kette für $\nu > 1$ durchweg die Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leqq |a_n^{(\nu)}| - 1$$

statthat, so ist sie unbedingt konvergent.

Eigentlich ist das Theorem ja soeben bloß unter der Voraussetzung „$\lim\limits_{\nu=\infty} |A_0^{(\nu)}| = \text{endlich}$" bewiesen worden; aber im entgegengesetzten Fall ist die Kette ja ohnedies immer konvergent.

---

[1]) Es wäre falsch, aus der Periodizität etwa schließen zu wollen, daß $a_n^{(\nu+k)} = a_n^{(\nu)}$ ist, so daß für $a_n^{(\lambda)}$ überhaupt bloß eine endliche Anzahl verschiedener Werte in Betracht käme. Ein solcher Schluß würde die Konvergenz bereits voraussetzen. Denn nach den Definitionsgleichungen (22) ist:

$$(\alpha) \qquad a_n^{(\nu)} = a_0^{(\nu)} \lim_{s=\infty} \frac{A_{n,\nu}^{(\nu_s-\nu)}}{A_{0,\nu}^{(\nu_s-\nu)}},$$

$$(\beta) \qquad a_n^{(\nu+k)} = a_0^{(\nu+k)} \lim_{s=\infty} \frac{A_{n,\nu+k}^{(\nu_s-\nu-k)}}{A_{0,\nu+k}^{(\nu_s-\nu-k)}} = a_0^{(\nu)} \lim_{s=\infty} \frac{A_{n,\nu}^{(\nu_s-\nu-k)}}{A_{0,\nu}^{(\nu_s-\nu-k)}},$$

letzteres wegen der Periodizität. Bevor aber die Konvergenz der Kette bekannt ist, kann die Gleichheit der Grenzwerte in ($\alpha$) und ($\beta$) auf keine Weise gefolgert werden, weil die Zahlen $\nu_s - \nu$ mit wachsendem $s$ im allgemeinen eine ganz andere Wertereihe durchlaufen werden wie die Zahlen $\nu_s - \nu - k$.

Weiteres vermag ich über den Fall $\vartheta = 1$ nicht auszusagen. Vermutlich ist in Theorem II überhaupt der Wert $\vartheta = 1$ ohne Nebenbedingungen zulässig. Wenn ich diese Vermutung auch nicht durch einen Beweis bestätigen kann, so gelang es mir doch anderseits auch nicht, eine erweislich divergente Kette ausfindig zu machen, bei der für $\nu \geqq 1$ durchweg

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leqq |a_n^{(\nu)}| - 1$$

wäre. Die Entscheidung dieser Frage scheint mit großen Schwierigkeiten verknüpft zu sein.

## § 4.

### Weitere Konvergenzkriterien.

In § 1 wurde gezeigt, daß zwei äquivalente Ketten entweder beide konvergent oder beide divergent sind. Eine Kette ist daher auch immer dann konvergent, wenn eine dazu äquivalente existiert, deren Elemente die Bedingungen eines der Theoreme I, II, IV, V, VI erfüllen. Von diesem Gedanken ausgehend, hat Herr Pringsheim für die Kettenbrüche aus seinem Fundamentalsatz eine Reihe weiterer Konvergenzkriterien abgeleitet.[1] In ähnlicher Weise kann man auch für Ketten $n^{\text{ter}}$ Ordnung vorgehen; doch sind die so gewonnenen Kriterien für $n > 1$ von komplizierter Bauart und dürften nur geringes Interesse beanspruchen. Erfolgreicher gestaltet sich die nachstehende Methode, welche auch für Kettenbrüche zu neuen Resultaten führt, die sich aus den bisher bekannten kaum dürften ableiten lassen.

In der die Kette $n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\left[\begin{matrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \ldots \end{matrix}\right] \tag{42}$$

[1] A. a. O. und: Über einige Konvergenzkriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. Diese Sitzungsberichte, Bd. 35 (1905), pag. 359 bis 380.

definierenden Rekursionsformel

$$(1) \qquad A_i^{(\nu+n+1)} = a_0^{(\nu)} A_i^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} A_i^{(\nu+1)} + \cdots + a_n^{(\nu)} A_i^{(\nu+n)}$$

ersetzen wir $\nu$ durch $\nu+1$; es kommt:

$$(1') \quad A_i^{(\nu+n+2)} = a_0^{(\nu+1)} A_i^{(\nu+1)} + a_1^{(\nu+1)} A_i^{(\nu+2)} + \cdots + a_n^{(\nu+1)} A_i^{(\nu+n+1)}.$$

Wenn man nun Gleichung (1) mit einer beliebigen Zahl $\delta_\nu$ multipliziert und dann von (1') subtrahiert, so erhält man:

$$(43) \quad A_i^{(\nu+n+2)} = b_0^{(\nu)} A_i^{(\nu)} + b_1^{(\nu)} A_i^{(\nu+1)} + \cdots + b_{n+1}^{(\nu)} A_i^{(\nu+n+1)},$$

wobei zur Abkürzung

$$\begin{aligned} - a_0^{(\nu)} \delta_\nu &= b_0^{(\nu)} \\ a_{i-1}^{(\nu+1)} - a_i^{(\nu)} \delta_\nu &= b_i^{(\nu)} \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \\ a_n^{(\nu+1)} + \delta_\nu &= b_{n+1}^{(\nu)} \end{aligned}$$

gesetzt wurde. Neben der Kette (42) betrachten wir nun auch noch die Kette $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(44) \qquad \begin{bmatrix} b_0^{(0)}, & b_0^{(1)}, & b_0^{(2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \quad - \\ b_{n+1}^{(0)}, & b_{n+1}^{(1)}, & b_{n+1}^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix},$$

deren Rekursionsformeln folgende sind:

$$B_i^{(\nu+n+2)} = b_0^{(\nu)} B_i^{(\nu)} + b_1^{(\nu)} B_i^{(\nu+1)} + \cdots + b_{n+1}^{(\nu)} B_i^{(\nu+n+1)}$$
$$(i = 0, 1, \ldots n+1; \; \nu = 0, 1, \ldots \infty);$$
$$B_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \qquad (i, k = 0, 1, \ldots n+1).$$

Damit die Forderung $b_0^{(\nu)} \neq 0$ für alle $\nu$ erfüllt ist, werden wir $\delta_\nu \neq 0$ voraussetzen.

Jede Zahlenfolge, welche der gleichen Rekursionsformel genügt, wie die $B_i^{(\nu)}$, läßt sich nach den Erörterungen zu Beginn des § 1 linear durch $B_0^{(\nu)}, B_1^{(\nu)}, \ldots B_{n+1}^{(\nu)}$ ausdrücken. Wegen Formel (43) kann man daher insbesondere den Ansatz machen:

$A_i^{(\nu)} = \gamma_{i,0} B_0^{(\nu)} + \gamma_{i,1} B_1^{(\nu)} + \cdots + \gamma_{i,n+1} B_{n+1}^{(\nu)}$ $(i = 0, 1, \ldots n)$,

wobei die Koeffizienten $\gamma_{i,k}$ von $\nu$ unabhängig sind. Man berechnet sie sehr einfach, indem man für $\nu$ gewisse Spezialwerte einsetzt; so folgt für $\nu = i$:

$$1 = \gamma_{i,i};$$

sodann für $\nu \neq i$ und $\nu \leq n$:

$$0 = \gamma_{i,\nu};$$

endlich für $\nu = n + 1$:

$$a_i^{(0)} = \gamma_{i,n+1}.$$

Setzt man die so berechneten Werte $\gamma_{i,k}$ oben ein, so kommt:

$$A_i^{(\nu)} = B_i^{(\nu)} + a_i^{(0)} B_{n+1}^{(\nu)} \quad (i = 0, 1, \ldots n).$$

Hieraus folgt endlich auch:

$$a_0^{(0)} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = a_0^{(0)} \frac{B_i^{(\nu)} + a_i^{(0)} B_{n+1}^{(\nu)}}{B_0^{(\nu)} + a_0^{(0)} B_{n+1}^{(\nu)}}$$

$$= a_0^{(0)} \frac{b_0^{(0)} \frac{B_i^{(\nu)}}{B_0^{(\nu)}} + a_i^{(0)} b_0^{(0)} \frac{B_{n+1}^{(\nu)}}{B_0^{(\nu)}}}{b_0^{(0)} + a_0^{(0)} b_0^{(0)} \frac{B_{n+1}^{(\nu)}}{B_0^{(\nu)}}}.$$

Wenn nun die Kette (44) konvergiert, so bezeichnen wir ihr Wertesystem mit $\beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, \ldots \beta_{n+1}^{(0)}$ und erhalten aus der letzten Gleichung, wenn $\nu$ unbegrenzt wächst:

$$a_0^{(0)} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = a_0^{(0)} \frac{\beta_i^{(0)} + a_i^{(0)} \beta_{n+1}^{(0)}}{b_0^{(0)} + a_0^{(0)} \beta_{n+1}^{(0)}} = \frac{\beta_i^{(0)} + a_i^{(0)} \beta_{n+1}^{(0)}}{-\delta_0 + \beta_{n+1}^{(0)}}.$$

Daher konvergiert auch die Kette (42), sobald nur der Nenner $\beta_{n+1}^{(0)} - \delta_0$ von Null verschieden ist. Man hat bei dieser Betrachtung den Vorteil, daß die Zahlen $\delta_\nu$, abgesehen von der Einschränkung $\delta_\nu \neq 0$, ganz willkürlich sind. Sobald es gelingt, sie derart zu wählen, daß die Kette (44) konver-

giert. und zugleich $\beta^{(0)}_{n+1} \neq \delta_0$ wird, dann konvergiert allemal auch die Kette (42).

Nach Theorem II ist nun die Kette (44) unbedingt konvergent, wenn für $\nu \geq 1$ durchweg die Ungleichung

$$|b_0^{(\nu)}| + |b_1^{(\nu)}| + \cdots + |b_n^{(\nu)}| \leq \vartheta\,(|b^{(\nu)}_{n+1}| - 1),$$

das heißt:

$$|a_0^{(\nu)}\delta_\nu| + |a_0^{(\nu+1)} - a_1^{(\nu)}\delta_\nu| + |a_1^{(\nu+1)} - a_2^{(\nu)}\delta_\nu| + \cdots$$
$$+ |a_{n-1}^{(\nu+1)} - a_n^{(\nu)}\delta_\nu| \leq \vartheta\,(|a_n^{(\nu+1)} + \delta_\nu| - 1)$$

besteht, wo $\vartheta < 1$ ist. Damit aber die Kette (42) ebenfalls konvergiert, muß außerdem noch die Zusatzbedingung

$$\beta^{(0)}_{n+1} \neq \delta_0$$

erfüllt sein, welche sich in folgender Weise umformen läßt.

Wegen der unbedingten Konvergenz der Kette (44) folgt, wenn man eine stets gebrauchte, auf die Kette (42) bezügliche Bezeichnung sinngemäß auf die Kette (44) überträgt:

$$b_0^{(1)} \lim_{\nu=\infty} \frac{B^{(\nu)}_{i,1}}{B^{(\nu)}_{0,1}} = \beta_i^{(1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots n+1),$$

und auch:

$$\beta^{(0)}_{n+1} = b^{(0)}_{n+1} + \frac{\beta_n^{(1)}}{\beta^{(1)}_{n+1}} = a_n^{(1)} + \delta_0 + \frac{\beta_n^{(1)}}{\beta^{(1)}_{n+1}},$$

sodaß sich die obige Zusatzbedingung in die Form setzen läßt:

$$a_n^{(1)} + \delta_0 + \frac{\beta_n^{(1)}}{\beta^{(1)}_{n+1}} \neq \delta_0,$$

oder:

$$a_n^{(1)} + \frac{\beta_n^{(1)}}{\beta^{(1)}_{n+1}} \neq 0. \tag{45}$$

Nun ergibt sich aber, wenn man Theorem III auf die Kette $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\begin{bmatrix} b_0^{(1)}, & b_0^{(2)}, & b_0^{(3)}, & \ldots \\ - & - & - & - \\ b^{(1)}_{n+1}, & b^{(2)}_{n+1}, & b^{(3)}_{n+1}, & \ldots \end{bmatrix}$$

anwendet, die Ungleichung:

$$\vartheta\,|\beta_{n+1}^{(1)}| \geq |b_0^{(1)}| + |\beta_1^{(1)}| + |\beta_2^{(1)}| + \cdots + |\beta_n^{(1)}|;$$

also auch insbesondere:

$$\left|\frac{\beta_n^{(1)}}{\beta_{n+1}^{(1)}}\right| < \vartheta,$$

mit Ausschluß der Gleichheit, da ja $|b_0^{(1)}| > 0$ ist. Demnach ist die Bedingung (45) gewiß erfüllt, wenn wir $|a_n^{(1)}| \geq \vartheta$ fordern. Dies führt zu dem folgenden sehr allgemeinen Kriterium:

**Theorem VII.** Wenn sich unendlich viele von Null verschiedene Zahlen $\delta_\nu$ bestimmen lassen, derart, daß für $\nu \geq 1$ durchweg die Ungleichung

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} &|a_0^{(\nu)}\delta_\nu| + |a_0^{(\nu+1)} - a_1^{(\nu)}\delta_\nu| + |a_1^{(\nu+1)} - a_2^{(\nu)}\delta_\nu| + \cdots \\ &\quad + |a_{n-1}^{(\nu+1)} - a_n^{(\nu)}\delta_\nu| \leq \vartheta\,(|a_n^{(\nu+1)} + \delta_\nu| - 1) \end{aligned}$$

besteht, wo $\vartheta$ eine positive Zahl kleiner als 1 bedeutet, und wenn außerdem

$$\text{b)}\qquad |a_n^{(1)}| \geq \vartheta$$

ist, so ist die Kette $n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix}$$

konvergent. Sie ist sogar **unbedingt** konvergent, wenn die Ungleichung

$$\text{c)}\qquad |a_n^{(\nu)}| \geq \vartheta$$

für jedes $\nu > 1$ besteht.

Der letzte Teil des Theorems ergibt sich offenbar wieder aus dem Umstand, daß die Bedingungen erhalten bleiben, wenn die oberen Indices aller $a_k^{(\mu)}$ um eine beliebige Zahl $\lambda$ erhöht werden. Wir machen zu dem Theorem noch folgenden

**Zusatz.** In Theorem VII dürfen die Zahlen $\delta_\nu$ auch alle oder zum Teil gleich Null sein. Wenn aber $\delta_1 = 0$

ist, so ist in der Bedingung b) das Gleichheitszeichen auszuschließen. Ebenso ist in der Bedingung c) das Gleichheitszeichen bei allen denjenigen $\nu$-Werten auszuschließen, für welche $\delta_\nu = 0$ ist.

Der Beweis ist folgender: Infolge der Bedingung a) des Theorems ist:

$$|a_n^{(\nu+1)} + \delta_\nu| - 1 \geqq 0.$$

Würde hier einmal Gleichheit stattfinden, so müßte auch jeder Term auf der linken Seite von a) verschwinden, also insbesondere:

$$|a_0^{(\nu)}\,\delta_\nu| = 0, \quad |a_0^{(\nu+1)} - a_1^{(\nu)}\,\delta_\nu| = 0,$$

was aber wegen $a_0^{(\nu)} \neq 0$, $a_0^{(\nu+1)} \neq 0$ nicht möglich ist. Es ist also:

$$|a_n^{(\nu+1)} + \delta_\nu| - 1 > 0,$$

und folglich kann man statt Ungleichung a) auch schreiben:

$$\frac{|a_0^{(\nu)}\,\delta_\nu| + |a_0^{(\nu+1)} - a_1^{(\nu)}\,\delta_\nu| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu+1)} - a_n^{(\nu)}\,\delta_\nu|}{|a_n^{(\nu+1)} + \delta_\nu| - 1} \leqq \vartheta.$$

Wird diese Ungleichung für gewisse $\nu$-Werte nur durch die Wahl $\delta_\nu = 0$ erfüllt, so kann der links stehende Ausdruck, wenn $\delta_\nu$ sich hinreichend wenig von Null unterscheidet, wegen der Stetigkeit jedenfalls nur um beliebig wenig die Zahl $\vartheta$ übertreffen. Man kann daher der Ungleichung

$$\frac{|a_0^{(\nu)}\,\delta_\nu| + |a_0^{(\nu+1)} - a_1^{(\nu)}\,\delta_\nu| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu+1)} - a_n^{(\nu)}\,\delta_\nu|}{|a_n^{(\nu+1)} + \delta_\nu| - 1} \leqq \vartheta + \varepsilon$$

durch lauter von Null verschiedene $\delta_\nu$ Genüge leisten, wie klein auch die positive Zahl $\varepsilon$ gewählt wird. Nimmt man insbesondere auch $\varepsilon < 1 - \vartheta$, so wird eben nach Theorem VII Konvergenz stattfinden, wenn noch $|a_n^{(1)}| > \vartheta + \varepsilon$ ist. Da aber $\varepsilon$ beliebig klein gewählt werden kann, so ist diese Bedingung gleichbedeutend mit:

$$|a_n^{(1)}| > \vartheta,$$

unter Ausschluß der Gleichheit. Damit ist der Zusatz bewiesen, soweit er sich auf Konvergenz schlechthin bezieht. Die unbedingte Konvergenz ergibt sich dann natürlich durch die frühere Schlußweise.

Durch spezielle Wahl der $\delta_\nu$ erhält man aus dem Theorem VII mit obigem Zusatz beliebig viele Spezialkriterien, von denen ich wenigstens eines anführen will. Setzt man nämlich durchweg $\delta_\nu = 0$, so folgt, wenn man noch $\nu - 1$ an Stelle von $\nu$ schreibt:

**Theorem VIII.** Wenn für $\nu \geqq 2$ durchweg die Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leqq \vartheta(|a_n^{(\nu)}| - 1)$$

gilt, wo $\vartheta$ eine positive Zahl kleiner als 1 bedeutet, und wenn außerdem $|a_n^{(1)}| > \vartheta$ ist, so ist die Kette

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix}$$

unbedingt konvergent.

Die zur unbedingten Konvergenz noch erforderlichen Bedingungen $|a_n^{(\nu)}| > \vartheta$ für $\nu > 1$ brauchen nämlich hier nicht mehr eigens verlangt zu werden, da aus der ersten Ungleichung des Theorems sowieso schon $|a_n^{(\nu)}| > 1$ folgt. Durch das Theorem VIII werden die Bedingungen von Theorem II um ein weniges reduziert, indem statt der Forderung

$$|a_0^{(1)}| + |a_1^{(1)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(1)}| \leqq \vartheta(|a_n^{(1)}| - 1)$$

nur die viel weniger verlangende „$|a_n^{(1)}| > \vartheta$" erhoben wird.

Wendet man die Ergebnisse dieses Paragraphen nun speziell auf Ketten erster Ordnung an, so erhält man:

**Korollar:** Der Kettenbruch

$$a_1^{(0)} + \frac{a_0^{(1)}|}{|a_1^{(1)}} + \frac{a_0^{(2)}|}{|a_1^{(2)}} + \frac{a_0^{(3)}|}{|a_1^{(3)}} + \cdots$$

ist unbedingt konvergent, wenn es gewisse Zahlen $\delta_\nu$ gibt, derart, daß für $\nu \geqq 1$ durchweg die zwei Ungleichungen

$$|a_0^{(\nu)}\delta_\nu| + |a_0^{(\nu+1)} - a_1^{(\nu)}\delta_\nu| \leqq \vartheta\,(|a_1^{(\nu+1)} + \delta_\nu| - 1); \quad |a_1^{(\nu)}| \geqq \vartheta$$

gelten, wo $\vartheta$ eine positive Zahl kleiner als 1 bedeutet. Sollte die erste Ungleichung für gewisse $\nu$-Werte etwa nur durch die Wahl $\delta_\nu = 0$ zu befriedigen sein, so ist in der zweiten Ungleichung für diese $\nu$-Werte das Gleichheitszeichen zu unterdrücken.

Unter den Spezialfällen, die sich durch besondere Wahl der Zahlen $\delta_\nu$ ergeben, seien die folgenden vier hervorgehoben:

1) $\delta_\nu = 0$: $\quad |a_0^{(\nu+1)}| < \vartheta\,(|a_1^{(\nu+1)}| - 1), \quad |a_1^{(1)}| > \vartheta$.[1]

2) $\delta_\nu = \dfrac{a_0^{(\nu+1)}}{a_1^{(\nu)}}$: $\quad \left|\dfrac{a_0^{(\nu)}\,a_0^{(\nu+1)}}{a_1^{(\nu)}}\right| < \vartheta\left(\left|a_1^{(\nu+1)} + \dfrac{a_0^{(\nu+1)}}{a_1^{(\nu)}}\right| - 1\right),$

$$|a_1^{(\nu)}| \geqq \vartheta.$$

3) $\delta_\nu = 1$: $\quad |a_0^{(\nu)}| + |a_0^{(\nu+1)} - a_1^{(\nu)}| \leqq \vartheta\,(|a_1^{(\nu+1)} + 1| - 1),$

$$|a_1^{(\nu)}| \geqq \vartheta.$$

4) $\delta_\nu = -1$: $\quad |a_0^{(\nu)}| + |a_0^{(\nu+1)} + a_1^{(\nu)}| \leqq \vartheta\,(|a_1^{(\nu+1)} - 1| - 1),$

$$|a_1^{(\nu)}| \geqq \vartheta.$$

Der erste dieser vier Fälle entspricht dem Theorem VIII. Er läßt sich übrigens auch auf etwas einfachere Weise aus den Theoremen II und III ableiten und bleibt noch richtig für $\vartheta = 1$, in welchem Fall ihn Herr Pringsheim bewiesen hat.[2] Indes ist zu beachten, daß der Satz für $\vartheta < 1$ nicht durch den gleichen Satz für $\vartheta = 1$ entbehrlich wird, wie dies bei Theorem II offenbar der Fall wäre; denn für $\vartheta < 1$ lautet

---

[1] Die Forderung $|a_1^{(\nu)}| > \vartheta$ für $\nu \geqq 2$ ist wie bei Theorem VIII wieder von selbst erfüllt.

[2] In der auf pag. 441 zitierten Arbeit, Seite 364; die Bedingungen sind dort sogar noch etwas reduziert.

die zweite der geforderten Ungleichungen nur $|a_1^{(1)}| > \vartheta$, aber nicht $|a_1^{(1)}| > 1$.

Ferner ist es wohl nicht überflüssig zu bemerken, daß die absolute Willkürlichkeit der $\delta_\nu$ die unbedingte Konvergenz nicht nur dann garantiert, wenn für alle $\nu\,(\geq 1)$ die Bedingung 1) oder für alle $\nu\,(> 1)$ die Bedingung 2) oder sonst eine erfüllt ist. Es genügt vielmehr, wenn für jeden einzelnen Wert von $\nu\,(> 1)$ irgend einer von diesen Bedingungen genügt wird, etwa für gerade $\nu$ der Bedingung 1), für ungerade $\nu$ der Bedingung 2) oder 3).

## § 5.

### Ausdehnung des Legendreschen Irrationalitätssatzes.

Wir wollen jetzt den Legendreschen Irrationalitätssatz auf die Kette $n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(46)\qquad \begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \dots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \dots \end{bmatrix} = \begin{cases} a_1^{(0)} \\ \\ a_n^{(0)} \end{cases}$$

übertragen. Zu dem Zweck setzen wir die Elemente $a_i^{(\nu)}$ als ganze rationale Zahlen voraus und selbstverständlich wieder $a_0^{(\nu)} \neq 0$. Es sind dann auch die $A_i^{(\nu)}$ ganze rationale Zahlen. Wenn nun außerdem für $\nu \geq 0$ durchweg die Ungleichung

$$(47)\qquad |a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leq \vartheta\,(|a_n^{(\nu)}| - 1),\quad \vartheta < 1$$

besteht, wenn also die Elemente den Bedingungen des Theorem III genügen, so ist die Kette konvergent, und wir wollen jetzt zeigen, daß eine Beziehung der Form

$$(48)\qquad P_0 a_0^{(0)} + P_1 a_1^{(0)} + P_2 a_2^{(0)} + \cdots + P_n a_n^{(0)} = 0$$

mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten $P_i$ nicht bestehen kann.[1])

---

[1]) Der Gleichung (48) hätte man natürlich ebensogut die Form

$$P_0 + P_1 a_1^{(0)} + \cdots + P_n a_n^{(0)} = 0$$

geben können, da ja $a_0^{(0)}$ rational ist. Nur der Symmetrie halber haben wir dem $P_0$ den Faktor $a_0^{(0)}$ beigegeben.

Angenommen, es bestünde eine solche Relation, so kann man die $P_i$ von vornherein als **ganze** Zahlen annehmen, indem man eventuell mit dem Generalnenner multipliziert. Wir multiplizieren dann die als richtig angenommene Gleichung (48) mit $A_0^{(\nu)}$ und erhalten:

$$a_0^{(0)} P_0 A_0^{(\nu)} = -\sum_{i=1}^{n} P_i a_i^{(0)} A_0^{(\nu)}.$$

Addiert man beiderseits die Größe $\sum_{i=1}^{n} P_i a_0^{(0)} A_i^{(\nu)}$, so kommt:

$$a_0^{(0)} \sum_{i=0}^{n} P_i A_i^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{n} P_i (a_0^{(0)} A_i^{(\nu)} - a_i^{(0)} A_0^{(\nu)}).$$

Hier steht nun auf der linken Seite eine **ganze** Zahl; auf der rechten aber nähern sich nach Theorem III alle $n$ Summanden mit wachsendem $\nu$ der Grenze Null. Von einer gewissen Stelle $\nu \geq N$ ab muß daher die rechte Seite und folglich auch die ihr gleiche linke Seite jedenfalls absolut kleiner als 1 werden; aber dann kann sie als ganze Zahl nur gleich Null sein. Wir bekommen also für $\nu \geq N$:

$$\sum_{i=0}^{n} P_i A_i^{(\nu)} = 0.$$

Setzt man hier der Reihe nach $\nu = N, N+1, \ldots N+n$, so erhält man ein System von $n+1$ linearen homogenen Gleichungen mit der Determinante:

$$(49) \qquad \begin{vmatrix} A_0^{(N)}, & A_1^{(N)}, & \ldots & A_n^{(N)} \\ A_0^{(N+1)}, & A_1^{(N+1)}, & \ldots & A_n^{(N+1)} \\ - & - & - & - \\ A_0^{(N+n)}, & A_1^{(N+n)}, & \ldots & A_n^{(N+n)} \end{vmatrix},$$

welche wegen Formel (3) von Null verschieden ist. Es folgt also:

$$P_0 = P_1 = \cdots = P_n = 0; \quad \text{w. z. b. w.}$$

Übrigens braucht die Ungleichung (47) nicht für alle Werte von $\nu$ erfüllt zu sein, sondern bloß von einer gewissen Stelle $\nu \geq N$ ab. Denn jedenfalls ist dann die Kette

$$\begin{bmatrix} a_0^{(N)}, & a_0^{(N+1)}, & a_0^{(N+2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(N)}, & a_n^{(N+1)}, & a_n^{(N+2)}, & \ldots \end{bmatrix} = \begin{cases} a_1^{(N)} \\ \\ a_n^{(N)} \end{cases}$$

konvergent, und nach dem soeben Bewiesenen ist eine Beziehung der Form

$$(50) \qquad Q_0\, a_0^{(N)} + Q_1\, a_1^{(N)} + \cdots + Q_n\, a_n^{(N)} = 0$$

mit rationalen nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten $Q_i$ nicht möglich. Es ist daher insbesondere auch:

$$A_0^{(N)}\, a_0^{(N)} + A_0^{(N+1)}\, a_1^{(N)} + \cdots + A_0^{(N+n)}\, a_n^{(N)} \neq 0;$$

denn andernfalls hätte man:

$$A_0^{(N)} = A_0^{(N+1)} = \cdots = A_0^{(N+n)} = 0,$$

was dem Nichtverschwinden der Determinante (49) widerstreitet. Nach dem Lemma auf pag. 414 ist daher die Kette (46) ebenfalls konvergent, und zwar hat man:

$$a_i^{(0)} = a_0^{(0)} \frac{A_i^{(N)}\, a_0^{(N)} + A_i^{(N+1)}\, a_1^{(N)} + \cdots + A_i^{(N+n)}\, a_n^{(N)}}{A_0^{(N)}\, a_0^{(N)} + A_0^{(N+1)}\, a_1^{(N)} + \cdots + A_0^{(N+n)}\, a_n^{(N)}}.$$

Gleichung (48) ist daher gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\sum_{i=0}^{n} P_i \left(A_i^{(N)}\, a_0^{(N)} + A_i^{(N+1)}\, a_1^{(N)} + \cdots + A_i^{(N+n)}\, a_n^{(N)}\right) = 0,$$

oder, was dasselbe ist,

$$a_0^{(N)} \sum_{i=0}^{n} P_i A_i^{(N)} + a_1^{(N)} \sum_{i=0}^{n} P_i A_i^{(N+1)} + \cdots + a_n^{(N)} \sum_{i=0}^{n} P_i A_i^{(N+n)} = 0.$$

Dies ist aber eine Gleichung der Form (50) und ist daher nur möglich, wenn sämtliche Koeffizienten verschwinden; also:

$$\sum_{i=0}^{n} P_i A_i^{(N)} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} P_i A_i^{(N+1)} = 0, \ \ldots \ \sum_{i=0}^{n} P_i A_i^{(N+n)} = 0.$$

Aber die Determinante dieses Gleichungssystems ist wie vorhin von Null verschieden; also folgt auch jetzt notwendig:

$$P_0 = P_1 = \cdots = P_n = 0.$$

Wir sprechen dieses Resultat aus in

**Theorem IX.** Wenn die Elemente $a_i^{(\nu)}$ ganze rationale Zahlen sind, welche von einer gewissen Stelle $\nu > N$ ab die Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leq \vartheta\,(|a_n^{(\nu)}| - 1)$$

erfüllen, wo $\vartheta$ eine positive Zahl kleiner als 1 bedeutet, so ist die Kette

$$(46) \qquad \begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix} = \begin{cases} a_1^{(0)} \\ \\ a_n^{(0)} \end{cases}$$

unbedingt konvergent, und ihr Wertesystem genügt keiner Relation der Form

$$P_0\, a_0^{(0)} + P_1\, a_1^{(0)} + P_2\, a_2^{(0)} + \cdots + P_n\, a_n^{(0)} = 0$$

mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten $P_i$.

Denn daß die Konvergenz der Kette auch eine unbedingte ist, ergibt sich wieder durch den gleichen Schluß wie immer. Ganz die gleiche Analyse führt zu dem folgenden etwas allgemeineren

**Theorem X.** Wenn die Elemente $a_i^{(\nu)}$ ganze Zahlen eines **imaginären quadratischen Körpers** sind und von einer gewissen Stelle $\nu \geq N$ ab der Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| + \cdots + |a_{n-1}^{(\nu)}| \leq \vartheta\,(|a_n^{(\nu)}| - 1), \quad \vartheta < 1$$

Genüge leisten, so ist die Kette (46) unbedingt konvergent und ihr Wertesystem genügt keiner Relation der Form

$$P_0\, a_0^{(0)} + P_1\, a_1^{(0)} + \cdots + P_n\, a_n^{(0)} = 0,$$

wo die Koeffizienten $P_i$ Zahlen des betreffenden quadratischen Körpers sind, welche nicht sämtlich verschwinden.

Zu beachten ist bei diesen Theoremen namentlich, daß ganz im Gegensatz zu Theorem II die geforderte Ungleichung

nur für $\nu \geqq N$ zu gelten braucht. Für Kettenbrüche spezialisiert lauten diese Sätze:

Wenn die Teilzähler und -nenner des Kettenbruches

$$a_1^{(0)} + \frac{a_0^{(1)}|}{a_1^{(1)}} + \frac{a_0^{(2)}}{|a_1^{(2)}} + \frac{a_0^{(3)}}{|a_1^{(3)}} + \cdots$$

ganze rationale Zahlen sind und von einer gewissen Stelle $\nu \geqq N$ ab der Ungleichung

$$|a_0^{(\nu)}| \leqq \vartheta(|a_1^{(\nu)}| - 1) \quad (\vartheta < 1)$$

Genüge leisten, so ist der Kettenbruch unbedingt konvergent und hat einen **irrationalen** Wert.

Wenn unter sonst gleichen Bedingungen die $a_i^{(\nu)}$ ganze Zahlen eines imaginären quadratischen Körpers sind, so ist der Kettenbruch ebenfalls unbedingt konvergent, stellt aber niemals eine Zahl desselben quadratischen Körpers dar.

In den Sätzen dieses Paragraphen ist der Wert $\vartheta = 1$ nicht zulässig, obwohl nach Theorem IV die Konvergenz der betreffenden Ketten bestehen bleibt (wenigstens, wenn die geforderte Ungleichung schon von $\nu = 1$ ab erfüllt ist). Schon die Kettenbrüche lehren dies. Denn der Legendresche Irrationalitätssatz wird zwar immer für $\vartheta = 1$ ausgesprochen, erleidet aber dann auch eine Ausnahme, indem der Kettenbruch

$$\frac{c_0|}{c_0+1} - \frac{c_1|}{|c_1+1} - \frac{c_2|}{|c_2+1} - \cdots$$

den Wert 1 hat, also rational ist. Es ist dies im wesentlichen der einzige Ausnahmefall. Man vergleiche darüber § 4 der auf pag. 411 zitierten Arbeit des Herrn Pringsheim.

## § 6.

### Analogon zu dem reellen Kettenbruch

$$\frac{c_0|}{|c_0+1} - \frac{c_1|}{|c_1+1} - \frac{c_2|}{|c_2+1} - \cdots.$$

Unter den reellen Kettenbrüchen, die nach dem Pringsheimschen Fundamentalkriterium unbedingt konvergent sind, bieten bekanntlich die von der Form

$$\frac{c_0|}{|c_0+1} - \frac{c_1|}{|c_1+1} - \frac{c_2|}{|c_2+1} - \cdots \qquad (c_i > 0)$$

ein besonderes Interesse dar, und sie nehmen namentlich, wenn die Reihe

$$c_0 + c_0 c_1 + c_0 c_1 c_2 + \cdots$$

divergiert, eine gewisse Ausnahmestellung ein, die auch am Schluß des vorigen Paragraphen hervorgetreten ist. Der Wert eines solchen Kettenbruches ist immer gleich 1, während er bei Konvergenz der obigen Reihe kleiner als 1 ist. Der Versuch, unter den Ketten $n^{\text{ter}}$ Ordnung, die dem Theorem II genügen, ein Analogon zu obigem Kettenbruch zu finden, muß schon daran scheitern, daß dort die Zulässigkeit des Wertes $\vartheta = 1$ nicht allgemein erwiesen werden konnte. Indessen gibt es doch Ketten $n^{\text{ter}}$ Ordnung, die den Bedingungen von Theorem II zwar nicht genügen, auch nicht für $\vartheta = 1$, die aber doch unbedingt konvergent und dem obigen Kettenbruch sehr verwandt sind.

Wir betrachten die Kette $n^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(51) \qquad \begin{bmatrix} -c_0, & -c_1, & -c_2, & \cdots \\ -c_0+1, & -c_1+1, & -c_2+1, & \cdots \\ - & - & - & - \\ -c_0+1, & -c_1+1, & -c_2+1, & \cdots \\ c_0+1, & c_1+1, & c_2+1, & \cdots \end{bmatrix},$$

in deren $(\nu+1)^{\text{ter}}$ Kolonne zuerst eine Zahl $-c_\nu$, dann $(n-1)$ mal die Zahl $-c_\nu+1$, endlich einmal $c_\nu+1$ auftritt. Wir

wollen zunächst unabhängig von der Konvergenzfrage die formale Seite dieser Kette studieren und erst später den Zahlen $c_\nu$ gewisse Einschränkungen auferlegen. Die die Kette (51) definierenden Rekursionsformeln lauten:

$$\begin{aligned} C_i^{(\nu+n+1)} &= -c_\nu C_i^{(\nu)} + (1-c_\nu) C_i^{(\nu+1)} + \cdots \\ &\quad + (1-c_\nu) C_i^{(\nu+n-1)} + (1+c_\nu) C_i^{(\nu+n)} \\ &\quad (i = 0, 1, \ldots n; \quad \nu = 0, 1, \ldots \infty), \end{aligned} \tag{52}$$

$$C_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \;\;\text{„} \;\; i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \ldots n). \tag{53}$$

Die erste dieser Gleichungen kann auch in der Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} &C_i^{(\nu+n+1)} - C_i^{(\nu+n)} - C_i^{(\nu+n-1)} - \cdots - C_i^{(\nu+1)} \\ &= c_\nu \left( C_i^{(\nu+n)} - C_i^{(\nu+n-1)} - C_i^{(\nu+n-2)} - \cdots - C_i^{(\nu)} \right), \end{aligned}$$

wo nun die Klammer rechts ebenso gebildet ist, wie die linke Seite, nur daß $\nu - 1$ an Stelle von $\nu$ steht. Setzt man also diese Formel für $\nu = 0, 1, \ldots \nu$ an und multipliziert, so kommt:

$$\begin{aligned} &C_i^{(\nu+n+1)} - C_i^{(\nu+n)} - C_i^{(\nu+n-1)} - \cdots - C_i^{(\nu+1)} \\ &= c_0 c_1 \cdots c_\nu \left( C_i^{(n)} - C_i^{(n-1)} - \cdots - C_i^{(1)} - C_i^{(0)} \right) \\ &= c_0 c_1 \cdots c_\nu E_i, \end{aligned}$$

wobei offenbar nach Formel (53)

$$E_i = \begin{cases} -1 & \text{für } i = 0, 1, \ldots n-1 \\ +1 & \;\;\text{„} \;\; i = n \end{cases}$$

ist. Hieraus folgt nun für abnehmende Werte von $\nu$ das System von Gleichungen:

$$\begin{array}{l|l} C_i^{(\nu+n+1)} - C_i^{(\nu+n)} - C_i^{(\nu+n-1)} - \cdots - C_i^{(\nu+1)} = c_0 c_1 \cdots c_\nu E_i & k_{n-1} \\ C_i^{(\nu+n)} - C_i^{(\nu+n-1)} - C_i^{(\nu+n-2)} - \cdots - C_i^{(\nu)} = c_0 c_1 \cdots c_{\nu-1} E_i & k_n \\ \text{— — — — — — — — — — —} & \text{— —} \\ C_i^{(n+1)} - C_i^{(n)} - C_i^{(n-1)} - \cdots - C_i^{(1)} = c_0 E_i & k_{n+\nu-1} \\ C_i^{(n)} - C_i^{(n-1)} - C_i^{(n-2)} - \cdots - C_i^{(0)} = E_i & k_{n+\nu}. \end{array}$$

Wir multiplizieren diese Gleichungen der Reihe nach mit den beigesetzten Faktoren $k_\lambda$ und addieren sie dann; dabei sollen die $k_\lambda$ so gewählt werden, daß im Endresultat links die Terme

$$C_i^{(\nu+n)},\ C_i^{(\nu+n-1)},\ \ldots\ C_i^{(n+1)},\ C_i^{(n)}$$

herausfallen, während $C_i^{(\nu+n+1)}$ den Koeffizienten 1 erhält. Dies wird offenbar dann und nur dann erreicht, wenn wir die Zahlen $k_\lambda$ durch die Rekursionsformel

$$k_\nu = k_{\nu-1} + k_{\nu-2} + \cdots + k_{\nu-n} \tag{54}$$

berechnen, ausgehend von den Anfangswerten:

$$k_0 = 0,\ k_1 = 0,\ \ldots\ k_{n-2} = 0,\ k_{n-1} = 1.\text{[1]} \tag{55}$$

Führt man nun besagte Multiplikation und Addition aus, so kommt:

$$\begin{aligned} C_i^{(\nu+n+1)} - C_i^{(0)} k_{n+\nu} - C_i^{(1)} (k_{n+\nu} + k_{n+\nu-1}) - \cdots \\ - C_i^{(n-1)} (k_{n+\nu} + k_{n+\nu-1} + \cdots + k_{\nu+1}) \\ = E_i (k_{n+\nu} + c_0 k_{n+\nu-1} + c_0 c_1 k_{n+\nu-2} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_\nu k_{n-1}). \end{aligned}$$

Hier sind aber die negativen Terme der linken Seite nach (53) für $i = n$ alle gleich Null; für $i \neq n$ ist genau einer von Null verschieden, nämlich derjenige, welcher $C_i^{(i)}$ enthält. Man findet daher schließlich, noch mit Benutzung der oben angegebenen Werte von $E_i$:

$$\begin{aligned} C_n^{(\nu+n+1)} &= k_{n+\nu} + c_0 k_{n+\nu-1} + c_0 c_1 k_{n+\nu-2} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_\nu k_{n-1}, \\ C_i^{(\nu+n+1)} &= -(k_{n+\nu} + c_0 k_{n+\nu-1} + c_0 c_1 k_{n+\nu-2} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_\nu k_{n-1}) \\ &\quad + (k_{n+\nu} + k_{n+\nu-1} + \cdots + k_{n+\nu-i}) \quad (i = 0, 1, \cdots n-1). \end{aligned}$$

Die Zahlen $C_i^{(\nu)}$ sind damit explizit berechnet, sobald die $k_\nu$ als bekannt angesehen werden. Setzt man $\nu - n$ an Stelle von $\nu$, und führt noch die Abkürzungen

---

[1]) Für $n = 1$ ist durchweg $k_\lambda = 1$ zu setzen. Für $n > 1$ wächst offenbar $k_\lambda$ monoton mit $\lambda$ ins Unendliche.

$$
(56)\quad \begin{aligned}
&1 + c_0 \frac{k_{\nu-1}}{k_\nu} + c_0 c_1 \frac{k_{\nu-2}}{k_\nu} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\nu-n} \frac{k_{n-1}}{k_\nu} = Q_\nu,\\
&1 + \frac{k_{\nu-1}}{k_\nu} + \frac{k_{\nu-2}}{k_\nu} + \cdots + \frac{k_{\nu-i}}{k_\nu} = P_{\nu,i} \quad (i = 1, 2, \cdots n-1)
\end{aligned}
$$

ein,[1]) so gehen die letzten Formeln über in:

$$
(57)\quad \begin{aligned}
&C_n^{(\nu+1)} = k_\nu Q_\nu\\
&C_i^{(\nu+1)} = -k_\nu Q_\nu + k_\nu P_{\nu,i} \quad (i = 1, 2, \ldots n-1)\\
&C_0^{(\nu+1)} = -k_\nu Q_\nu + k_\nu .
\end{aligned}
$$

Also schließlich durch Division:

$$
(58)\quad \begin{aligned}
&-c_0 \frac{C_i^{(\nu+1)}}{C_0^{(\nu+1)}} = -c_0 \frac{P_{\nu,i} - Q_\nu}{1 - Q_\nu} \quad (i = 1, 2, \ldots n-1),\\
&-c_0 \frac{C_n^{(\nu+1)}}{C_0^{(\nu+1)}} = -c_0 \frac{Q_\nu}{1 - Q_\nu}.
\end{aligned}
$$

Von jetzt ab seien die $c_\nu$ reelle positive Zahlen. In diesem Fall können wir das Verhalten von $P_{\nu,i}$ und $Q_\nu$ für unendlich wachsende $\nu$ aufs genaueste bestimmen und daraus die Konvergenz der Kette folgern. Um uns vor allem über das Wachstum der Zahlen $k_\nu$ zu orientieren, von welchen ja $P_{\nu,i}$ und $Q_\nu$ abhängen, gehen wir aus von der algebraischen Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades:

$$
f(x) = x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x - 1 = 0,
$$

deren Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ seien. Diese Gleichung hat die folgenden bemerkenswerten Eigenschaften, deren Beweis wir, um hier den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen, erst in § 8 nachtragen werden:

1. Die Gleichung $f(x) = 0$ hat eine und nur eine positive Wurzel $\varrho_1$; diese liegt zwischen 1 und 2, während alle anderen Wurzeln absolut kleiner als 1 sind.

---

[1]) Dabei setzen wir $\nu > n-1$ voraus, damit die Nenner $k_\nu \neq 0$ sind; wir werden später $\nu$ ins Unendliche wachsen lassen.

2. Die Gleichung $f(x) = 0$ ist im Bereich der rationalen Zahlen irreduzibel, daher insbesondere ihre Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ alle voneinander verschieden.

Wir behaupten nun, es ist:

$$k_\nu = \sum_{s=1}^{n} \gamma_s \varrho_s^\nu, \tag{59}$$

wo die Koeffizienten $\gamma_s$ von $\nu$ unabhängig sind. Denn fordert man diese Gleichung zunächst für $\nu = 0, 1, \ldots n-1$, so hat man $n$ lineare Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante für die $n$ Unbekannten $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$, die hieraus eindeutig berechnet werden können. Da aber anderseits $\varrho_s$ eine Wurzel von $f(x)$ ist, so ist $\varrho_s^{\nu-n} f(\varrho_s) = 0$, oder, was dasselbe sagt:

$$\varrho_s^\nu = \varrho_s^{\nu-1} + \varrho_s^{\nu-2} + \cdots + \varrho_s^{\nu-n}.$$

Der gleichen Rekursionsformel, wie sie hier für die Zahlen $\varrho_s^\nu$ gegeben ist, genügen aber nach (54) auch die Zahlen $k_\nu$. Daraus folgt, daß die Formel (59) für einen gegebenen Wert $\nu$ richtig ist, sobald sie für die $n$ vorhergehenden $\nu$-Werte besteht. Sie gilt aber für $\nu = 0, 1, \ldots n-1$, und folglich auch für alle größeren $\nu$. Zu bemerken ist noch, daß die Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ alle von Null verschieden sind. Denn offenbar sind sie wegen der Irreduzibilität von $f(x)$ konjugierte algebraische Zahlen, die bzw. den Körpern von $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ angehören; wenn daher eine gleich Null wäre, so wären sie alle gleich Null, was nicht angeht.

Da $\varrho_1 > 1$, sonst aber $|\varrho_s| < 1$ ist, so folgt aus (59):

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{k_\nu}{\varrho_1^\nu} = \gamma_1 \neq 0, \tag{60}$$

oder auch, was dasselbe sagt:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{k_{\nu-1}}{\varrho_1^{\nu-1}} = \gamma_1 \neq 0.$$

Folglich durch Division der zwei letzten Gleichungen:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{k_{\nu-1}}{k_\nu} = \frac{1}{\varrho_1}. \tag{61}$$

Hieraus erhält man auch noch etwas allgemeiner:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{k_{\nu-i}}{k_\nu} = \lim_{\nu=\infty} \frac{k_{\nu-1}}{k_\nu} \frac{k_{\nu-2}}{k_{\nu-1}} \cdots \frac{k_{\nu-i}}{k_{\nu-i+1}} = \frac{1}{\varrho_1^i}. \tag{62}$$

Aus der zweiten Definitionsgleichung (56) folgt daher sofort:

$$\lim_{\nu=\infty} P_{\nu,i} = 1 + \frac{1}{\varrho_1} + \cdots + \frac{1}{\varrho_1^i} = \frac{1 + \varrho_1 + \varrho_1^2 + \cdots + \varrho_1^i}{\varrho_1^i}. \tag{63}$$

Schwieriger ist der Grenzwert von $Q_\nu$ zu bestimmen. Wir müssen da zwei Fälle unterscheiden:

I. Die Reihe

$$1 + \frac{c_0}{\varrho_1} + \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^2} + \frac{c_0 c_1 c_2}{\varrho_1^3} + \cdots \tag{64}$$

sei divergent. Dann ist, weil $\varrho_1$ und alle $c_\nu$, $k_\nu$ positiv sind:

$$\begin{aligned} Q_\nu &= 1 + c_0 \frac{k_{\nu-1}}{k_\nu} + c_0 c_1 \frac{k_{\nu-2}}{k_\nu} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\nu-n} \frac{k_{n-1}}{k_\nu} \\ &> 1 + c_0 \frac{k_{\nu-1}}{k_\nu} + c_0 c_1 \frac{k_{\nu-2}}{k_\nu} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\lambda-1} \frac{k_{\nu-\lambda}}{k_\nu}, \end{aligned} \tag{65}$$

wo $\lambda$ eine beliebige Zahl zwischen 1 und $\nu - n + 1$ bedeuten kann. Wir wählen jetzt $\lambda$ willkürlich, aber fest, während $\nu$ unbegrenzt wachsen soll. Dann nähert sich die rechte Seite von (65) dem Grenzwert

$$K_\lambda = 1 + \frac{c_0}{\varrho_1} + \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^2} + \cdots + \frac{c_0 c_1 \ldots c_{\lambda-1}}{\varrho_1^\lambda},$$

und es folgt daher aus (65):

$$\underline{\lim_{\nu=\infty}}\, Q_\nu \geqq K_\lambda.$$

Da dies einerseits für jeden endlichen Index $\lambda$ gilt, da anderseits aber wegen der vorausgesetzten Divergenz der Reihe (64) $K_\lambda$ mit $\lambda$ über alle Grenzen wächst, so folgt:

$$\lim_{\nu=\infty} Q_\nu = \infty.$$

Geht man daher in den Formeln (58) zur Grenze $\nu = \infty$ über, so ergeben sich die folgenden Grenzwerte:

$$-c_0 \lim_{\nu=\infty} \frac{C_i^{(\nu)}}{C_0^{(\nu)}} = -c_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1),$$

$$-c_0 \lim_{\nu=\infty} \frac{C_n^{(\nu)}}{C_0^{(\nu)}} = +c_0.$$

In diesem Falle konvergiert also die Kette (51) und zwar, wie wieder leicht zu sehen, unbedingt.

Wir wenden uns jetzt zu dem Fall:

II. Die Reihe (64) sei konvergent und habe den Wert $K$. Es ist dann:

$$K = 1 + \frac{c_0}{\varrho_1} + \frac{c_0\, c_1}{\varrho_1^2} + \frac{c_0\, c_1\, c_2}{\varrho_1^3} + \cdots > 1. \tag{66}$$

Multipliziert man jetzt den Ausdruck $Q_\nu$ in (56) mit $\dfrac{k_\nu}{\varrho_1^\nu}$ und ersetzt dann alle vorkommenden $k_\lambda$ durch ihren in Formel (59) angegebenen Wert, so erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{k_\nu}{\varrho_1^\nu} Q_\nu &= \frac{1}{\varrho_1^\nu} \sum_{s=1}^{n} \gamma_s\, \varrho_s^\nu + \frac{c_0}{\varrho_1^\nu} \sum_{s=1}^{n} \gamma_s\, \varrho_s^{\nu-1} + \frac{c_0\, c_1}{\varrho_1^\nu} \sum_{s=1}^{n} \gamma_s\, \varrho_s^{\nu-2} \\ &\qquad + \cdots + \frac{c_0\, c_1 \ldots c_{\nu-n}}{\varrho_1^\nu} \sum_{s=1}^{n} \gamma_s\, \varrho_s^{n-1} \\ &= \frac{1}{\varrho_1^\nu} \sum_{s=1}^{n} \gamma_s \left(\varrho_s^\nu + c_0\, \varrho_s^{\nu-1} + c_0\, c_1\, \varrho_s^{\nu-2} + \cdots + c_0\, c_1 \cdots c_{\nu-n}\, \varrho_s^{n-1}\right),\end{aligned}$$

oder auch, indem man in der rechts stehenden Summe den Term für $s = 1$ abtrennt:

$$\begin{aligned}\frac{k_\nu}{\varrho_1^\nu} Q_\nu &= \gamma_1 \left(1 + \frac{c_0}{\varrho_1} + \frac{c_0\, c_1}{\varrho_1^2} + \cdots + \frac{c_0\, c_1 \ldots c_{\nu-n}}{\varrho_1^{\nu-n+1}}\right) \\ &+ \sum_{s=2}^{n} \frac{\gamma_s}{\varrho_1^\nu} \left(\varrho_s^\nu + c_0\, \varrho_s^{\nu-1} + c_0\, c_1\, \varrho_s^{\nu-2} + \cdots + c_0\, c_1 \cdots c_{\nu-n}\, \varrho_s^{n-1}\right).\end{aligned} \tag{67}$$

Hier hat nun auf der rechten Seite das Glied außerhalb des Summenzeichens offenbar für $\nu = \infty$ den Grenzwert $\gamma_1 K$. Von den $n-1$ Gliedern unter dem Summenzeichen aber wollen wir beweisen, daß jedes einzelne den Grenzwert 0 hat. Für $s = 2, 3, \ldots n$ ist nämlich $|\varrho_s| < 1$; also:

$$\frac{1}{\varrho_1^\nu} \left| \varrho_s^\nu + c_0 \varrho_s^{\nu-1} + c_0 c_1 \varrho_s^{\nu-2} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\nu-n} \varrho_s^{n-1} \right|$$

$$< \frac{1}{\varrho_1^\nu} (1 + c_0 + c_0 c_1 + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\nu-n})$$

$$= \frac{1 + c_0 + c_0 c_1 + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\lambda-1}}{\varrho_1^\nu} + \frac{c_0 c_1 \cdots c_\lambda + c_0 c_1 \cdots c_{\lambda+1} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\nu-n}}{\varrho_1^\nu}$$

$$< \frac{1 + c_0 + c_0 c_1 + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\lambda-1}}{\varrho_1^\nu} + \left( \frac{c_0 c_1 \cdots c_\lambda}{\varrho_1^{\lambda+1}} + \frac{c_0 c_1 \cdots c_{\lambda+1}}{\varrho_1^{\lambda+2}} + \cdots + \frac{c_0 c_1 \cdots c_{\nu-n}}{\varrho_1^{\nu-n+1}} \right)$$

$$< \frac{1 + c_0 + c_0 c_1 + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\lambda-1}}{\varrho_1^\nu} + \left( \frac{c_0 c_1 \cdots c_\lambda}{\varrho_1^{\lambda+1}} + \frac{c_0 c_1 \cdots c_{\lambda+1}}{\varrho_1^{\lambda+2}} + \cdots \text{ in infin.} \right).$$

Dabei ist wieder $\lambda$ eine beliebige Zahl zwischen 1 und $\nu - n + 1$. Wählt man $\lambda$ hinreichend groß, so ist die Klammergröße als Rest einer konvergenten Reihe beliebig klein, und wenn man bei Festhaltung dieses Wertes $\lambda$ nachträglich $\nu$ unbegrenzt wachsen läßt, so wird auch der Bruch

$$\frac{1 + c_0 + c_0 c_1 \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\lambda-1}}{\varrho_1^\nu}$$

beliebig klein. Hieraus ergibt sich aber in der Tat:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\varrho_1^\nu} (\varrho_s^\nu + c_0 \varrho_s^{\nu-1} + c_0 c_1 \varrho_s^{\nu-2} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\nu-n} \varrho_s^{n-1}) = 0$$
$$(s = 2, 3, \ldots n),$$

und folglich nach Formel (67) für die Grenze $\nu = \infty$:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{k_\nu}{\varrho_1^\nu} Q_\nu = \gamma_1 K.$$

Endlich folgt hieraus mit Rücksicht auf (60):

$$\lim_{\nu=\infty} Q_\nu = K.$$

Führt man die gewonnenen Resultate nun wieder in die Formeln (58) ein, indem man dort zur Grenze $\nu = \infty$ übergeht, so kommt:

$$-c_0 \lim_{\nu=\infty} \frac{C_i^{(\nu)}}{C_0^{(\nu)}} = -c_0 \frac{\frac{1+\varrho_1+\cdots+\varrho_1^i}{\varrho_1^i} - K}{1-K}$$

$$(i = 1, 2, \ldots n-1),$$

$$-c_0 \lim_{\nu=\infty} \frac{C_n^{(\nu)}}{C_0^{(\nu)}} = -c_0 \frac{K}{1-K}.$$

Da nach (66) $K > 1$ ist, so ist der hier auftretende Nenner von Null verschieden; daher ist auch im gegenwärtigen Fall die Kette konvergent, und zwar wieder, wie man leicht erkennt, unbedingt konvergent. Die Zusammenfassung dieser verschiedenen Resultate führt nun zu

**Theorem XI.** Wenn $c_0, c_1, c_2, \ldots$ eine unbegrenzte Folge wesentlich positiver Zahlen sind, so ist die Kette $n^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\begin{bmatrix} -c_0, & -c_1, & -c_2, & \\ -c_0+1, & -c_1+1, & -c_2+1, & \ldots \\ - & - & - & - \\ -c_0+1, & -c_1+1, & -c_2+1, & \ldots \\ c_0+1, & c_1+1, & c_2+1, & \ldots \end{bmatrix} = \begin{cases} \gamma_1^{(0)} \\ \gamma_2^{(0)} \\ \\ \gamma_n^{(0)}, \end{cases}$$

in deren $(\nu+1)^{\text{ter}}$ Kolonne zuerst ein Element $-c_\nu$, sodann $(n-1)$mal das Element $-c_\nu+1$, endlich einmal $c_\nu+1$ auftritt, unbedingt konvergent. Ihr Wertesystem ist:

$$\gamma_i^{(0)} = -c_0 \quad (i = 1, 2, \ldots n-1),$$
$$\gamma_n^{(0)} = +c_0;$$

oder aber:

$$\gamma_i^{(0)} = c_0 \frac{1+\varrho_1+\varrho_1^2+\cdots+\varrho_1^i - K\varrho_1^i}{\varrho_1^i(K-1)} \quad (i = 1, 2, \cdots n-1),$$

$$\gamma_n^{(0)} = \frac{c_0 K}{K-1},$$

je nachdem die Reihe

$$1 + \frac{c_0}{\varrho_1} + \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^2} + \frac{c_0 c_1 c_2}{\varrho_1^3} + \cdots$$

divergiert oder gegen den Wert $K$ konvergiert. Dabei bedeutet $\varrho_1$ die positive Wurzel der Gleichung:

$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x - 1 = 0.$$

## § 7.

### Ausdehnung der letzten Untersuchung auf komplexe Elemente.

Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen bleiben, soweit sie sich auf den Fall der Konvergenz der Reihe (64) beziehen, mit geringen Änderungen noch gültig, wenn die $c_\nu$ beliebige komplexe von Null verschiedene Zahlen sind. Doch muß dann die absolute Konvergenz der Reihe (64) gefordert werden (früher waren ihre Glieder alle positiv, die Konvergenz also von selbst eine absolute).

Sei also die Reihe

$$(64) \qquad 1 + \frac{c_0}{\varrho_1} + \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^2} + \frac{c_0 c_1 c_2}{\varrho_1^3} + \cdots$$

absolut konvergent und ihre Summe gleich $K$. Wenn dann $Q_\nu$ und $P_{\nu,i}$ wieder ihre frühere, durch die Definitionsgleichungen (56) festgesetzte Bedeutung haben, so bleiben die Formeln (58) bestehen, und außerdem ist auch jetzt nach (63):

$$\lim_{\nu=\infty} P_{\nu,i} = \frac{1 + \varrho_1 + \varrho_1^2 + \cdots + \varrho_1^i}{\varrho_1^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1),$$

da ja $P_{\nu,i}$ gar nicht von den Zahlen $c_\lambda$ abhängt. Es kommt also nur noch darauf an, zu zeigen, daß auch wieder

$$\lim_{\nu=\infty} Q_\nu = K$$

ist. Das wird ganz ähnlich wie früher erreicht. indem wir beweisen, daß die unter dem Summenzeichen stehenden Glieder

in der auch jetzt gültigen Formel (67) mit wachsendem $\nu$ der Grenze Null zustreben. In der Tat ist jetzt für $s = 2, 3, \ldots n$ analog zu der Analyse auf pag. 461:

$$\frac{1}{\varrho_1^\nu} \left| \varrho_s^\nu + c_0 \varrho_s^{\nu-1} + c_0 c_1 \varrho_s^{\nu-2} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\nu-n} \varrho_s^{n-1} \right|$$

$$< \frac{1}{\varrho_1^\nu} (1 + |c_0| + |c_0 c_1| + \cdots + |c_0 c_1 \cdots c_{\nu-n}|)$$

$$< \frac{1 + |c_0| + |c_0 c_1| + \cdots + |c_0 c_1 \cdots c_{\lambda-1}|}{\varrho_1^\nu}$$

$$+ \left( \frac{|c_0 c_1 \ldots c_\lambda|}{\varrho_1^{\lambda+1}} + \frac{|c_0 c_1 \ldots c_{\lambda+1}|}{\varrho_1^{\lambda+2}} + \cdots \text{ in infin.} \right).$$

Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe (64) können wir hieraus wieder wie früher schließen:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\varrho_1^\nu} (\varrho_s^\nu + c_0 \varrho_s^{\nu-1} + c_0 c_1 \varrho_s^{\nu-2} + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\nu-n} \varrho_s^{n-1}) = 0.$$

Wenn man also in Formel (67) zur Grenze $\nu = \infty$ übergeht, so kommt wieder:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{k_\nu}{\varrho_1^\nu} Q_\nu = \gamma_1 K,$$

und folglich auch:

$$\lim_{\nu=\infty} Q_\nu = K.$$

Läßt man daher endlich auch in den Formeln (58) $\nu$ wieder unbegrenzt wachsen, so ergibt sich:

$$-c_0 \lim_{\nu=\infty} \frac{C_i^{(\nu)}}{C_0^{(\nu)}} = -c_0 \frac{\dfrac{1 + \varrho_1 + \cdots + \varrho_1^i}{\varrho_1^i} - K}{1 - K} \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1),$$

$$-c_0 \lim_{\nu=\infty} \frac{C_n^{(\nu)}}{C_0^{(\nu)}} = -c_0 \frac{K}{1-K}.$$

Diese Resultate sind die gleichen wie die des vorigen Paragraphen. Jedoch ist jetzt die Bedingung $K \neq 1$ nicht

ohne weiteres erfüllt; die Formeln zeigen aber, daß die Kette konvergiert oder divergiert, je nachdem $K \neq 1$ oder $K = 1$ ist. Übrigens ist die Konvergenz für $K \neq 1$ nicht immer eine unbedingte. Betrachtet man nämlich die Kette:

$$(68) \qquad \begin{bmatrix} -c_\lambda, & -c_{\lambda+1}, & -c_{\lambda+2}, & \ldots \\ -c_\lambda + 1, & -c_{\lambda+1} + 1 & -c_{\lambda+2} + 1, & \ldots \\ - & - & - & - \\ c_\lambda + 1, & c_{\lambda+1} + 1, & c_{\lambda+2} + 1, & \ldots \end{bmatrix},$$

so ist diese von gleicher Bauart wie die Kette (51), aber an Stelle der Reihe (64) tritt jetzt die folgende:

$$1 + \frac{c_\lambda}{\varrho_1} + \frac{c_\lambda c_{\lambda+1}}{\varrho_1^2} + \frac{c_\lambda c_{\lambda+1} c_{\lambda+2}}{\varrho_1^3} + \ldots,$$

welche offenbar auch absolut konvergiert und den Wert

$$\frac{\varrho_1^\lambda}{c_0 c_1 \cdots c_{\lambda-1}} \left( K - 1 - \frac{c_0}{\varrho_1} - \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^2} - \ldots - \frac{c_0 c_1 \ldots c_{\lambda-2}}{\varrho_1^{\lambda-1}} \right)$$

hat. Die Kette (68) wird daher nur dann konvergieren, wenn dieser Reihenwert ebenfalls von 1 verschieden ist, d. h. wenn

$$K \neq 1 + \frac{c_0}{\varrho_1} + \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^2} + \cdots + \frac{c_0 c_1 \ldots c_{\lambda-1}}{\varrho_1^\lambda}$$

ist. Bei unbedingter Konvergenz der Kette (51) muß daher diese Ungleichung für alle endlichen $\lambda > 1$ erfüllt sein. Wir erhalten also:

**Theorem XII.** Wenn unter Beibehaltung der Bezeichnung von Theorem XI die $c_\nu$ beliebige komplexe Zahlen ($c_\nu \neq 0$) sind, und wenn die unendliche Reihe

$$1 + \frac{c_0}{\varrho_1} + \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^2} + \frac{c_0 c_1 c_2}{\varrho_1^3} + \cdots$$

absolut konvergiert, so ist die Kette divergent oder konvergent, je nachdem der Wert $K$ dieser Reihe gleich 1 oder von 1 verschieden ist; das Wertesystem der Kette ist im letzteren Fall das gleiche wie bei

Theorem XI. Die Konvergenz ist eine bloß bedingte oder unbedingte, je nachdem unter den Zahlen

$$K_\lambda = 1 + \frac{c_0}{\varrho_1} + \frac{c_0 c_1}{\varrho_1^2} + \cdots + \frac{c_0 c_1 \cdots c_{\lambda-1}}{\varrho_1^\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \cdots \infty)^{1)}$$

mindestens eine gleich $K$ ist oder nicht.

Noch weit vollständiger können wir das Verhalten der Kette im Fall $n = 1$, also für Kettenbrüche, bestimmen. Dann ist nämlich nach (58):

$$-c_0 \frac{C_1^{(\nu+1)}}{C_0^{(\nu+1)}} = \frac{c_0 Q_\nu}{Q_\nu - 1},$$

wobei aber, da jetzt alle $k_\nu$ den Wert 1 haben, einfach

$$Q_\nu = 1 + c_0 + c_0 c_1 + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\nu-1}$$

zu setzen ist.

Hieraus kann ohne Schwierigkeit folgendes (im wesentlichen ja bekannte) Resultat entnommen werden:

Die Kette erster Ordnung

$$\begin{bmatrix} -c_0, & -c_1, & -c_2, & \cdots \\ c_0 + 1, & c_1 + 1, & c_2 + 1, & \cdots \end{bmatrix} \quad (c_\nu \neq 0),$$

oder, was dasselbe ist, der Kettenbruch

$$c_0 + 1 - \frac{c_1 |}{|c_1 + 1} - \frac{c_2 |}{|c_2 + 1} - \frac{c_3 |}{|c_3 + 1} - \cdots$$

zeigt folgendes Verhalten:

1. Wenn die unendliche Reihe

$$1 + c_0 + c_0 c_1 + c_0 c_1 c_2 + \cdots$$

konvergiert und ihr Wert $K$ von 1 verschieden ist, so konvergiert der Kettenbruch gegen den Wert

---

[1]) Die Klammer ($\lambda = 1, 2, \ldots \infty$) bedeutet natürlich wie seither immer, daß in $K_\lambda$ der Index $\lambda$ alle endlichen Zahlen durchlaufen soll; dagegen ist der Grenzwert $\lim\limits_{\lambda=\infty} K_\lambda$ nicht inbegriffen; dieser wäre ja nach Definition gleich $K$.

$$\frac{c_0 K}{K-1};$$

die Konvergenz ist eine bloß bedingte oder unbedingte, je nachdem von den Zahlen

$$1 + c_0 + c_0 c_1 + \cdots + c_0 c_1 \cdots c_{\lambda-1} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \cdots \infty)$$

eine gleich $K$ ist oder nicht.

2. Wenn die obige Reihe gegen den Wert 1 konvergiert, so ist der Kettenbruch divergent.

3. Wenn die selbe Reihe derart divergiert, daß die absolut genommene Summe ihrer $\nu$ ersten Glieder für wachsende $\nu$ den Grenzwert $\infty$ hat, so konvergiert der Kettenbruch gegen den Wert $c_0$, und zwar unbedingt.

4. Wenn die selbe Reihe derart divergiert, daß die absolut genommene Summe ihrer $\nu$ ersten Glieder doch für unendlich viele $\nu$-Werte unter einer endlichen Schranke bleibt, so divergiert der Kettenbruch.

Diese vier Möglichkeiten bilden eine vollständige Disjunktion, sodaß das Verhalten des Kettenbruches jederzeit aus dem Verhalten der unendlichen Reihe

$$1 + c_0 + c_0 c_1 + c_0 c_1 c_2 + \cdots$$

abgelesen werden kann. Sind speziell die $c_\nu$ reelle positive Zahlen, so können bloß der erste und dritte Fall eintreten, sodaß in Übereinstimmung mit Theorem XI und mit dem Pringsheimschen Fundamentalkriterium der Kettenbruch jetzt immer konvergiert.

## § 8.

### Hilfssatz über eine besondere algebraische Gleichung.

Es sollen jetzt die in den zwei letzten Paragraphen benutzten Eigenschaften der Gleichung

$$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x - 1 = 0$$

nachträglich bewiesen werden. Wir betrachten zu dem Zweck

gleich die folgende Gleichung, welche die vorige als Spezialfall umfaßt:

$$f(x) \equiv x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \cdots - a_{n-1} x - a_n = 0,$$

wobei die $a_i$ beliebige positive Zahlen sind, die den Ungleichungen

$$a_1 \geq a_2 > a_3 \geq \cdots \geq a_n > 0$$

genügen.

Nach der Descartesschen Zeichenregel hat $f(x)$ eine und nur eine (einfache) positive Wurzel $\varrho_1$. Es ist dann das Polynom $f(x)$ teilbar durch $x - \varrho_1$, und man kann daher den Ansatz machen:

$$(69) \quad \frac{f(x)}{x - \varrho_1}(x-1) = x^n - b_1 x^{n-1} - b_2 x^{n-2} - \cdots - b_{n-1} x - b_n.$$

Zur Berechnung der Koeffizienten $b_i$ findet man, indem man mit dem Nenner $x - \varrho_1$ ausmultipliziert, die Formeln

$$\begin{gathered} \varrho_1 b_n = a_n \\ \varrho_1 b_{n-1} - b_n = a_{n-1} - a_n \\ \varrho_1 b_{n-2} - b_{n-1} = a_{n-2} - a_{n-1} \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \varrho_1 b_1 - b_2 = a_1 - a_2. \end{gathered}$$

Da hier nach Voraussetzung $a_n > 0$, im übrigen aber die rechts auftretenden Differenzen wenigstens $\geq 0$ sind, und da außerdem auch $\varrho_1$ positiv ist, so lehren diese Formeln der Reihe nach:

$$b_n > 0, \quad b_{n-1} > 0, \quad \ldots \quad b_2 > 0, \quad b_1 > 0.$$

Die $b_i$ sind also alle positiv; außerdem ist ihre Summe

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1,$$

wie sich ohne weiteres aus (69) für $x = 1$ ergibt.

Wir beweisen nun: Die von $\varrho_1$ verschiedenen Wurzeln von $f(x)$ sind alle absolut kleiner als 1. Angenommen nämlich, es sei $\varrho_2$ eine von $\varrho_1$ verschiedene Wurzel, und man habe $|\varrho_2| \geq 1$. Dann ist $\varrho_2$ auch Wurzel des Polynoms (69), und folglich:

$$\begin{aligned}|\varrho_2^n| &= |b_1 \varrho_2^{n-1} + b_2 \varrho_2^{n-2} + \cdots + b_{n-1} \varrho_2 + b_n| \\ &< b_1 |\varrho_2|^{n-1} + b_2 |\varrho_2|^{n-2} + \cdots + b_{n-1} |\varrho_2| + b_n \text{ [1]} \\ &\leqq (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n) |\varrho_2|^{n-1} = |\varrho_2|^{n-1}.\end{aligned}$$

Dies besagt aber $|\varrho_2| < 1$, was der Voraussetzung $|\varrho_2| > 1$ widerspricht; diese ist also unzulässig, und daher gewiß $|\varrho_2| < 1$; w. z. b. w.

Wir nehmen nun weiter die Koeffizienten $a_i$ als ganze rationale Zahlen an. Dann ist:

$$f(1) = 1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_n < 0,$$

$$\begin{aligned}f(a_1+1) &\geqq (a_1+1)^n - a_1[(a_1+1)^{n-1} + (a_1+1)^{n-2} + \cdots + (a_1+1) + 1] \\ &= (a_1+1)^n - a_1 \frac{(a_1+1)^n - 1}{a_1} = 1 > 0.\end{aligned}$$

Also liegt die positive Wurzel zwischen 1 und $a_1 + 1$, während nach obigem die anderen Wurzeln absolut kleiner als 1 sind. Daraus folgt aber auch sofort die Irreduzibilität des Polynoms $f(x)$ im Bereich der rationalen Zahlen; denn wäre es reduzibel, so hätte es wenigstens einen Faktor

$$x^k + f_1 x^{k-1} + \cdots + f_{k-1} x + f_k$$

mit ganzzahligen [2]) Koeffizienten, dessen sämtliche Wurzeln absolut $< 1$ sind, während doch ihr Produkt gleich $\pm f_k$, also absolut $\geqq 1$ ist. Die in den Paragraphen 6 und 7 benutzten Eigenschaften des Polynoms $f(x)$ sind hiemit alle bewiesen.

## § 9.

### Anwendungen.

Um jetzt eine kleine Anwendung der entwickelten Konvergenzsätze zu geben, setzen wir:

$$\varphi(u, v) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{\Gamma(u+s)\,\Gamma(v+s)\,s!}, \tag{70}$$

[1]) Unter Ausschluß der Gleichheit, weil $\varrho_2$ als eine von $\varrho_1$ verschiedene Wurzel nicht positiv sein kann.

[2]) Nach einem bekannten Satz von Gauß.

wobei $u, v$ irgendwelche konstante komplexe Zahlen sind, während $z$ eine komplexe Variable ist. Es ist dann $\varphi(u, v)$ eine ganze transzendente Funktion von $z$.

Man verifiziert nun leicht die beiden Funktionalgleichungen:

$$\text{(a)} \qquad \varphi(u, v) - u\varphi(u+1, v) = z\varphi(u+2, v+1),$$

$$\text{(b)} \qquad \varphi(u, v) - v\varphi(u, v+1) = z\varphi(u+1, v+2).$$

Schreibt man in (b) $u+1$ an Stelle von $u$, multipliziert sodann mit $u$ und addiert die entstehende Gleichung zu (a), so folgt:

$$\text{(c)} \quad \varphi(u,v) - uv\varphi(u+1, v+1) = z\varphi(u+2, v+1) + uz\varphi(u+2, v+2).$$

Schreibt man ferner in (b) $u+2$ an Stelle von $u$, und $v+1$ an Stelle von $v$, so kommt:

$$\text{(d)} \quad \varphi(u+2, v+1) - (v+1)\varphi(u+2, v+2) = z\varphi(u+3, v+3).$$

Multipliziert man endlich diese Gleichung mit $z$ und addiert sie dann zu (c), so fällt $\varphi(u+2, v+1)$ heraus, und man erhält schließlich als Endresultat:

$$(71) \quad \begin{aligned} \varphi(u,v) = uv\varphi(u+1, v+1) + (u+v+1)z\varphi(u+2, v+2) \\ + z^2\varphi(u+3, v+3). \end{aligned}$$

Wir führen jetzt die ganzen transzendenten Funktionen von $z$ ein:

$$(72) \quad \Phi_\nu(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{\Gamma(u+\nu+s)\Gamma(v+\nu+s)s!} \quad (\nu = 0, 1, \ldots \infty).$$

Es ist dann offenbar:

$$\Phi_\nu(z) = \varphi(u+\nu, v+\nu),$$

und daher erhält man, wenn man in (71) $u+\nu$, $v+\nu$ an Stelle von $u, v$ setzt, die Rekursionsformel:

$$(73) \quad \begin{aligned} \Phi_\nu(z) = (u+\nu)(v+\nu)\Phi_{\nu+1}(z) + z(u+v+2\nu+1)\Phi_{\nu+2}(z) \\ + z^2\Phi_{\nu+3}(z). \end{aligned}$$

Schreibt man jetzt zur Abkürzung:

(74) $z^2 = a_0^{(\nu)}, \quad z(u+v+2\nu-1) = a_1^{(\nu)}, \quad (u+\nu)(v+\nu) = a_2^{(\nu)},$

(75) $$z^2 \Phi_{\nu+1}(z) = x_0^{(\nu)}, \quad z(u+v+2\nu-1)\Phi_{\nu+1}(z) + z^2 \Phi_{\nu+2}(z) = x_1^{(\nu)}, \quad \Phi_\nu(z) = x_2^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, \ldots \infty),$$

so resultiert aus dieser Bezeichnungsweise im Verein mit (73) das Gleichungssystem:

(76) $$x_0^{(\nu)} = a_0^{(\nu)} x_2^{(\nu+1)}, \quad x_1^{(\nu)} = x_0^{(\nu+1)} + a_1^{(\nu)} x_2^{(\nu+1)}, \quad x_2^{(\nu)} = x_1^{(\nu+1)} + a_2^{(\nu)} x_2^{(\nu+1)} \quad (\nu = 0, 1, \ldots \infty).$$

Dieses stimmt formal genau mit dem System (13) überein (für $n = 2$) und gibt daher Veranlassung zum Studium der Kette zweiter Ordnung:

(77) $$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \ldots \\ a_1^{(0)}, & a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & \ldots \\ a_2^{(0)}, & a_2^{(1)}, & a_2^{(2)}, & \ldots \end{bmatrix}.$$

Aus (76) erhält man auch wieder (vgl. (14), (14 a)):

(78) $x_i^{(0)} = A_i^{(\lambda)} x_0^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+1)} x_1^{(\lambda)} + A_i^{(\lambda+2)} x_2^{(\lambda)} \qquad (i = 0, 1, 2),$

(78ᵃ) $x_i^{(\mu)} = A_{i,\mu}^{(\lambda)} x_0^{(\lambda+\mu)} + A_{i,\mu}^{(\lambda+1)} x_1^{(\lambda+\mu)} + A_{i,\mu}^{(\lambda+2)} x_2^{(\lambda+\mu)} \quad (i = 0, 1, 2),$

wobei die $A$ natürlich durch die bekannten Rekursionsformeln (für $n = 2$) aus den durch die Formeln (74) definierten Größen $a_i^{(\nu)}$ gebildet sind. Dagegen darf aus dem Gleichungssystem (76) allein natürlich nicht geschlossen werden, daß die Kette (77) konvergiert, oder gar, daß ihr Wertesystem wie in § 1 gleich

$$a_0^{(0)} \frac{x_1^{(0)}}{x_0^{(0)}}, \qquad a_0^{(0)} \frac{x_2^{(0)}}{x_0^{(0)}}$$

wäre.[1]) Doch wollen wir dies jetzt tatsächlich beweisen.

[1]) Durch diese Schlußweise ließe sich geradezu beweisen, daß jede Kette ein willkürlich vorgegebenes Wertesystem hat. Vgl. § 2 der folgenden Mitteilung des Verfassers: Über die Kettenbruchentwicklung des Quotienten zweier Besselschen Funktionen.

Wir beschränken zu diesem Zweck die Variable $z$ in der komplexen Zahlenebene auf das Innere und die Peripherie eines Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und von beliebig großem Radius $R$; also:

$$(79)\qquad |z| \leqq R;$$

den Nullpunkt selbst schließen wir aus, damit die stets zu machende Annahme $a_0^{(\nu)} \neq 0$ erfüllt ist; also:

$$(80)\qquad |z| > 0.$$

Unter diesen Einschränkungen folgt aus der Definitionsgleichung (72), wenn $\nu > |u|$, $\nu > |v|$ ist:

$$|\Gamma(u+\nu)\,\Gamma(v+\nu)\,\Phi_\nu(z)-1| = \left|\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Gamma(u+\nu)\,\Gamma(v+\nu)}{\Gamma(u+\nu+s)\,\Gamma(v+\nu+s)} \frac{z^s}{s!}\right|$$

$$= \left|\sum_{s=1}^{\infty} \frac{z^s}{(u+\nu)(u+\nu+1)\cdots(u+\nu+s-1)\,(v+\nu)(v+\nu+1)\ldots(v+\nu+s-1)\,s!}\right|$$

$$< \sum_{s=1}^{\infty} \frac{R^s}{(\nu-|u|)^s(\nu-|v|)^s\,s!} = e^{\frac{R}{(\nu-|u|)(\nu-|v|)}} - 1.$$

Dieser Ausdruck nähert sich für unbegrenzt wachsende $\nu$ der Grenze 0; also folgt:

$$(81)\qquad \lim_{\nu=\infty} \Gamma(u+\nu)\,\Gamma(v+\nu)\,\Phi_\nu(z) = 1.$$

Setzt man hier $\nu+1$ an Stelle von $\nu$ und dividiert die entstehende Gleichung durch (81), so kommt:

$$(82)\qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{(u+\nu)(v+\nu)\,\Phi_{\nu+1}(z)}{\Phi_\nu(z)} = 1.$$

Daher ist $x_2^{(\nu)} = \Phi_\nu(z)$ für genügend große Werte von $\nu$ gewiß von Null verschieden, und man erhält als erstes wichtiges Resultat:

$$(83)\qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{x_0^{(\nu)}}{x_2^{(\nu)}} = z^2 \lim_{\nu=\infty} \frac{\Phi_{\nu+1}(z)}{\Phi_\nu(z)} = 0.$$

Ferner ist nach den Definitionsgleichungen (75):

$$\frac{x_1^{(\nu)}}{x_2^{(\nu)}} = \frac{z(u+v+2\nu-1)\,\Phi_{\nu+1}(z) + z^2\,\Phi_{\nu+2}(z)}{\Phi_\nu(z)}$$

$$= \frac{z(u+v+2\nu-1)}{(u+\nu)(v+\nu)} \frac{(u+\nu)(v+\nu)\,\Phi_{\nu+1}(z)}{\Phi_\nu(z)} + z^2 \frac{\Phi_{\nu+2}(z)}{\Phi_{\nu+1}(z)} \frac{\Phi_{\nu+1}(z)}{\Phi_\nu(z)}.$$

Hieraus folgt dann unter Berücksichtigung von (82), (83) das zweite wichtige Resultat:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{x_1^{(\nu)}}{x_2^{(\nu)}} = 0. \tag{84}$$

Wegen $|z| < R$ folgt aus den Definitionsgleichungen (74) für $\nu > |u|$, $\nu > |v|$:

$$|a_0^{(\nu)}| \leq R^2, \quad |a_1^{(\nu)}| < R(|u| + |v| + 2\nu - 1),$$
$$|a_2^{(\nu)}| \geq (\nu - |u|)(\nu - |v|).$$

Daher gibt es eine nur von $R$, nicht aber vom speziellen Wert $z$ abhängende Zahl $N$, derart, daß für $\nu > N$ durchweg

$$|a_0^{(\nu)}| + |a_1^{(\nu)}| \leq \tfrac{1}{2}(|a_2^{(\nu)}| - 1)$$

ist. Dann nehmen aber nach den Entwicklungen zu Beginn des § 3 die Zahlen $|A_{0,N}^{(\nu)}|$ von $\nu = 1$ ab mit wachsendem $\nu$ monoton zu, und die Kette

$$\begin{bmatrix} a_0^{(N)}, & a_0^{(N+1)}, & a_0^{(N+2)}, & \dots \\ a_1^{(N)}, & a_1^{(N+1)}, & a_1^{(N+2)}, & \dots \\ a_2^{(N)}, & a_2^{(N+1)}, & a_2^{(N+2)}, & \dots \end{bmatrix} \tag{85}$$

erfüllt die Voraussetzungen der Theoreme II und III (mit $\vartheta = \frac{1}{2}$). Sie ist also unbedingt konvergent, und, wenn ihr Wertesystem mit $\alpha_1^{(N)}$, $\alpha_2^{(N)}$ bezeichnet wird, so ist (Theorem III):

$$\tfrac{1}{2}|\alpha_2^{(N)}| \geq |a_0^{(N)}| + |\alpha_1^{(N)}| > 0. \tag{86}$$

Nun ist nach der Definition des Wertesystems einer Kette (pag. 407):

$$\alpha_1^{(N)} = a_0^{(N)} \lim_{\lambda=\infty} \frac{A_{1,N}^{(\lambda)}}{A_{0,N}^{(\lambda)}}, \quad \alpha_2^{(N)} = a_0^{(N)} \lim_{\lambda=\infty} \frac{A_{2,N}^{(\lambda)}}{A_{0,N}^{(\lambda)}}. \tag{87}$$

Da also diese Grenzwerte existieren, und nach (86) überdies $a_2^{(N)} \neq 0$ ist, so ist für hinreichend große Werte von $\lambda$ gewiß auch:

$$A_{0,N}^{(\lambda)} \neq 0, \quad A_{2,N}^{(\lambda)} \neq 0.$$

Ferner wurde bereits hervorgehoben, daß dann auch $x_2^{(\lambda)} \neq 0$ ist, sodaß man aus (78ª) für $\mu = N$ und für hinreichend große $\lambda$ erhält:

$$(88)\qquad \frac{x_i^{(N)}}{x_2^{(\lambda+N)} A_{i,N}^{(\lambda+2)}} = \frac{A_{i,N}^{(\lambda)}}{A_{i,N}^{(\lambda+2)}} \frac{x_0^{(\lambda+N)}}{x_2^{(\lambda+N)}} + \frac{A_{i,N}^{(\lambda+1)}}{A_{i,N}^{(\lambda+2)}} \frac{x_1^{(\lambda+N)}}{x_2^{(\lambda+N)}} + 1$$

$$(i = 0,\ 2).$$

Der Wert $i = 1$ ist hier aber nicht ohne weiteres zulässig, da wir nicht wissen, ob der dann auftretende Nenner $A_{1,N}^{(\lambda+2)}$ ebenfalls von Null verschieden ist.

Da die Größen $|A_{0,N}^{(\nu)}|$ mit $\nu$ monoton wachsen, so ist:

$$(89)\qquad \left|\frac{A_{0,N}^{(\lambda)}}{A_{0,N}^{(\lambda+2)}}\right| \leqq 1; \quad \left|\frac{A_{0,N}^{(\lambda+1)}}{A_{0,N}^{(\lambda+2)}}\right| \leqq 1.$$

Wählt man jetzt in Formel (88) für $i$ den Wert 0 und läßt dann $\lambda$ unbegrenzt wachsen, so folgt unter Berücksichtigung von (83), (84), (89):

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{x_0^{(N)}}{x_2^{(\lambda+N)} A_{0,N}^{(\lambda+2)}} = 1.$$

Daher ist notwendig $x_0^{(N)} \neq 0$, und außerdem:

$$(90)\qquad \lim_{\lambda=\infty} x_2^{(\lambda+N)} A_{0,N}^{(\lambda+2)} = x_0^{(N)} \neq 0.$$

Um in Gleichung (88) denselben Prozeß auch für $i = 2$ ausführen zu können, setze man in der zweiten Gleichung (87) an Stelle von $\lambda$ zuerst $\lambda + 1$, sodann $\lambda + 2$, und dividiere die zwei entstehenden Gleichungen durcheinander, was wegen $a_2^{(N)} \neq 0$ erlaubt ist. Es kommt so:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{A_{2,N}^{(\lambda+1)}}{A_{2,N}^{(\lambda+2)}} : \frac{A_{0,N}^{(\lambda+1)}}{A_{0,N}^{(\lambda+2)}} = 1.$$

Mit Rücksicht auf (89) folgt daher:

$$\overline{\lim_{\lambda=\infty}} \left| \frac{A_{2,N}^{(\lambda+1)}}{A_{2,N}^{(\lambda+2)}} \right| \leq 1; \quad \text{also auch:} \quad \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \left| \frac{A_{2,N}^{(\lambda)}}{A_{2,N}^{(\lambda+2)}} \right| \leq 1.^{1)}$$

Infolgedessen kann jetzt auch für $i = 2$ aus (88) geschlossen werden:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{x_2^{(N)}}{x_2^{(\lambda+N)} A_{2,N}^{(\lambda+2)}} = 1.$$

Es ist also auch $x_2^{(N)} \neq 0$, und außerdem

$$\lim_{\lambda=\infty} x_2^{(\lambda+N)} A_{2,N}^{(\lambda+2)} = x_2^{(N)} \neq 0. \tag{91}$$

Dividiert man jetzt (91) durch (90), so kommt:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{A_{2,N}^{(\lambda+2)}}{A_{0,N}^{(\lambda+2)}} = \frac{x_2^{(N)}}{x_0^{(N)}},$$

oder auch mit Rücksicht auf die zweite Gleichung (87):

$$a_2^{(N)} = a_0^{(N)} \frac{x_2^{(N)}}{x_0^{(N)}}. \tag{92}$$

Da die Kette (85) unbedingt konvergiert, so setzen wir:

$$\begin{bmatrix} a_0^{(N+1)}, & a_0^{(N+2)}, & a_0^{(N+3)}, & \ldots \\ a_1^{(N+1)}, & a_1^{(N+2)}, & a_1^{(N+3)}, & \ldots \\ a_2^{(N+1)}, & a_2^{(N+2)}, & a_2^{(N+3)}, & \ldots \end{bmatrix} = \begin{cases} a_1^{(N+1)} \\ a_2^{(N+1)} \end{cases},$$

und erhalten natürlich (vgl. (12) pag. 413):

$$a_1^{(N)} = a_1^{(N)} + \frac{a_0^{(N+1)}}{a_2^{(N+1)}}, \qquad a_2^{(N)} = a_2^{(N)} + \frac{a_1^{(N+1)}}{a_2^{(N+1)}}.$$

Analog zu Formel (92) finden wir jetzt aber auch:

$$a_2^{(N+1)} = a_0^{(N+1)} \frac{x_2^{(N+1)}}{x_0^{(N+1)}};$$

---

[1]) Übrigens kann man leicht beweisen, daß auch $\left| A_{2,N}^{(\lambda)} \right|$ mit $\lambda$ monoton wächst, wodurch die obigen Betrachtungen sich etwas vereinfachen würden.

und folglich:

$$a_1^{(N)} = a_1^{(N)} + \frac{x_0^{(N+1)}}{x_2^{(N+1)}} = \frac{x_0^{(N+1)} + a_1^{(N)} x_2^{(N+1)}}{x_2^{(N+1)}} = a_0^{(N)} \frac{x_1^{(N)}}{x_0^{(N)}},$$

letzteres nach (76) für $\nu = N$. Mit (92) zusammen besagt dies aber, daß das Wertesystem der konvergenten Kette (85) kein anderes ist als:

$$a_0^{(N)} \frac{x_1^{(N)}}{x_0^{(N)}}, \qquad a_0^{(N)} \frac{x_2^{(N)}}{x_0^{(N)}}.$$

Jetzt ist es nicht mehr schwer, das Analoge auch für die Kette (77) nachzuweisen. Nach dem Lemma auf pag. 414 wird diese nämlich konvergent oder divergent sein, je nachdem der Ausdruck

$$A_0^{(N)} a_0^{(N)} + A_0^{(N+1)} a_1^{(N)} + A_0^{(N+2)} a_2^{(N)}$$

von Null verschieden oder gleich Null ist; und ihr Wertesystem ist im Konvergenzfall:

$$a_i^{(0)} = a_0^{(0)} \frac{A_i^{(N)} a_0^{(N)} + A_i^{(N+1)} a_1^{(N)} + A_i^{(N+2)} a_2^{(N)}}{A_0^{(N)} a_0^{(N)} + A_0^{(N+1)} a_1^{(N)} + A_0^{(N+2)} a_2^{(N)}} \quad (i = 1, 2).$$

Nach unseren Resultaten ist aber für $i = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} & A_i^{(N)} a_0^{(N)} + A_i^{(N+1)} a_1^{(N)} + A_i^{(N+2)} a_2^{(N)} \\ &= \frac{a_0^{(N)}}{x_0^{(N)}} \left(A_i^{(N)} x_0^{(N)} + A_i^{(N+1)} x_1^{(N)} + A_i^{(N+2)} x_2^{(N)}\right) \\ &= \frac{a_0^{(N)}}{x_0^{(N)}} x_i^{(0)} \text{ (nach Formel (78)).} \end{aligned}$$

Die Kette (77) wird daher konvergieren oder divergieren, je nachdem $x_0^{(0)}$ von Null verschieden oder gleich Null ist, und ihr Wertesystem ist im ersten Fall:

$$a_1^{(0)} = a_0^{(0)} \frac{x_1^{(0)}}{x_0^{(0)}}, \qquad a_2^{(0)} = a_0^{(0)} \frac{x_2^{(0)}}{x_0^{(0)}}.$$

Nun ist nach Formel (75) $x_0^{(0)} = z^2 \Phi_1(z)$, also eine ganze transzendente Funktion von $z$, und hat als solche nur eine endliche Anzahl von Nullstellen im Gebiet $|z| < R$. Schließt man

diese nachträglich noch aus, so ist demnach die Kette (77) konvergent, und wenn man für $a_i^{(\nu)}$, $x_i^{(\nu)}$ die in (74), (75) angegebenen Werte einsetzt, so erhält man die Formel:

$$\begin{bmatrix} z^2 \\ z(u+v+2\nu-1) \\ (u+\nu)(v+\nu) \end{bmatrix}_{\nu=0}^{\infty} = \begin{cases} z(u+v-1)+z^2\dfrac{\Phi_2(z)}{\Phi_1(z)} \\ \dfrac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}, \end{cases}$$

oder auch (vgl. pag. 409):

$$\begin{bmatrix} 1, & z^2 \\ 0, & z(u+v+2\nu-1) \\ 0, & (u+\nu)(v+\nu) \end{bmatrix}_{\nu=1}^{\infty} = \begin{cases} z^2\dfrac{\Phi_2(z)}{\Phi_1(z)} \\ \dfrac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} - uv. \end{cases}$$

Da der Radius $R$ des Kreises, innerhalb dessen die Variable $z$ gelegen sein sollte, beliebig groß gewählt werden kann, so gilt diese Formel für jeden endlichen Wert von $z$, welcher nicht Nullstelle der Funktion $\Phi_1(z)$ ist. Man darf nachträglich sogar den seither ausgeschlossenen Wert $z=0$ wieder zulassen, da unschwer die Formel

$$\begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 0 \\ 0, & (u+\nu)\ (v+\nu) \end{bmatrix}_{\nu=1}^{\infty} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

zu bestätigen ist.[1]) Wir bekommen demnach:

**Theorem XIII.** Bedeuten $u, v$ zwei beliebige Konstante, und $z$ eine komplexe Variable, so gilt die Beziehung:

$$\begin{bmatrix} 1, & z \\ 0, & z(u+v+2\nu-1) \\ 0, & (u+\nu)(v+\nu) \end{bmatrix}_{\nu=1}^{\infty} = \begin{cases} z^2\dfrac{\Phi_2(z)}{\Phi_1(z)} \\ \dfrac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} - uv \end{cases}$$

[1]) Bei dieser Kette ist nämlich für $\nu \geqq 3$ durchweg:

$$A_1^{(\nu)} = 0,\ A_2^{(\nu)} = 0,\ A_0^{(\nu)} \neq 0,$$

wobei dann allerdings vorausgesetzt werden muß, daß weder $u$ noch $v$ eine negative ganze Zahl ist.

für alle endlichen Werte von $z$, ausgenommen die Nullstellen der Funktion $\Phi_1(z)$; für diese divergiert die Kette. Dabei bedeuten $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ die ganzen transzendenten Funktionen:

$$\Phi_\nu(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{\Gamma(u+\nu+s)\,\Gamma(v+\nu+s)\,s!} \qquad (\nu = 0, 1, 2).$$

Übrigens ist die obige Kette nicht immer unbedingt konvergent; dies ist offenbar nur dann der Fall, wenn wir von $z$ die Nullstellen aller Funktionen $\Phi_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, \ldots \infty)$ ausschließen. Führt man die analoge Entwicklung für Ketten erster Ordnung durch, so gelangt man zu einer Formel, welche im wesentlichen mit der bekannten[1]) Kettenbruchdarstellung für den Quotienten zweier Besselschen Funktionen übereinstimmt.

Wir wählen jetzt für $u$, $v$, $z$ speziell rationale Werte:

$$u = \frac{e}{h}, \quad v = \frac{f}{h}, \quad z = \frac{g}{h} \neq 0,$$

wo $e$, $f$, $g$, $h$ ganze Zahlen sind. Dann sind die Elemente der in Theorem XIII auftretenden Kette sämtlich rationale Zahlen. Es gibt daher eine äquivalente Kette mit lauter ganzzahligen Elementen, nämlich:

$$\begin{bmatrix} 1, & \frac{g^2}{h^2} \\ 0, & \frac{g}{h}\left(\frac{e}{h} + \frac{f}{h} + 2\nu - 1\right) \\ 0, & \left(\frac{e}{h} + \nu\right)\left(\frac{f}{h} + \nu\right) \end{bmatrix}_{\nu=1}^{\infty}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1, & g^2, & g^2 h^2, & g^2 h^4 \\ 0, & g(e+f+h), & gh^2(e+f+3h), & gh^2(e+f+(2\nu-1)h) \\ 0, & (e+h)(f+h), & (e+2h)(f+2h), & (e+\nu h)(f+\nu h) \end{bmatrix}_{\nu=3}^{\infty}.$$

Diese letzte Kette erfüllt nun aber die Voraussetzungen von Theorem IX. Daraus folgt erstens, daß sie unbedingt

[1]) In der Literatur übrigens meist ohne ausreichenden Beweis. Vgl. die folgende Mitteilung des Verfassers: Über die Kettenbruchentwicklung des Quotienten zweier Besselschen Funktionen.

konvergiert, daher kann der Wert $z = \frac{g}{h}$ keine Nullstelle von $\Phi_1(z)$ sein, weil sonst nach Theorem XIII die Kette divergieren müßte. Zweitens folgt aber auch aus Theorem IX, daß keine Relation der Form

$$P_0 + P_1 z^2 \frac{\Phi_2(z)}{\Phi_1(z)} + P_2 \left(\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} - uv\right) = 0$$

mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten $P$ bestehen kann; oder, was dasselbe sagt, da $u$, $v$, $z$ rational sind: keine Relation der Form

$$Q_0 \Phi_0(z) + Q_1 \Phi_1(z) + Q_2 \Phi_2(z) = 0$$

mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten $Q_i$. Dies Resultat läßt sich folgendermaßen formulieren:

**Theorem XIV.** Wenn $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ die gleichen ganzen transzendenten Funktionen sind wie in Theorem XIII, und wenn die dabei auftretenden Konstanten $u$, $v$ rationale Werte haben, so kann die Gleichung

$$Q_0 \Phi_0(z) + Q_1 \Phi_1(z) + Q_2 \Phi_2(z) = 0 \qquad (z \neq 0)$$

für rationale $Q_0$, $Q_1$, $Q_2$, $z$ nicht bestehen, es sei denn, daß $Q_0 = Q_1 = Q_2 = 0$ ist. Insbesondere haben also die Funktionen $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ keine rationalen Nullstellen.

Besonderes Interesse bietet die Annahme:

$$u = \tfrac{1}{3}, \; v = \tfrac{2}{3}.$$

Setzt man dann noch $z = \left(\frac{\zeta}{3}\right)^3$, so findet man nach leichter Reduktion:

$$\varrho \Phi_0 = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\zeta^{3s}}{(3s)!} = \tfrac{1}{3}\left(e^{\zeta} + e^{\varepsilon\zeta} + e^{\varepsilon^2\zeta}\right),$$

$$\varrho \Phi_1 = 9 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\zeta^{3s}}{(3s+2)!} = \frac{3}{\zeta^2}\left(e^{\zeta} + \varepsilon e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon^2 e^{\varepsilon^2\zeta}\right),$$

$$\varrho \Phi_2 = 243 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+1)\zeta^{3s}}{(3s+5)!} = \frac{27}{\zeta^5}\left[\zeta\left(e^{\zeta} + \varepsilon^2 e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon e^{\varepsilon^2\zeta}\right) - 2\left(e^{\zeta} + \varepsilon e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon^2 e^{\varepsilon^2\zeta}\right)\right],$$

wo $\varepsilon$ eine primitive dritte Einheitswurzel bedeutet, und $\varrho = \Gamma(\frac{1}{3})\,\Gamma(\frac{2}{3})$ ist. Aus Theorem XIII folgt daher:

$$\begin{bmatrix} 1, \frac{1}{729}\zeta^6 \\ 0, \frac{2}{27}\nu\zeta^3 \\ 0, (\frac{1}{3}+\nu)(\frac{2}{3}+\nu) \end{bmatrix}_{\nu=1}^{\infty} = \begin{cases} \frac{\zeta^4}{81}\,\frac{e^\zeta + \varepsilon^2 e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon e^{\varepsilon^2\zeta}}{e^\zeta + \varepsilon e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon^2 e^{\varepsilon^2\zeta}} - \frac{2}{81}\zeta^3 \\ \frac{\zeta^2}{9}\,\frac{e^\zeta + e^{\varepsilon\zeta} + e^{\varepsilon^2\zeta}}{e^\zeta + \varepsilon e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon^2 e^{\varepsilon^2\zeta}} - \frac{2}{9}. \end{cases}$$

Hierauf wenden wir zur Beseitigung der Nenner die auf pag. 410 betrachtete Transformation an mit $\varrho_0 = 81$, $\varrho_\nu = 9\,(\nu \geq 1)$, wodurch das Wertesystem das $\varrho_0\,(=81)$-fache wird. Dann kommt:

$$\begin{bmatrix} 81, & \zeta^6, & 9\zeta^6, & \zeta^6 \\ 0, & 54\zeta^3, & 12\zeta^3, & 6\nu\zeta^3 \\ 0, & 4\cdot 5, & 7\cdot 8, & (1+3\nu)(2+3\nu) \end{bmatrix}_{\nu=3}^{\infty} = \begin{cases} \zeta^4\,\frac{e^\zeta + \varepsilon^2 e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon e^{\varepsilon^2\zeta}}{e^\zeta + \varepsilon e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon^2 e^{\varepsilon^2\zeta}} - 2\zeta^3 \\ 9\zeta^2\,\frac{e^\zeta + e^{\varepsilon\zeta} + e^{\varepsilon^2\zeta}}{e^\zeta + \varepsilon e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon^2 e^{\varepsilon^2\zeta}} - 18. \end{cases}$$

Statt des Elementes $a_0^{(0)} = 81$ darf natürlich auch nachträglich wieder 1 geschrieben werden, da ja das Wertesystem einer Kette von $a_0^{(0)}$ nicht abhängt. Endlich kann man die rechts stehenden Glieder $2\zeta^3$ und 18 als $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$ unter die Kette bringen (vgl. pag. 409) und erhält so:

$$\begin{bmatrix} 1, & \zeta^6, & 9\zeta^6, & \zeta^6 \\ 2\zeta^3, & 54\zeta^3, & 12\zeta^3, & 6\nu\zeta^3 \\ 18, & 4\cdot 5, & 7\cdot 8, & (1+3\nu)(2+3\nu) \end{bmatrix}_{\nu=3}^{\infty} = \begin{cases} \zeta^4\,\frac{e^\zeta + \varepsilon^2 e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon e^{\varepsilon^2\zeta}}{e^\zeta + \varepsilon e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon^2 e^{\varepsilon^2\zeta}} \\ 9\zeta^2\,\frac{e^\zeta + e^{\varepsilon\zeta} + e^{\varepsilon^2\zeta}}{e^\zeta + \varepsilon e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon^2 e^{\varepsilon^2\zeta}}. \end{cases}$$

Diese Formel ist das Äquivalent zum Lambertschen Kettenbruch für $\frac{e^\zeta + e^{-\zeta}}{e^\zeta - e^{-\zeta}}$. Wie man aus diesem mit Hilfe des Legendreschen Irrationalitätssatzes die Irrationalität von $\frac{e^\zeta + e^{-\zeta}}{e^\zeta - e^{-\zeta}}$, also von $e^\zeta$ für rationale $\zeta$ erschließt, so schließen wir jetzt, unter Anwendung von Theorem XIV, daß zwischen den drei Zahlen

$$\omega_1 = e^{\zeta} + e^{\varepsilon\zeta} + e^{\varepsilon^2\zeta},$$
$$\omega_2 = e^{\zeta} + \varepsilon e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon^2 e^{\varepsilon^2\zeta},$$
$$\omega_3 = e^{\zeta} + \varepsilon^2 e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon e^{\varepsilon^2\zeta},$$

wenn $\zeta$ rational und von Null verschieden ist, eine Relation der Form

$$Q_1\,\omega_1 + Q_2\,\omega_2 + Q_3\,\omega_3 = 0$$

mit rationalen Koeffizienten $Q_i$ nicht bestehen kann, außer es ist $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$; insbesondere sind $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ niemals gleich Null. Wenn auch dies Resultat nicht Anspruch auf Neuheit erheben kann, weil es in dem viel allgemeineren Lindemannschen Satz über die Zahl $e$ enthalten ist, so bietet doch die Herleitung hinreichend Interesse und zeigt die Anwendbarkeit der Jacobiketten auf derartige Fragen.

Die Untersuchungen dieses Paragraphen lassen sich auf Ketten beliebiger $n^{\text{ter}}$ Ordnung ausdehnen und liefern dann insbesondere auch das Resultat, daß zwischen den $n+1$ Zahlen

$$\omega_i = e^{\zeta} + \varepsilon^i e^{\varepsilon\zeta} + \varepsilon^{2i} e^{\varepsilon^2\zeta} + \cdots + \varepsilon^{ni} e^{\varepsilon^n\zeta} \qquad (i = 0, 1 \cdots n),$$

wo $\zeta$ ($\neq 0$) rational, und $\varepsilon$ eine primitive $(n+1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel ist, eine Relation $\sum Q_i\,\omega_i = 0$ mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten $Q_i$ nicht bestehen kann. Indes werden diese Untersuchungen für $n > 2$ schon äußerst kompliziert; ich werde aber an anderer Stelle von einem neuen Gesichtspunkt auf die Frage zurückkommen.

---

## Inhalt.



---

## Theoreme.



---

# Über die Kettenbruchentwicklung des Quotienten zweier Besselschen Funktionen.

Von **Oskar Perron.**

(*Eingelaufen 7. Dezember 1907.*)

Die Besselsche Funktion definiere ich durch die beständig konvergente Potenzreihe:

$$(1) \qquad J_h(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^h \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{z}{2}\right)^{2s}}{s!\,\Gamma(h+s+1)},$$

wobei der Index $h$ auch einen beliebigen komplexen Zahlwert haben darf. Speziell ist:

$$(2) \qquad J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z.$$

Aus unserer Definition ergibt sich leicht die bekannte Beziehung:

$$(3) \qquad J_{h-1}(z) = \frac{2h}{z} J_h(z) - J_{h+1}(z).$$

Mit dieser Differenzengleichung hängt auch die Kettenbruchentwicklung für den Quotienten zweier Besselschen Funktionen zusammen:

$$(4) \qquad \frac{J_{h-1}(z)}{J_h(z)} = \frac{2h}{z} - \frac{1|}{|\frac{2(h+1)}{z}} - \frac{1|}{|\frac{2(h+2)}{z}} - \frac{1|}{|\frac{2(h+3)}{z}} - \cdots.$$

Diese Formel ist so zu verstehen, daß der unendliche Kettenbruch für jeden endlichen von Null verschiedenen Wert von $z$, welcher nicht Nullstelle der Funktion $J_h(z)$ ist, konvergiert und den Wert $\frac{J_{h-1}(z)}{J_h(z)}$ hat. Für die Nullstellen von $J_h(z)$ dagegen ist der Kettenbruch eigentlich divergent, d. h. die reziproken Werte seiner aufeinander folgenden Näherungsbrüche konvergieren gegen Null.[1] Statt (4) kann, indem man beiderseits den reziproken Wert nimmt und dann den Kettenbruch durch einen äquivalenten ersetzt, auch geschrieben werden:

$$(4^a)\quad \frac{J_h(z)}{J_{h-1}(z)} = \frac{z\,|}{|\,2h} - \frac{z^2\,|}{|\,2(h+1)} - \frac{z^2\,|}{|\,2(h+2)} - \frac{z^2\,|}{|\,2(h+3)} - \cdots.$$

Diese Entwicklung hat nun auch für $z=0$ ihren Sinn, und die eigentliche Divergenz tritt jetzt natürlich für die Nullstellen von $J_{h-1}(z)$ ein. Für $h=\frac{1}{2}$ erhält man speziell den Lambertschen Kettenbruch:

$$(5)\qquad \operatorname{tg} z = \frac{z\,|}{|\,1} - \frac{z^2\,|}{|\,3} - \frac{z^2\,|}{|\,5} - \frac{z^2\,|}{|\,7} - \cdots.$$

Für diese Formeln finden sich in der Literatur neben wenigen einwandfreien auch eine Anzahl ganz unzulänglicher Beweise. Insbesondere ist zu konstatieren, daß, obwohl Formel (4) sehr alt ist, doch erst im Jahre 1895 ein Beweis für sie erbracht worden ist, der allen Anforderungen mathematischer Strenge genügt. Ich will daher, ehe ich selbst einen neuen einfachen Beweis hier mitteile, zunächst einige kurze Bemerkungen über die bisherigen Beweisarten vorausschicken.

Eine Formel, welche sich von (4) nur durch die Bezeich-

---

[1]) Diese Terminologie weicht von der üblichen etwas ab. „Der Kettenbruch divergiert schlechthin oder im wesentlichen nach ∞" wäre die Ausdrucksweise des Herrn Pringsheim, während in der Sprache von Stolz und Gmeiner (Einleitung in die Funktionentheorie, XI. Abschnitt) der Divergenzcharakter des Kettenbruches überhaupt nicht ausgedrückt werden kann. Übrigens teilt mir Herr Pringsheim mit, daß er in Vorlesungen ebenfalls die Terminologie des Textes bevorzugt habe.

nungsweise unterscheidet, dürfte zum erstenmal im Jahr 1737 in der Literatur vorkommen, und zwar in einer Arbeit von Euler.[1]) Dieser stellt sich nämlich dort in § 31 die Aufgabe, den Wert des unendlichen Kettenbruches

$$s = a + \frac{1 \mid}{\mid (1+n)a} + \frac{1 \mid}{\mid (1+2n)a} + \frac{1 \mid}{\mid (1+3n)a} + \cdots$$

zu berechnen, und er bildet zu diesem Zweck die Reihe der Näherungsbrüche:

$$\frac{a}{1}, \quad \frac{(1+n)a^2+1}{(1+n)a}, \quad \frac{(1+n)(1+2n)a^3+(2+2n)a}{(1+n)(1+2n)a^2+1},$$

worauf er in § 32 in deutscher Übersetzung also fortfährt: „Wenn diese Brüche weiter fortgesetzt werden, erkennt man leicht ihr Bildungsgesetz; aus diesem folgt dann, daß der unendliche Bruch, nachdem man Zähler und Nenner durch das erste Glied des Nenners dividiert hat, den Wert erhält:

$$\frac{a + \frac{1}{1\cdot 1\cdot na} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 1(1+n)n^2a^3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1(1+n)(1+2n)n^3a^5} + \cdots}{1 + \frac{1}{1\cdot(1+n)na^2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot(1+n)(1+2n)n^2a^4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(1+n)(1+2n)(1+3n)n^3a^6} + \cdots},$$

welchem also $s$ gleich ist.“ Die Gleichheit dieses Bruches mit dem obigen Kettenbruch besagt aber in der Tat nichts anderes als Formel (4): man braucht nur

$$a = \frac{2h}{z\sqrt{-1}}, \quad n = \frac{1}{h}$$

zu setzen, um vollständige Übereinstimmung zu haben. Indes hat Euler zweifellos unter $a$ und $n$ bloß reelle positive, vielleicht bloß natürliche Zahlen verstehen wollen. Aber auch bei dieser Einschränkung ist seine Darstellung durchaus noch kein exakter Beweis. Denn selbst wenn Euler das recht kom-

[1]) De fractionibus continuis. Commentarii Academiae Petropolitanae, tome IX, 1737.

plizierte Bildungsgesetz der Näherungsbrüche wirklich erkannt haben sollte und nicht bloß durch eine unvollständige Induktion erraten, so ließe doch sein unvermittelter Übergang vom Endlichen zum Unendlichen nach heutigen Begriffen noch viel zu wünschen übrig.

Gewissermaßen den umgekehrten Weg wie Euler verfolgt Legendre in der vierten Note seiner „Éléments de géométrie". Während nämlich Euler von dem Kettenbruch ausgeht und diesen durch den Quotienten zweier Reihen ausdrückt, geht Legendre umgekehrt von den Reihen aus und endet bei dem Kettenbruch. Seine noch viel weniger befriedigende Darstellung findet sich fast ohne Änderung auch in Herrn Bachmanns „Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen" (Leipzig 1892).

Setzt man mit Legendre-Bachmann:

$$\varphi(z) = 1 + \frac{1}{z} y^2 + \frac{1}{z(z+1)} \frac{y^4}{1 \cdot 2} + \frac{1}{z(z+1)(z+2)} \frac{y^6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots,$$

so ist offenbar:

$$\varphi(z) = \frac{\Gamma(z) J_{z-1}(2iy)}{(iy)^{z-1}},$$

und entsprechend der Formel (3) hat man jetzt:

$$\varphi(z) = \varphi(z+1) + \frac{y^2}{z(z+1)} \varphi(z+2).$$

Führt man dann die Abkürzung

$$\frac{y^2}{z} \frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)} = \psi(z)$$

ein, so geht die vorige Formel über in:

$$\psi(z) = \frac{y^2}{z + \psi(z+1)}.$$

Indem dann im Nenner auch wieder

$$\psi(z+1) = \frac{y^2}{z + 1 + \psi(z+2)}$$

gesetzt werden kann etc., soll hieraus ohne weiteres der unendliche Kettenbruch

$$\psi(z) = \frac{y^2}{z} + \frac{y^2}{z+1} + \frac{y^2}{z+2} + \cdots$$

hervorgehen, welcher im wesentlichen mit ($4^a$) gleichbedeutend ist. Aber diese rein formale Behandlung entspricht den Anforderungen mathematischer Strenge nur sehr wenig, und wir werden im nächsten Paragraphen sogar sehen, wie man durch einen derartigen Schluß mit Leichtigkeit beweisen kann, daß jeder Kettenbruch einer beliebig angenommenen Zahl gleich ist.

Die Legendresche $\varphi$-Funktion findet sich auch in einem Aufsatz von Stern,[1]) der indes den unendlichen Kettenbruch nur unter der ausdrücklichen Voraussetzung gelten läßt, „daß man das weggelassene Glied ohne Nachteil für das Resultat vernachlässigen darf". Da aber Stern nicht untersucht, ob oder wann diese Voraussetzung erfüllt ist, kommt seine Darstellung hier eigentlich nicht in Betracht. Nur den Spezialfall des Lambertschen Kettenbruches glaubte er vollständig erledigen zu können; doch ist sein diesbezüglicher Beweis noch in mehr als einer Hinsicht mangelhaft.[2])

Der gleiche Fehler wie bei Legendre-Bachmann findet sich bei Bessel,[3]) der indes nur ganzzahlige Indices betrachtet. Jedoch gewinnt seine Darstellung dadurch erhöhte Bedeutung, daß die dabei auftretenden unendlichen Reihen als selbständige Transzendenten in die Analysis eingeführt sind, und daher hier zum erstenmal ein zu ($4^a$) äquivalenter Kettenbruch in Verbindung mit dem Besselschen Funktionszeichen $J$ erscheint. Bessel schreibt die Formel (3) in der Gestalt:

[1]) Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung. Crelles Journal für Mathematik, Bd. 11 (1834).

[2]) Bekanntlich hat Lambert selbst diesen Spezialfall schon 1767 sehr viel besser behandelt. worüber der Aufsatz des Herrn Pringsheim zu vergleichen ist: Über die ersten Beweise der Irrationalität von $e$ und $\pi$. Diese Sitzungsberichte, Bd. 28, 1898.

[3]) Untersuchungen des Teils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht, § 11. Mathematische Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1824.

$$\frac{J_h(z)}{J_{h-1}(z)} = \frac{\frac{z}{2h}}{1 - \frac{z}{2h}\frac{J_{h+1}(z)}{J_h(z)}}:$$

indem er dann im Nenner für $\frac{J_{h+1}(z)}{J_h(z)}$ wieder den entsprechenden Wert

$$\frac{J_{h+1}(z)}{J_h(z)} = \frac{\frac{z}{2h+2}}{1 - \frac{z}{2h+2}\frac{J_{h+2}(z)}{J_{h+1}(z)}}$$

substituiert und in der gleichen Weise unbegrenzt fortfährt, schließt Bessel unbedenklich:

$$\frac{J_h(z)}{J_{h-1}(z)} = \frac{\frac{z}{2h}|}{|1} - \frac{\frac{z^2}{2h(2h+2)}|}{|1} - \frac{\frac{z^2}{(2h+2)(2h+4)}|}{|1} - \cdots.$$

Dies ist also ganz der gleiche Fehler wie bei Legendre. Übrigens benutzt Bessel die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche dieses Kettenbruches in einwandfreier Weise, um $J_h$ linear durch $J_0$ und $J_1$ auszudrücken, während der unendliche Kettenbruch als solcher nur eine untergeordnete Rolle spielt.

Eine ganz interessante Variante des gleichen Fehlschlusses möchte ich nicht unerwähnt lassen, obwohl sie sich nur auf den Spezialfall des Lambertschen Kettenbruches bezieht. Sie findet sich in einer Note des Herrn J. W. L. Glaisher,[1]) welcher die Formel (5) auf folgende Art „beweist“:

Die Funktion $y = A\cos(\sqrt{2x} + B)$, wo $A, B$ Konstante sind, ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$y + y' + 2xy'' = 0.$$

Aus dieser findet man durch $s$-malige Differentiation:

---

[1]) On Lambert's proof of the irrationality of $\pi$, and on the irrationality of certain other quantities. Report of the forty-first meeting of the British association for the advancement of science, held at Edinburgh 1871.

$$y^{(s)} + (2s+1)\,y^{(s+1)} + 2\,x\,y^{(s+2)} = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{y^{(s+1)}}{y^{(s)}} = \frac{-1}{2s+1+2x\dfrac{y^{(s+2)}}{y^{(s+1)}}}. \tag{6}$$

Hieraus soll nun wieder folgen, daß

$$-\frac{1}{\sqrt{2x}}\operatorname{tg}(\sqrt{2x}+B) = \frac{y'}{y} = \frac{-1|}{|1} - \frac{2x|}{|3} - \frac{2x|}{|5} - \cdots$$

ist. Die Integrationskonstante $B$ bestimmt Herr Glaisher nachträglich noch dadurch, daß er für $x$ den Spezialwert $x=0$ einsetzt; es kommt so $B=0$. Aber hier ist es natürlich wieder durchaus unstatthaft, aus (6) ohne weiteres einen unendlichen Kettenbruch hervorgehen zu lassen, und durch die nachträgliche Berechnung einer Integrationskonstanten, wodurch die Sache offenbar besonders glaubhaft gemacht werden soll, wird hieran nicht das geringste gebessert.

Viel korrekter ist schon die Methode von Schlömilch,[1]) der sich aber auch auf ganzzahlige Indices beschränkt. Hier wird die Rekursionsformel (3) in der Form geschrieben:

$$\frac{J_h(z)}{J_{h-1}(z)} = \frac{\dfrac{z}{2}}{h - \dfrac{z}{2}\dfrac{J_{h+1}(z)}{J_h(z)}},$$

woraus zunächst der endliche Kettenbruch

$$\frac{J_h(z)}{J_{h-1}(z)} = \frac{\frac{z}{2}|}{|h} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2|}{|h+1} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2|}{|h+2} - \cdots - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2|}{|h+k-\dfrac{z}{2}\dfrac{J_{h+k+1}(z)}{J_{h+k}(z)}}$$

hervorgeht. Hiegegen ist, solange $z$ keine Nullstelle von

$$J_{h-1}(z),\ J_h(z),\ \ldots\ J_{h+k}(z)$$

[1]) Über die Besselsche Funktion. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 2. Jahrg., 1857. Man vergleiche auch: Über den Kettenbruch für tan $z$. Gleiche Zeitschrift, 16. Jahrg., 1871.

ist, nichts einzuwenden. Nun beweist Schlömilch weiter ganz richtig, daß der „Rest“ $\frac{z}{2}\frac{J_{h+k+1}(z)}{J_{h+k}(z)}$ mit wachsendem $k$ gegen Null konvergiert. Hiedurch wird es ja allerdings recht plausibel gemacht, daß

$$\frac{J_h(z)}{J_{h-1}(z)} = \frac{\frac{z}{2}|}{|h} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2|}{|h+1} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2|}{|h+2} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2|}{|h+3} - \cdots$$

gesetzt werden darf; aber nichtsdestoweniger bedarf doch dieser Schluß immer noch dringend der Rechtfertigung. Denn in der Reihenlehre gilt ja allerdings der leicht zu beweisende und sehr häufig benutzte Satz: „Wenn für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$u = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + R_n$$

ist, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Größe $u$ gleich der unendlichen Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

gesetzt werden darf, darin, daß der absolute Wert des Restes $R_n$ mit wachsendem $n$ unter jede Grenze herabsinkt.“ Wenn dagegen eine Kettenbruchentwicklung der Form

$$u = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n + R_n}$$

vorliegt, so ist die Bezeichnung der Zahl $R_n$ als Rest des Kettenbruches insofern recht irreführend, als die Bedingung $\lim R_n = 0$ jetzt weder notwendig noch hinreichend dafür ist, daß

$$u = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

gesetzt werden kann. Dies hat später Schlömilch selbst in seinem Handbuch der algebraischen Analysis hervorgehoben, und er hat dort zugleich einige besondere Fälle entwickelt, in denen die Bedingung wenigstens hinreichend ist.[1]) Diese be-

[1]) Auch in dem oben zitierten Aufsatz von Stern wird die Frage berührt, wann der Rest eines Kettenbruches vernachlässigt werden darf. Doch sind die dortigen Angaben sehr unvollständig und unrichtig.

ziehen sich aber nur auf reelle Kettenbrüche und können in der Tat, wenn nicht nur $h$ sondern auch $z^2$ reell ist, für die vorliegende Frage nutzbar gemacht werden, sodaß für diesen Spezialfall, aber auch nur für diesen die Mittel zu einem exakten Beweis von Schlömilch im wesentlichen geliefert sind.[1]) Trotzdem ist der ursprüngliche Schlömilchsche Beweis, bei dem das schließliche Verschwinden des Restes ohne weiteres als ausreichend erachtet wird, nie angefochten worden, er scheint vielmehr noch heute für einwandfrei gehalten zu werden und wird sogar für beliebige Indices in Anspruch genommen. So ist er in die Monographie von Lommel[2]) übergegangen und findet sich sogar auch in dem neuen Handbuch des Herrn Nielsen.[3]) In letzterem ist auf pag. 38 zu lesen: „Sucht man nun die Bedingung dafür, daß der Kettenbruch unbegrenzt fortgesetzt werden darf, so ist offenbar, daß $\lim R_n = 0$ sein muß, eine Bedingung, die sowohl notwendig als hinreichend ist.“ Demgegenüber zeigt aber doch die einfachste Überlegung, daß die Bedingung gewiß nicht notwendig sein kann; jeder regelmäßige Kettenbruch, dessen Teilnenner endlich bleiben, ist ein Beispiel dafür. Dagegen erweist sich hier die Bedingung allerdings, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, bis zu einem gewissen Grad als hinreichend. Aber mit der Wendung „Es ist offenbar, daß ...“ ist dies natürlich keineswegs bewiesen. Vielmehr ließe sich die Konvergenz des Kettenbruches noch mit triftigen Gründen bezweifeln. Denn wenn der Kettenbruch wirklich die Funktion $\frac{J_h(z)}{J_{h-1}(z)}$ darstellen soll, so wird man Konvergenz wohl nicht erwarten, sobald $z$ eine Nullstelle von $J_{h-1}(z)$ ist. Nachdem dann aber für eine gewisse unendliche Menge von $z$-Werten die mögliche Divergenz des Ketten-

[1]) Eine an Schlömilch anschließende, in jeder Hinsicht mustergiltige Durchführung dieses Spezialfalles findet sich bei Stolz und Gmeiner: Einleitung in die Funktionentheorie. Leipzig 1905, pag. 579 ff.

[2]) Studien über die Besselschen Funktionen. Leipzig 1868.

[3]) Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen. Leipzig 1904.

bruches einmal zugegeben wird, fällt es doch schwer, seine Konvergenz für alle anderen Werte von $z$ auf Grund einer so zweifelhaften Beweisführung auch nur für wahrscheinlich zu halten.

Schlömilch hat noch einen weiteren Beweis gegeben. In seinem Handbuch der algebraischen Analysis führt er in § 71 die beiden Reihen ein:[1])

$$U = 1 + \frac{x^2}{1 \cdot \gamma} + \frac{x^4}{1 \cdot 2\, \gamma(\gamma+1)} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3\, \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \cdots,$$

$$V = 1 + \frac{x^2}{1 \cdot (1+\gamma)} + \frac{x^4}{1 \cdot 2(\gamma+1)(\gamma+2)} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)} + \cdots,$$

welche wieder auf die Legendresche $\varphi$-Funktion hinauskommen. Man kann

$$U = \lim_{\alpha=\infty} F\left(\alpha, \alpha, \gamma, \frac{x^2}{\alpha^2}\right), \quad V = \lim_{\alpha=\infty} F\left(\alpha, \alpha+1, \gamma+1, \frac{x^2}{\alpha^2}\right)$$

setzen, wo $F$ die Gaußsche hypergeometrische Reihe bedeutet. Schlömilch gewinnt nun den Kettenbruch

$$\frac{V}{U} = \frac{\gamma}{\gamma} + \frac{x^2 |}{|\gamma+1} + \frac{x^2 |}{|\gamma+2} + \cdots$$

einfach durch Grenzübergang aus dem bekannten Gaußschen Kettenbruch für den Quotienten:

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}.$$

Aber abgesehen davon, daß der Schlömilchsche Beweis für den Gaußschen Kettenbruch nur in ganz speziellen Fällen bindend ist, während später Schlömilch die Sache sehr wohl auch für andere Fälle in Anspruch nimmt, weist diese Methode noch einen weiteren Fehler auf. Um nämlich $\frac{V}{U}$ zu erhalten, müßte man von dem den Quotienten

$$\frac{F\left(\alpha, \alpha+1, \gamma+1, \frac{x^2}{\alpha^2}\right)}{F\left(\alpha, \alpha, \gamma, \frac{x^2}{\alpha^2}\right)}$$

[1]) Ich zitiere nach der 6. Auflage, zweiter Druck. Stuttgart 1889.

darstellenden Kettenbruch, nachdem er ins Unendliche fortgesetzt ist, hinterher den Grenzwert für $a = \infty$ berechnen. Schlömilch aber geht in den einzelnen Gliedern des Kettenbruches zur Grenze $a = \infty$ über und macht sich dadurch einer ungerechtfertigten Vertauschung zweier Grenzprozesse schuldig.

Das Verdienst, die Formel (4) zum erstenmal in ihrem vollen Umfang einwandfrei bewiesen zu haben, gebührt Herrn J. H. Graf,[1]) der allerdings die Mängel der anderen Methoden selbst nicht erkannt zu haben scheint. Sein eleganter Beweis baut sich auf ganz anderer Grundlage auf als die früheren Versuche. Bezeichnet man den Zähler des $n^{\text{ten}}$ Näherungsbruches des Kettenbruches

$$a + \frac{1 |}{| a + b} + \frac{1 |}{| a + 2b} + \frac{1 |}{| a + 3b} + \cdots$$

mit $f_{n+1}(a, b)$, so ist der Nenner des gleichen Näherungsbruches gleich $f_n(a + b, b)$, wobei $f_1(a, b) = 1$ gesetzt wird. Der Kettenbruch ist also konvergent, wenn der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_{n+1}(a, b)}{f_n(a + b, b)}$$

existiert, und er ist dann diesem Grenzwert gleich. Herr Graf stellt nun einen expliziten Ausdruck für die Funktion $f_n(a, b)$ her und gewinnt daraus die Grenzbeziehung:[2])

$$(7) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{f_n\left(\frac{2c+2}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{\Gamma(c+1+n)} \left(\frac{ix}{2}\right)^n \left(\frac{x}{2}\right)^c = J_c(x) \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Ersetzt man hier $n$ durch $n + 1$, und $c$ durch $c - 1$, so kommt auch:

---

[1]) Relations entre la fonction Bessélienne de première espèce et une fraction continue. Annali di matematica, Reihe 2, Bd. 23 (1895).

[2]) Eine Formel, die sich von dieser nur durch die Bezeichnungsweise unterscheidet, hat schon etwas früher auf anderem Weg Herr Hurwitz abgeleitet (Über die Nullstellen der Besselschen Funktion. Mathematische Annalen 33 (1889)). In dem Beweis von Herrn Graf kommt allerdings eine Vertauschung von zwei Grenzprozessen vor; doch ist deren Rechtfertigung so leicht, daß sie ohne weiteres dem Leser überlassen werden konnte.

$$(8) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{f_{n+1}\left(\frac{2c}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{\Gamma(c+1+n)} \left(\frac{ix}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{c-1} = J_{c-1}(x).$$

Durch Division der zwei letzten Gleichungen folgt, wenn $x$ keine Nullstelle von $J_c(x)$ ist:

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_{n+1}\left(\frac{2c}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{f_n\left(\frac{2c}{ix} + \frac{2}{ix}, \frac{2}{ix}\right)} = \frac{J_{c-1}(x)}{i J_c(x)}.$$

Mit Rücksicht auf die Definition der Funktion $f_n$ ist diese Gleichung aber völlig gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\frac{J_{c-1}(x)}{i J_c(x)} = \frac{2c}{ix} + \frac{1}{\frac{2(c+1)}{ix}} \, \underset{|}{+} \, \frac{1}{\frac{2(c+2)}{ix}} \, \underset{|}{+} \, \frac{1}{\frac{2(c+3)}{ix}} + \cdots,$$

oder, was das selbe ist:

$$\frac{J_{c-1}(x)}{J_c(x)} = \frac{2c}{x} - \frac{1}{\frac{2(c+1)}{x}} \, \underset{|}{-} \, \frac{1}{\frac{2(c+2)}{x}} \, \underset{|}{-} \, \frac{1}{\frac{2(c+3)}{x}} - \cdots.$$

Dies ist aber genau die Gleichung (4), und für die Nullstellen von $J_c(x)$ gilt offenbar auch das dort Gesagte, wie man erkennt, wenn man nicht Gleichung (8) durch (7), sondern umgekehrt (7) durch (8) dividiert.[1]

Ein von dem Grafschen ganz verschiedenes Beweisverfahren besteht darin, daß man aus irgendeinem allgemeinen Theorem die Tatsache entnimmt, der Kettenbruch (4) stellt eine im Endlichen überall meromorphe analytische Funktion von $z$ dar (wobei in den Polen eigentliche Divergenz stattfindet). Nachdem dies feststeht, läßt sich dann hinterher leicht zeigen,

[1] Diese Division ist sicher erlaubt, weil $J_c(x)$ und $J_{c-1}(x)$ außer allenfalls $x = 0$ keine gemeinsame Nullstelle haben können. Für eine solche müßten ja, wie man aus der Rekursionsformel (3) erschließt, auch die Funktionen $J_{c+1}(x)$, $J_{c+2}(x)$, $J_{c+3}(x) \ldots$ alle verschwinden. Bei $J_{c+\nu}(x)$ ist dies aber gewiß nicht möglich, wenn $\nu$ sehr groß ist, wie sich leicht aus der Definitionsgleichung (1) ergibt.

daß diese Funktion von $\frac{J_{h-1}(z)}{J_h(z)}$ nicht verschieden sein kann. Dies ist die Methode des Herrn E. B. van Vleck.[1])

Ich will nun in den folgenden Zeilen ein ganz einfaches direktes Verfahren angeben, indem ich die Schlömilchsche Methode etwas modifiziere und ihren wunden Punkt beseitige. Dazu bedarf es eines einfachen, wohl auch zu anderen Zwecken brauchbaren Hilfssatzes aus der Theorie der Kettenbrüche, aus welchem dann die Formel (4) selbst fast ohne jede Rechnung gefolgert werden kann.

## § 2.

Wo immer man in der Analysis auf ein System von unendlich vielen Gleichungen der Form

$$(9)\qquad \begin{aligned} x_0 &= b_0 x_1 + a_1 x_2 \\ x_1 &= b_1 x_2 + a_2 x_3 \\ &-\ -\ -\ -\ -\ - \\ x_\nu &= b_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} x_{\nu+2} \\ &-\ -\ -\ -\ -\ - \end{aligned}$$

geführt wird, ist man versucht, die Zahl $\frac{x_0}{x_1}$ als unendlichen Kettenbruch darzustellen:

$$(10)\qquad \frac{x_0}{x_1} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots,$$

und es wird manchmal nicht beachtet, daß eine solche Darstellung durchaus nicht ohne weiteres erlaubt ist. Und doch dürfen die Fälle, in denen die Gleichung (10) falsch ist, nicht als eine besonders merkwürdige Ausnahme gelten, für deren Auftreten man erst künstlich Beispiele konstruieren muß, sondern sie bilden die Regel. Denn sei

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

---

[1]) On the convergence of the continued fraction of Gauß and other continued fractions. Annals of mathematics, Reihe 2, Bd. 3 (1901).

ein beliebiger Kettenbruch, bei welchem selbstverständlich sämtliche $a_\nu$ als von Null verschieden vorausgesetzt werden. Wählt man dann ganz willkürlich zwei Zahlen $x_0$ und $x_1$, deren letztere von Null verschieden ist, so kann man aus dem System (9) wegen $a_\nu \neq 0$ eine unbegrenzte Folge von Zahlen $x_2, x_3, x_4, \ldots$ der Reihe nach berechnen. Die so gefundenen Zahlen genügen natürlich dem System (9), und wenn es erlaubt wäre, hieraus die Gleichung (10) zu folgern, so hätten wir damit wegen der Willkürlichkeit von $x_0$ und $x_1$ das absurde Resultat gewonnen, daß jeder Kettenbruch jeder Zahl gleich ist. Auch ist hienach klar, daß, selbst wenn für die Konvergenz des Kettenbruches (10) ein eigener Beweis erbracht werden kann, dies durchaus noch nicht ausreicht, um die Gleichung (10) aus dem System (9) zu folgern.

Dagegen lassen sich sehr wohl gewisse zusätzliche Bedingungen für die Zahlen $a_\nu$, $b_\nu$, $x_\nu$ angeben, deren Erfülltsein dafür ausreicht, daß das System (9) die Gleichung (10) nach sich zieht. Ich will nur ein derartiges Kriterium beweisen, welches uns für den gegenwärtigen Zweck gute Dienste leisten wird. Es lautet:

Wenn die (komplexen) Zahlen $a_\nu (\neq 0)$, $b_\nu$, $x_\nu$ das Gleichungssystem (9) befriedigen und außerdem von einer gewissen Stelle $\nu > N$ ab den Ungleichungen

$$|x_\nu| \geq (1 + |a_\nu|) |x_{\nu+1}| + |a_{\nu+1} x_{\nu+2}| > 0$$

genügen, so besteht auch die Gleichung (10), sofern nur $x_1 \neq 0$ ist. Für $x_1 = 0$ aber ist notwendig $x_0 \neq 0$ und der Kettenbruch (10) ist eigentlich divergent.

Vermöge (9) kann man $x_0$ und $x_1$ linear durch $x_\nu$ und $x_{\nu+1}$ ausdrücken, und zwar geschieht dies durch die Formeln:

$$(11) \qquad \begin{aligned} x_0 &= A_{\nu-1} x_\nu + a_\nu A_{\nu-2} x_{\nu+1} \\ x_1 &= B_{\nu-1} x_\nu + a_\nu B_{\nu-2} x_{\nu+1}, \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten $A_\nu$, $B_\nu$ den Gleichungen genügen:

$$(12)\quad \begin{array}{lll} A_0 = b_0, & A_1 = b_0 b_1 + a_1, & A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2}, \\ B_0 = 1\,, & B_1 = b_1 \qquad\quad , & B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2}; \end{array}$$

$$(13)\quad A_{\nu-1} B_\nu - A_\nu B_{\nu-1} = (-1)^\nu a_1 a_2 \ldots a_\nu\,.$$

Es gilt dann die Beziehung:

$$(14)\quad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} = \frac{A_\nu}{B_\nu}.$$

Setzt man analog zu (11) auch:

$$(15)\quad \begin{array}{l} x_\lambda = A_{\nu-1,\lambda}\, x_{\nu+\lambda} + a_{\nu+\lambda} A_{\nu-2,\lambda}\, x_{\nu+\lambda+1} \\ x_{\lambda+1} = B_{\nu-1,\lambda}\, x_{\nu+\lambda} + a_{\nu+\lambda} B_{\nu-2,\lambda}\, x_{\nu+\lambda+1}, \end{array}$$ [1]

so ist ebenso:

$$(16)\quad b_\lambda + \frac{a_{\lambda+1}|}{|b_{\lambda+1}} + \frac{a_{\lambda+2}|}{|b_{\lambda+2}} + \cdots + \frac{a_{\lambda+\nu}|}{|b_{\lambda+\nu}} = \frac{A_{\nu,\lambda}}{B_{\nu,\lambda}}.$$

Wenn man in (11) den Index $\nu$ durch $\lambda$ ersetzt, sodann für $x_\lambda$, $x_{\lambda+1}$ ihre Werte aus (15) substituiert, so werden $x_0$ und $x_1$ linear durch $x_{\nu+\lambda}$, $x_{\nu+\lambda+1}$ ausgedrückt. Das gleiche erreicht man aber auch direkt, wenn man in (11) $\nu+\lambda$ an Stelle von $\nu$ setzt. Indem man dann die beiden so entstehenden Ausdrücke miteinander vergleicht, findet man die bekannten Relationen:

$$(17)\quad \begin{array}{l} A_{\nu+\lambda-1} = A_{\lambda-1} A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda A_{\lambda-2} B_{\nu-1,\lambda} \\ B_{\nu+\lambda-1} = B_{\lambda-1} A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda B_{\lambda-2} B_{\nu-1,\lambda}\,. \end{array}$$

Wir nehmen nun zunächst an, die geforderten Bedingungen

$$(18)\quad |x_\nu| \geq (1 + |a_\nu|)\,|x_{\nu+1}| + |a_{\nu+1} x_{\nu+2}| > 0$$

seien bereits von $\nu = 1$ ab erfüllt, also insbesondere auch $|x_1| > 0$. Dann ist wegen

$$x_\nu = b_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} x_{\nu+2}$$

a fortiori:

$$|b_\nu x_{\nu+1}| + |a_{\nu+1} x_{\nu+2}| \geq (1 + |a_\nu|)\,|x_{\nu+1}| + |a_{\nu+1} x_{\nu+2}|;$$

oder auch, da $|x_{\nu+1}| > 0$ gefordert ist:

---

[1] Man könnte hierbei den Buchstaben $B$ vermeiden, indem offenbar $B_{\nu,\lambda} = A_{\nu-1,\lambda+1}$ ist; indessen ist es doch zweckmäßig, auch $B$ beizubehalten.

(19) $$|b_\nu| > 1 + |a_\nu| \quad (\nu = 1, 2, \ldots \infty).$$

Hieraus folgt bereits nach einem bekannten Satz des Herrn Pringsheim[1]) die Konvergenz des Kettenbruches; doch ist es nicht nötig, dieses Resultat, welches uns an sich noch gar nichts nützt, hier als bekannt vorauszusetzen. Aus der letzten der Gleichungen (12) schließt man:

$$|B_\nu| \geq |b_\nu B_{\nu-1}| - |a_\nu B_{\nu-2}|,$$

also mit Rücksicht auf (19):

$$\begin{aligned} |B_\nu| - |B_{\nu-1}| &\geq (|b_\nu| - 1)|B_{\nu-1}| - |a_\nu B_{\nu-2}| \\ &\geq |a_\nu|(|B_{\nu-1}| - |B_{\nu-2}|). \end{aligned}$$

Daher auch:

$$\begin{aligned} |B_\nu| - |B_{\nu-1}| > |a_\nu a_{\nu-1}|(|B_{\nu-2}| - |B_{\nu-3}|) &\geq \ldots \\ \geq |a_\nu a_{\nu-1} \ldots a_2|(|b_1| - 1) &\geq |a_1 a_2 \ldots a_\nu|; \end{aligned}$$

hieraus folgt endlich:

(20) $$|B_\nu| \geq 1 + |a_1| + |a_1 a_2| + \cdots + |a_1 a_2 \ldots a_\nu|.$$

Ferner ist nach Voraussetzung (18):

$$|x_\nu| > (1 + |a_\nu|)|x_{\nu+1}|,$$

also auch:

(21) $$|x_1| > (1 + |a_1|)(1 + |a_2|) \ldots (1 + |a_\nu|)|x_{\nu+1}|.$$

Es ist nun zu beweisen, daß der Bruch $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, dessen Nenner nach Ungleichung (20) stets von Null verschieden ist, mit wachsendem $\nu$ der Grenze $\frac{x_0}{x_1}$ zustrebt. Es ist aber nach (11):

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{x_1} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} &= \frac{A_{\nu-1} x_\nu + a_\nu A_{\nu-2} x_{\nu+1}}{B_{\nu-1} x_\nu + a_\nu B_{\nu-2} x_{\nu+1}} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} \\ &= \frac{a_\nu (A_{\nu-2} B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_{\nu-2}) x_{\nu+1}}{(B_{\nu-1} x_\nu + a_\nu B_{\nu-2} x_{\nu+1}) B_{\nu-1}} \\ &= (-1)^{\nu-1} \frac{a_1 a_2 \ldots a_\nu x_{\nu+1}}{x_1 B_{\nu-1}}, \end{aligned}$$

[1]) Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche. Diese Sitzungsberichte, Bd. 28 (1898).

und hieraus folgt unter Berücksichtigung der Ungleichungen (20) und (21):

$$\left|\frac{x_0}{x_1} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| < \frac{|a_1 a_2 \ldots a_\nu|}{(1+|a_1|)(1+|a_2|)\ldots(1+|a_\nu|)|B_{\nu-1}|} \begin{cases} < |a_1 a_2 \ldots a_\nu| \\ < \dfrac{1}{|B_{\nu-1}|}. \end{cases}$$

Von den zwei Ausdrücken auf der rechten Seite hat aber wegen (20) mindestens einer den Grenzwert Null; daher ist in der Tat:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{x_0}{x_1}; \quad \text{w. z. b. w.}$$

Nehmen wir jetzt an, die Bedingung (18) sei erst von dem Wert $\nu = N+1$ ab erfüllt, also gewiß $|x_{N+1}| > 0$. Dann ist nach dem soeben Bewiesenen doch jedenfalls $B_{\nu, N} \neq 0$, und außerdem:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\nu, N}}{B_{\nu, N}} = \frac{x_N}{x_{N+1}}.$$

Wenn man dann in (17) für $\lambda$ speziell die Zahl $N$ wählt und die entstehenden Gleichungen durch $B_{\nu-1, N}$ dividiert, so kommt:

$$\frac{A_{\nu+N-1}}{B_{\nu-1, N}} = A_{N-1} \frac{A_{\nu-1, N}}{B_{\nu-1, N}} + a_N A_{N-2}$$

$$\frac{B_{\nu+N-1}}{B_{\nu-1, N}} = B_{N-1} \frac{A_{\nu-1, N}}{B_{\nu-1, N}} + a_N B_{N-2}.$$

Hieraus folgt, wenn $\nu$ unbegrenzt wächst:

$$\text{(22)} \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\nu+N-1}}{B_{\nu-1, N}} = A_{N-1} \frac{x_N}{x_{N+1}} + a_N A_{N-2} = \frac{x_0}{x_{N+1}},$$

$$\text{(23)} \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{B_{\nu+N-1}}{B_{\nu-1, N}} = B_{N-1} \frac{x_N}{x_{N+1}} + a_N B_{N-2} = \frac{x_1}{x_{N+1}}.$$

Ist nun $x_1 \neq 0$, so kann man Gleichung (22) durch (23) dividieren und erhält:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{x_0}{x_1}.$$

Ist aber etwa $x_1 = 0$, so ist jedenfalls $x_0 \neq 0$; denn sonst würde aus (9) der Reihe nach auch $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, ... folgen,

während doch $x_{\nu+1} \neq 0$ vorausgesetzt ist. Daher ist jetzt, indem man umgekehrt (23) durch (22) dividiert:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{B_\nu}{A_\nu} = \frac{x_1}{x_0} = 0.$$

Hiemit ist aber unser Satz vollständig bewiesen.

Schreibt man die Ungleichung (18) in der Gestalt:

$$\left|\frac{x_\nu}{x_{\nu+1}}\right| \geqq 1 + |a_\nu| + |a_{\nu+1}| \left|\frac{x_{\nu+2}}{x_{\nu+1}}\right|,$$

so erkennt man augenblicklich, daß sie sicher von einem gewissen $\nu$ ab erfüllt ist, wenn die Zahlen $|a_\nu|$ unter einer endlichen Schranke bleiben, und außerdem die Beziehung

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} = 0$$

besteht. Wir finden also speziell:

Wenn die Zahlen $|a_\nu|$ $(>0)$ unter einer von $\nu$ unabhängigen Schranke bleiben, und wenn außerdem

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} = 0$$

ist, so folgt aus dem System (9) allemal die Gleichung (10), sofern nur $x_1 \neq 0$ ist. Für $x_1 = 0$ aber ist notwendig $x_0 \neq 0$ und der Kettenbruch (10) ist eigentlich divergent.

## § 3.

Wenden wir uns jetzt wieder zu den Besselschen Funktionen, so ist leicht zu sehen, daß durch den letzten Satz der Schlömilchsche Beweis legalisiert wird. In der Tat ist nach Gleichung (3), sobald $z$ von Null verschieden ist:

$$(24) \qquad \begin{aligned} J_{h-1}(z) &= \frac{2h}{z} J_h(z) - J_{h+1}(z) \\ J_h(z) &= \frac{2(h+1)}{z} J_{h+1}(z) - J_{h+2}(z) \\ J_{h+1}(z) &= \frac{2(h+2)}{z} J_{h+2}(z) - J_{h+3}(z) \\ &\text{— — — — — — — —.} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen haben die Form des Systems (9), und zwar ist durchweg $a_\nu = -1$. Wenn wir also noch zeigen können, daß für jedes von Null verschiedene endliche $z$ die Beziehung

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{J_{h+\nu}(z)}{J_{h+\nu-1}(z)} = 0 \tag{25}$$

statthat, so sind die Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllt, und wir können daher aus (24) schließen:

$$\frac{J_{h-1}(z)}{J_h(z)} = \frac{2h}{z} - \frac{1 \mid}{\mid \frac{2(h+1)}{z}} - \frac{1 \mid}{\mid \frac{2(h+2)}{z}} - \frac{1 \mid}{\mid \frac{2(h+3)}{z}} - \cdots,$$

mit dem Zusatz, daß der Kettenbruch für die Nullstellen von $J_h(z)$ eigentlich divergent ist. Daß aber die Gleichung (25) in der Tat richtig ist, ergibt sich sehr einfach aus der Definition (1). Setzt man dort $h+\nu$ an Stelle von $h$, so kommt:

$$\frac{J_{h+\nu}(z) \cdot \Gamma(h+\nu+1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{h+\nu}}$$

$$= 1 - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(h+\nu+1)\,1!} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{(h+\nu+1)(h+\nu+2)\cdot 2!} - \cdots,$$

also wenn man $\nu > |h|$ wählt:

$$\left| \frac{J_{h+\nu}(z)\,\Gamma(h+\nu+1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{h+\nu}} - 1 \right| < \frac{\left|\frac{z}{2}\right|^2}{(\nu-|h|)\,1!} + \frac{\left|\frac{z}{2}\right|^4}{(\nu-|h|)^2\,2!} + \cdots$$

$$= e^{\frac{|z|^2}{4(\nu-|h|)}} - 1.\text{[1]}$$

Hier konvergiert aber die rechte Seite für jeden endlichen Wert von $z$ mit wachsendem $\nu$ gegen Null; also folgt:

---

[1]) Die von Herrn Nielsen angegebene Abschätzungsformel (Handbuch, pag. 7 Formel (3)) ist nicht allgemein richtig.

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{J_{h+\nu}(z)\,\Gamma(h+\nu+1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{h+\nu}} = 1.$$

Ebenso, wenn $\nu - 1$ an Stelle von $\nu$ tritt:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{J_{h+\nu-1}(z)\,\Gamma(h+\nu)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{h+\nu-1}} = 1.$$

Also durch Division der zwei letzten Gleichungen:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{J_{h+\nu}(z)}{J_{h+\nu-1}(z)}(h+\nu) = \frac{z}{2};$$

hieraus folgt aber augenblicklich Gleichung (25), womit dann alles bewiesen ist.

Ich bemerke, daß die Konvergenz des Kettenbruches (4) nicht immer eine unbedingte ist im Sinne des Herrn Pringsheim; dies ist offenbar nur dann der Fall, wenn wir von $z$ auch die Nullstellen aller Funktionen $J_{h+1}$, $J_{h+2}$, $J_{h+3}$, ... ausschließen.

In der auf pag. 493, Fußnote 2 genannten Arbeit hat Herr Hurwitz die Kettenbruchdarstellung oder vielmehr gewisse Eigenschaften der Näherungsbrüche dazu benutzt, um zu beweisen, daß die Nullstellen der Funktion $J_h(z)$, wenn der Index $h$ reell und größer als $-1$ ist, alle reell sind. Man kann aber aus der Kettenbruchentwicklung noch eine weitere Eigenschaft dieser Nullstellen entnehmen, die, wie es scheint, noch nicht bemerkt worden ist. Die Nullstellen sind nämlich, wenn der Index $h$ rational ist, stets irrational (abgesehen von der eventuellen Nullstelle $z = 0$). Auch die Funktion

$$p\,J_h(z) + q\,J_{h-1}(z),$$

wo $p$, $q$, $h$ irgendwelche rationale Zahlen bedeuten, hat keine von Null verschiedene rationale Nullstelle. Es folgt dies aus dem Legendreschen Irrationalitätssatz, den ich folgendermaßen formuliere:

Wenn in dem unendlichen Kettenbruch

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

die $a_\nu (\neq 0)$, $b_\nu$ ganze rationale Zahlen sind, welche von einer gewissen Stelle $\nu \geq N+1$ ab der Ungleichung

$$b_\nu \geq 1 + |a_\nu|$$

genügen, so ist der Kettenbruch konvergent und hat einen irrationalen Wert, es sei denn, daß von einem bestimmten $\nu$ an durchweg $a_\nu < 0$, $b_\nu = 1 + |a_\nu|$ ist.

Herr Pringsheim hat zwar den Beweis dieses Satzes in der auf Seite 498 zitierten Arbeit nur für den Fall durchgeführt, daß die Ungleichung $b_\nu > 1 + |a_\nu|$ schon von $\nu = 1$ ab besteht. Es ist aber leicht zu sehen, daß der Satz gleichwohl in diesem weiteren Umfang gilt. Denn es ist jetzt jedenfalls

$$\beta_N = b_N + \frac{a_{N+1}|}{|b_{N+1}} + \frac{a_{N+2}|}{|b_{N+2}} + \cdots$$

eine irrationale Zahl. Indem man dann wieder in (17) $\lambda = N$ setzt, sodann durch $B_{\nu-1,N}$ dividiert und $\nu$ unbegrenzt wachsen läßt, erhält man:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\nu+N-1}}{B_{\nu-1,N}} = A_{N-1}\,\beta_N + a_N\,A_{N-2} \tag{26}$$

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{B_{\nu+N-1}}{B_{\nu-1,N}} = B_{N-1}\,\beta_N + a_N\,B_{N-2}. \tag{27}$$

Nun ist zu beachten, daß dieser letzte Ausdruck notwendig von Null verschieden ist. Denn da alle $a_\nu$, $b_\nu$ rational sind, so gilt das gleiche von $B_{N-1}$, $B_{N-2}$. Aber $\beta_N$ ist irrational; also könnte der Ausdruck nur dann verschwinden, wenn gleichzeitig $B_{N-1} = 0$, $B_{N-2} = 0$ wäre, was bekanntlich nicht möglich ist (wegen Gleichung (13) für $\nu = N-1$). Man kann also (26) durch (27) dividieren und findet so:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{A_{N-1}\,\beta_N + a_N\,A_{N-2}}{B_{N-1}\,\beta_N + a_N\,B_{N-2}}.$$

Daher ist unser Kettenbruch in der Tat konvergent und hat einen irrationalen Wert. Der obige Bruch könnte ja offenbar

nur dann rational werden, wenn die Determinante $A_{N-1} B_{N-2} - A_{N-2} B_{N-1}$ den Wert Null hätte, was wegen (13) nicht der Fall ist.

Um diesen Satz nun anzuwenden, führen wir in Gleichung (4) für $h$ und $z$ beliebige rationale Werte ein; man wird stets

$$h = \frac{e}{g}, \quad z = \frac{f}{g}$$

setzen können, wo $e, f, g$ ganze Zahlen sind und $g$ positiv. Es folgt dann:

$$\frac{J_{h-1}(z)}{J_h(z)} = \frac{2e}{f} - \frac{1 \,|}{|\, 2\frac{e+g}{f}} - \frac{1 \,|}{|\, 2\frac{e+2g}{f}} - \frac{1 \,|}{|\, 2\frac{e+3g}{f}} - \cdots,$$

oder wenn man den Kettenbruch durch einen äquivalenten ersetzt:[1])

$$\frac{J_{h-1}(z)}{J_h(z)} = \frac{2e}{f} - \frac{f \,|}{|\, 2(e+g)} - \frac{f^2 \,|}{|\, 2(e+2g)} - \frac{f^2 \,|}{|\, 2(e+3g)} - \cdots.$$

Dieser Kettenbruch erfüllt nun die Voraussetzungen des Irrationalitätssatzes, und der Ausnahmefall tritt offenbar nicht ein. Er ist also zunächst einmal konvergent; daher kann $z = \frac{f}{g}$ keine Nullstelle von $J_h(z)$ sein, sonst müßte ja der Kettenbruch eigentlich divergieren. Aber außerdem ist sein Wert auch irrational; daher ist die Zahl

$$p\, J_h(z) + q\, J_{h-1}(z)$$

für rationale $p, q$ notwendig von Null verschieden. Damit ist aber unsere Behauptung in allen Teilen bewiesen.

---

[1]) Man beachte, daß dadurch Konvergenz oder Divergenz nicht beeinflußt wird, weil bei zwei äquivalenten Kettenbrüchen auch die Reihe der sukzessiven Näherungsbrüche die gleiche ist.

# Protokoll
## über die Sitzung der luftelektrischen Kommission der kartellierten Deutschen Akademien zu München
am 26. Oktober 1907.

(*Eingelaufen 7. Dezember.*)

Auf Anregung der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften war die Erforschung der Luftelektrizität wiederum in das Arbeitsprogramm des Kartells Deutscher Akademien aufgenommen worden, nachdem sich die internationale Assoziation der Akademien diesen Fragen gegenüber ablehnend verhalten hatte. Von der Abhaltung eines Kartelltages war mit Rücksicht auf den Mangel an anderweitigen Beratungsgegenständen Abstand genommen worden, wohl aber wurde vorgeschlagen, daß die kartellierten Akademien Vertreter zu einer Besprechung nach München, dem diesjährigen Vororte des Kartells, delegieren sollten, um ein Programm über die zunächst in Angriff zu nehmenden Arbeiten zu entwerfen und verschiedene von diesen Arbeiten selbst an die einzelnen Akademien zu verteilen. Dieser Vorschlag wurde angenommen, und am Samstag den 26. Oktober 1907 vormittags 9 Uhr traten in dem Physikalischen Institute der Technischen Hochschule zu München die folgenden Delegierten zu der genannten Kommission zusammen:

Herr Fr. Exner, Vertreter der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien; Herr Ed. Riecke und Herr E. Wiechert, beide als Vertreter der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften: Herr W. Hallwachs, als Vertreter der

Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig und Herr H. Ebert, als Vertreter der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München.

Zunächst begrüßte Herr Direktor H. von Seeliger die Anwesenden im Namen der Münchener Akademie in Vertretung von deren Präsidenten, welcher sein Bedauern darüber aussprechen ließ, daß es ihm nicht möglich sei, die Vertreter der kartellierten Akademien persönlich hier in München willkommen zu heißen, da er habe verreisen müssen. Herr von Seeliger hob die große Bedeutung der geplanten gemeinsamen Arbeiten hervor. Er berichtete, daß auch die Preußische Akademie der Wissenschaften zu Berlin ihre vollste Sympathie dem Unternehmen gegenüber zum Ausdruck gebracht habe: sie zähle nur zur Zeit unter ihren Mitgliedern keinen Gelehrten, der den luftelektrischen Forschungen nahe genug stehe, um als Delegierter zu den Kommissionsberatungen entsendet zu werden; sie wünsche aber über die Arbeiten der Kommission, sowie über die in Vorschlag gebrachten Unternehmungen auf dem laufenden erhalten zu werden.

Hierauf ergriff Herr Riecke das Wort, um zunächst im Namen der Anwesenden für die freundliche Begrüßung zu danken; er führte weiter aus, daß es jetzt, nachdem die internationale Assoziation auf die Vorschläge der Deutschen Akademien nicht eingegangen sei, geradezu eine Ehrenpflicht des Kartells sei, nun erst recht die angeregten Forschungen aus eigener Kraft weiter zu fördern; er hoffe, daß hierfür auch die nötigen Mittel zu beschaffen sein würden, insofern namentlich, als es sich zunächst vor allem um die Weiterbildung und Klärung der luftelektrischen Meßmethoden handele. Er erinnerte an das reiche Maß von Anregungen, das die Teilnehmer auf den Sitzungen der früheren luftelektrischen Kommission des Kartells gewonnen hatten, und gibt der Zuversicht Ausdruck, daß sich die Sitzungen der wieder erstandenen Kommission nicht minder fruchtbar erweisen werden.

Endlich hieß Herr Ebert die Erschienenen als Hausherr willkommen; man habe es für vorteilhaft gehalten, die Sitzung

in ein Institut zu verlegen, in welchem im Anschlusse an die Beratungen einige Neueinrichtungen sowie die verschiedenen instrumentellen Hilfsmittel besichtigt werden könnten.

Hierauf wurde in die Beratungen selbst eingetreten; die Kommission wählte Herrn Riecke zu ihrem Vorsitzenden und betraute Herrn Ebert mit der Führung des Protokolles.

Herr Riecke knüpfte zunächst an den Antrag der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen an.

Derselbe lautet:

„Die kartellierten Akademien mögen eine ständige Kommission ernennen, mit der Aufgabe, die Methoden und Instrumente, welche zur Messung der luftelektrischen Elemente dienen, einer planmäßigen Prüfung zu unterziehen, und insbesondere diejenigen Methoden auszuarbeiten, deren Anwendung bei ausgedehnteren Beobachtungsnetzen die besten Resultate verspricht.“

Herr Riecke führte zur Erläuterung zu diesem Antrage weiter folgendes aus:

„Auf der Versammlung der internationalen Assoziation der Akademien in London wurde eine Kommission gewählt, zur Untersuchung der Frage, ob sich zur Zeit eine internationale Bearbeitung der luftelektrischen Forschung in die Wege leiten ließe. Diese Kommission ist im Anfange dieses Jahres zu dem Schlusse gekommen, daß von einer solchen Aktion vorläufig abzusehen sei, da eine Reihe von Fragen, die sich auf Methoden und Instrumente beziehen, noch nicht endgültig geklärt sei. Unter diesen Umständen tritt an das Kartell, von dem die Anregung zu internationaler Verfolgung der luftelektrischen Probleme ausgegangen ist, die Aufgabe heran, die noch der Diskussion unterworfenen Punkte einer erneuten Bearbeitung zu unterziehen, und so die gegen ein internationales Vorgehen erhobenen Bedenken zu zerstreuen. Die kartellierten Akademien zählen eine Reihe von Forschern zu ihren Mitgliedern, die sich in hervorragender Weise an der luftelektrischen Forschung beteiligt haben; der genannte Zweck würde ohne Zweifel in der vollkommensten Weise erreicht, wenn

diese Forscher, in der ständigen Kommission vereinigt, Gelegenheit haben würden, in regelmäßigen Sitzungen, etwa im Anschluß an die Kartellversammlungen, ihre Erfahrungen auszutauschen und über eine zweckmäßige Verteilung der bei den Beratungen sich ergebenden Aufgaben sich zu verständigen."

Diese Ausführungen begegneten der vollsten Zustimmung aller Anwesenden.

Herr Exner, welcher den Vorsitz in der erwähnten Kommission der Assoziation geführt hatte, berichtete, welchen Verlauf die Tätigkeit dieser Kommission genommen, und wie die ablehnende Haltung derselben zum Ausdruck gekommen sei; er ist der Ansicht, daß diese internationale Kommission aufgehört habe, zu existieren, was sich mit der Auffassung der sämtlichen Anwesenden deckt.

Herr Riecke machte hierauf den Vorschlag, um der gegenwärtigen Tagung ein bestimmtes Programm zu Grunde legen zu können, zuerst A) die allgemeinen Gesichtspunkte zur Sprache zu bringen und sodann B) in die Beratung der einzelnen Gegenstände einzutreten, wobei jenes Programm als Richtschnur dienen könne, welches seinerzeit der Assoziation vorgeschlagen worden ist.

Ad A) führte Herr Ebert aus, man habe in der Kommission der Assoziation das Bedenken erhoben, daß die luftelektrischen Meßmethoden noch nicht genügend ausgebildet seien, um ein größeres Unternehmen internationaler Art zu rechtfertigen; dies könne wohl nicht von den Methoden der Potentialmessung gelten, wo durch Exner und seine Schule ein allen Anforderungen genügendes und nach allen Richtungen hin durchprobiertes transportables Instrumentarium geschaffen sei, andererseits erprobte Registrierverfahren fortlaufende Aufzeichnungen an gewissen Basisstationen ermöglichten. Gerade die Messung dieses Elementes sei aber — wie schon früher oft genug betont worden ist, — wenn sie einmal in Terminbeobachtungen über den ganzen Erdball ausgedehnt würde, eine besonders wichtige und für die Assoziation auch besonders geeignete Aufgabe. Von den anderen Vertretern wurde hier-

gegen geltend gemacht, man solle vorderhand von der Beteiligung der Assoziation überhaupt Abstand nehmen; wenn von seiten der kartellierten Deutschen Akademien aus erst ausgedehntere Unternehmungen auf luftelektrischem Gebiete in die Wege geleitet seien, würden sich sicher auch fremde Akademien anschließen, ohne daß es nötig wäre, den Apparat der Assoziation in Bewegung zu setzen.

Ad B. Der Reihe nach werden die folgenden einzelnen Punkte genauer durchberaten:

1. Potentialmessungen. In neuerer Zeit sind verschiedene Elektrometerformen in Vorschlag gebracht worden, welche dazu bestimmt sind, das Blättchenelektroskop zu ersetzen, dem trotz der nicht unwesentlichen Vervollkommnungen, die man an demselben angebracht hat, noch gewisse Mängel ohne Zweifel anhaften. In Betracht kommen vor allem Blättchenelektrometer mit Mikroskopablesung, das Elektrometer von Wulff und das Lutz-Edelmannsche Saitenelektrometer. Herr Wiechert teilt mit, daß er mit Untersuchungen über die Brauchbarkeit des Torsionselektrometers beschäftigt ist. Herr Hallwachs erwähnt, daß er seit 5 Jahren mit Blättchenelektrometern mit Mikroskopablesung bei seinen Untersuchungen gearbeitet und sehr gute Erfahrungen mit denselben gemacht habe. Es sollen eingehende Vergleiche zwischen diesen verschiedenen Elektrometern angestellt werden, namentlich bezüglich ihrer Verwendbarkeit für luftelektrische Untersuchungen. Die Herren Ebert und Wiechert übernehmen den Auftrag hierüber im nächsten Jahre an die Kommission zu berichten. Herr Hallwachs erklärt, daß er die Kommission durch seine Erfahrung auf elektrometrischem Gebiete gerne unterstützen werde. Es wird weiter hervorgehoben, wie wichtig es ist, daß an einzelnen, mit größeren wissenschaftlichen Hilfsmitteln ausgerüsteten Stationen Registrierungen des Potentialgefälles ausgeführt werden. Es wird betont, daß sich das mechanische Registrierverfahren in der Benndorfschen Anordnung, und diese selbst durchaus bewährt haben, und an der punktweisen

Registrierung festgehalten werden könne, trotz der gegen dieses Verfahren von gewisser Seite erhobenen Bedenken.

Eine ganz besondere Sorgfalt erfordert die Wahl der Sonden, Kollektoren oder Elektroden. Hier haben sich die Polonium- (also Radium-F, aber nicht die Radium-) Elektroden bewährt; da dieselben in ihrer Wirksamkeit aber mit der Zeit abklingen, ist es von besonderem Werte, daß Herr Exner bekannt gibt, daß die Wiener Akademie über einen größeren Vorrat an Polonium aus den Joachimstaler Erzen verfügt und die Neuaktivierung von Elektroden für die Zwecke der wissenschaftlichen Untersuchungen des Kartells übernehmen würde; nur die eine Bedingung sei zu erfüllen, daß die eingeschickten Elektroden und ihre Zuleitungen nur aus Platin bestehen, damit die das Polonium enthaltenden Lösungen nicht verunreinigt werden.

So wertvoll die Radiokollektoren auch im allgemeinen sind, so kann doch im speziellen die Wolke von Ionen, welche sie dauernd um sich herum erzeugen, für gleichzeitig anzustellende andere luftelektrische Messungen unter Umständen störend wirken, z. B. im Luftballon. Hier können die sogenannten „Aktinoelektroden" als Ersatz herangezogen werden, frisch amalgamierte Zinkplatten, welche infolge des Hallwachs-Effektes im Sonnen- oder hellen Tageslichte elektrisch ausgleichend wirken. Ein Nachteil haftet ihnen nach den bisherigen Erfahrungen an: sie ermüden ziemlich rasch, wie es scheint, besonders rasch in den höheren Schichten der Atmosphäre. Herr Hallwachs spricht die Vermutung aus, daß vielleicht der größere Ozongehalt dieser Schichten hierbei mitwirke und fragt an, ob zuverlässige vergleichende Messungen des Ozongehaltes der höheren Schichten vorliegen; nach eingehender Erörterung wird festgestellt, daß zur Zeit leider noch keine zuverlässige Methode bekannt ist, den Ozongehalt der Luft mit einiger Sicherheit zu messen. Herr Hallwachs stellt in Aussicht, die ganze Frage der Aktinoelektroden einer eingehenden Prüfung unterwerfen zu lassen und darüber im nächsten Jahre zu berichten.

Herr Wiechert hebt die Bedeutung der Spritzkollektoren hervor, die sich bei den Vervollkommnungen von Linke und Gerdien sehr gut bewährt haben. Er berichtet ferner, daß er auf die schon von Palmieri benutzten mechanischen festen Elektroden aufmerksam geworden sei; es seien über diese am Geophysikalischen Institute zu Göttingen Untersuchungen im Gange, welche Erfolg versprechen, und über die der Genannte im nächsten Jahre Näheres berichten wird.

Um die Angaben der Registrierapparate „auf die Ebene reduzieren“ zu können, muß man gleichzeitige Messungen mit einem transportablen Instrumente im Terrain anstellen; dabei hat sich gezeigt, daß es nicht gleichgültig ist, in welcher Höhe über dem Boden man den Kollektor aufstellt. Es scheint demnach das Potentialgefälle in den untersten Schichten des Luftmeeres nicht konstant, sondern ziemlich stark veränderlich zu sein. Diesem Punkte soll ganz besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden, da ja Änderungen im Gefälle nach der Poissonschen Gleichung mit der Anwesenheit freier räumlicher Ladungen im innigsten Zusammenhange stehen müssen. In Wien, Göttingen und München soll diese Frage, sei es durch gleichzeitige Anwendung mehrerer, in verschiedenen Höhen angebrachter Kollektoren, sei es mittels kleiner gefesselter Sondenballons der Klärung näher gebracht und über die diesbezüglichen Ergebnisse im nächsten Jahre berichtet werden.

2. Leitfähigkeitsbestimmungen. Es wird zunächst über die Verwendung des Elster-Geitelschen Apparates gesprochen, der sich durch seine ungemeine Handlichkeit auszeichnet, und dem in der Entwicklung der luftelektrischen Forschung eine so große Bedeutung zukommt. Die Mitglieder der Kommission sind darüber einig, daß die früher übliche Benutzung mit Schutzdach auf alle Fälle zu verlassen sei, da unter diesen Umständen die Angaben des Apparates in keiner genau zu bestimmenden Beziehung zu den zu messenden luftelektrischen Elementen stehen. Dagegen haben die Untersuchungen von Schering gezeigt, daß der Apparat vollkommen brauchbare Werte der Leitfähigkeit liefert, wenn man ihn der freien Luft

exponiert, und wenn man außerdem die Anordnung so abändert, daß die gesättigten Stromteile zwischen dem geladenen Körper und zwischen den benachbarten Teilen des Elektrometers keine Rolle spielen. Gegen das Erdfeld wird der Apparat hinreichend geschützt, wenn er unter einer Laube, einem Baume, einem aus Drahtnetz hergestellten Schutzdache aufgestellt wird. Wichtig ist es vor allen Dingen, daß die Geschwindigkeit der Luftbewegung dabei ganz herausfällt, ein Theorem, welches für alle Formen der Leiterflächen zu beweisen vor kurzem Herrn Riecke gelungen ist (die betreffende Abhandlung wird in der Sitzung vorgelegt). Die Bedenken, welche von Herrn K. Kurz gegen den Gebrauch des Gerdienschen Apparates vor kurzem erhoben worden sind, sollen noch eingehender geprüft werden.

Von großer Bedeutung sind die fortlaufenden Registrierungen der Leitfähigkeit in absolutem Maße, welche am Göttinger Observatorium auf Grund der Rieckeschen Theorie und im Anschlusse an die Arbeiten Scherings durchgeführt werden und über die Herr Wiechert eingehender berichtet. Die Versuche sollen fortgesetzt werden; Herr Wiechert wird über die Ergebnisse dieser Registrierung im nächsten Jahre Näheres mitteilen.

Kennt man das Potentialgefälle und die gleichzeitigen Werte der Leitfähigkeit, so kann man die Intensität des vertikalen Ionenstromes berechnen, eine Größe, welche zur Beurteilung des Elektrizitätshaushaltes in der Natur von größter Wichtigkeit ist. Herr Ebert kommt auf seine seinerzeit auf Anregung der luftelektrischen Kommission unternommenen Versuche zurück, diese Intensität direkt galvanometrisch zu bestimmen, und hebt die Schwierigkeiten hervor, welche hierbei die Influenzwirkungen von seiten des erdelektrischen Feldes den Messungen entgegenstellen. Er erwähnt die Versuche von Wilson, welche augenblicklich von Herrn K. Lutz weiter verfolgt werden und spricht die Hoffnung aus, daß es gelingen möge, auch diese wichtige Größe fortlaufend zu registrieren.

Ehe dieser Punkt der Tagesordnung verlassen wird, wird

die Frage aufgeworfen, ob es nicht möglich ist, die mit dem Elster-Geitelschen Apparate durchgeführten Messungen noch nachträglich auf absolutes oder doch wenigstens vergleichbares Maß zurückzuführen. Herr Exner erwähnt, daß sich Herr Schweidler eingehend mit dieser Frage beschäftigt habe, daß die Aussichten hier aber sehr wenig günstig sind. Um dennoch das umfangreiche, mit diesem Apparate bereits erhaltene Material nach Möglichkeit nutzbar zu machen, soll diese Frage noch einmal eingehender behandelt werden und zwar wird vorgeschlagen, daß die Wiener Akademie diesen Teil des Arbeitsprogramms übernimmt.

3. Ionenzählungen. Gegenüber den Messungen mit den Aspirationsapparaten zur Bestimmung der Ionendichte in der Atmosphäre, wie sie namentlich von Ebert eingeführt wurden, sind im ganzen drei Bedenken erhoben worden:

a) diese Apparate ließen einen großen Teil der in der Atmosphäre vorhandenen, elektrisch geladenen Partikelchen ungezählt durch sich hindurchfliegen (Langevin);

b) sie täuschten eine Unipolarität vor infolge der Deformation, welche die Potentialflächen des Erdfeldes durch den Apparat selbst erleiden (Gerdien);

c) sie täuschten ein zu großes Überwiegen der positiven Ionen vor, weil sich bei dem Einfangen derselben auf dem negativ geladenen Innenzylinder aktive Zerfallsprodukte des Radiums (induzierte Aktivität) niederschlagen (K. Kurz).

Ad a. Die Apparate wurden zunächst zu dem Zwecke konstruiert, um ein Urteil über die Zahl der Ionen von normaler Beweglichkeit pro Raumeinheit zu erlangen, wie sie durch Röntgenstrahlen oder die Strahlungen der Radioelemente direkt erzeugt werden. Schon bei den Versuchen, welche zum Ausprobieren der für diesen Zweck zu wählenden Apparatdimensionen angestellt wurden, entging die Tatsache nicht, daß neben diesen beweglichen Ionen noch weit trägere, elektrisch geladene Partikelchen in der Atmosphäre regelmäßig mit vorhanden sind, welche eben wegen ihrer Trägheit durch den Apparat hindurchschlüpften und von dem in diesem be-

stehenden elektrischen Felde nicht mit eingefangen wurden. Ihr Betrag war ein sehr wechselnder. Sollten sie mit abgefangen werden, so hätte der Aspirationsapparat weit größere Dimensionen, das Feld desselben eine unbequem hohe Stärke erhalten müssen, der Apparat wäre unhandlich geworden, seine Transportfähigkeit stand in Frage. Schließlich entschied die Erwägung, daß diese trägen Ionen, selbst wenn sie an Zahl die beweglichen um das Mehrfache übertrafen, zu der Leitfähigkeit der Luft doch nur einen verschwindend kleinen Beitrag liefern konnten, eben wegen ihrer geringen Wanderungsgeschwindigkeit. Der Apparat wurde daher in den kleinen Dimensionen ausgeführt. Immerhin ist diesen „Langevin-Jonen" seither fortgesetzt Aufmerksamkeit gewidmet worden. Es zeigte sich, daß ihre Zahl einen gewissen Parallelismus mit dem Staubgehalte der Luft aufweist, wie er mittels eines Aitkenschen Staubzählers ermittelt wurde. Es scheint daher, daß diese Ionen nichts anderes sind, als gewöhnliche Ionen, welche durch Adsorption an Staubpartikelchen gefesselt sind; namentlich die negativen Ionen können hierdurch in überwiegender Zahl „molisiert" werden, ebenso bei Taubildung infolge von Kondensation; hierüber hat Herr Daunderer eingehende Studien gemacht, welche demnächst veröffentlicht werden sollen.

Ferner ist zu bemerken, daß die in der Umgebung von München außerhalb der Stadt angestellten Beobachtungen bei weitem nicht den hohen Betrag an solchen trägen Ionen ergeben, wie ihn Langevin in seiner Mitteilung angibt; bei seinen Beobachtungen müssen daher wohl besonders ungünstige Verhältnisse mitgewirkt haben.

Die neuen von Günther und Tegetmeyer (Braunschweig) gebauten Apparate sind so dimensioniert, daß alle Ionen bis herab zu einer Beweglichkeit von 0,2 cm/sec. pro 1 Volt/cm Gefälle sicher abgefangen werden; oberhalb dieser Grenze liegt aber die Beweglichkeit aller jener elektrischen Träger, welche man als „Gasionen" zu bezeichnen pflegt. Unterhalb dieser Grenze liegen zunächst nur sehr wenige (meist positive Träger),

dann erst kommen die Langevin-Ionen mit Beweglichkeiten von 1/1500 bis herab zu 1/4500 cm/sec. pro 1 Volt/cm Gefälle, also von einer ganz anderen Größenordnung. Es kann daher als ausgemacht gelten, daß der Ionenaspirator auch wirklich „Ionen“ zählt.

Ad b. Daß das meist und an allen Orten unter normalen Verhältnissen konstatierte Überwiegen der Zahl der positiven Ionen eine reale Bedeutung hat, und nicht durch eine Beeinflussung des Apparates durch das Erdfeld vorgetäuscht wird, ist durch zahlreiche Versuche erwiesen, bei denen besonders darauf geachtet wurde, daß die Wirkungen dieses Feldes abgeschirmt waren; auch wurde die genannte Unipolarität in Kellerräumen konstatiert, in welche die Luft direkt aus den Erdkapillaren übertrat, in denen aber natürlich von Störungen von seiten des Erdfeldes nicht die Rede sein konnte. Hierher gehören namentlich auch interessante, seither noch nicht veröffentlichte Beobachtungen in der Steinbruchshöhle zu Kremsmünster.

Ad c. Infolge des Emanationsgehaltes der Luft schlagen sich auf negativ geladenen Körpern Zerfallsprodukte des Radiums nieder, welche ihrerseits bei ihren fortschreitenden Verwandlungen wieder neue Ionen erzeugen. Hierfür sind Spannungen von ca. 200 Volt, wie sie im Aspirationsapparate verwendet werden, bereits ausreichend. Herr Kurz hatte daraufhin die Vermutung ausgesprochen, daß ein Teil der bei diesen Apparaten gefundenen Unipolaritäten auf diese Ursache zurückzuführen sei. Hier ist aber noch folgendes zu beachten (worauf unterdessen zum Teil auch schon Herr K. W. F. Kohlrausch aufmerksam gemacht hat): Ist der Innenzylinder — geladen, so ist die Innenwand des äußeren Zylinders + geladen, auf dem inneren Zylinder setzen sich die Zerfallsprodukte der Emanation ab, die nun von hier aus neue Ionen erzeugen, entsprechend der Reichweite ihrer $\alpha$-Strahlen, da ja diesen der Hauptanteil an der Ionisierung der umgebenden Luft zukommt.

Bei Umladung müssen sich aber diese Produkte an der Innenwand des äußeren Zylinders absetzen; sie zerfallen hier

und senden dabei $\alpha$-Strahlen von derselben Reichweite wie vorher aus. Daß durch die Verschiedenheit der in den beiden Fällen zur Verfügung stehenden Ionisierungsgebiete die Höhe der tatsächlich beobachteten Unipolaritäten bei weitem nicht erreicht wird, lehrt sowohl ein ungefährer Überschlag als auch eine Reihe direkter, in München von Herrn Heis unter besonders günstigen Umständen angestellter Versuche. Wieweit der von Herrn Kurz angezeigte Einfluß in Wirklichkeit reicht, soll durch direkte Versuche noch eingehender studiert werden, und zwar übernimmt München diesen Teil des Programms.

4. Niederschlagselektrizität. Herr Wiechert berichtet über die neueren Arbeiten im Göttinger Observatorium, welche es möglich gemacht haben, die Niederschlagselektrizität mittels des Galvanometers zu registrieren. Es wird dabei eine Auffangfläche von 25 Quadratmetern benutzt. Die Einrichtung wurde von Dr. Hermann zusammengestellt. Jetzt ist Dr. Zoeppritz damit beschäftigt, sie anzuwenden und auch noch weiter zu vervollkommnen.

Auf die regelmäßige Prüfung der Isolationen und auf Vermeidung von Störungen durch verspritzendes Wasser (Lenard-Effekt) und durch das Erdfeld wurde besonders Bedacht genommen. Die ganze Apparatur erfordert freilich einen ziemlichen Aufwand an Mitteln und Wartung, so daß wohl nur größere Observatorien ähnliche Registrierungen werden ausführen können.

Daher verweist Herr Exner auf die sehr bequeme Methode der direkten Beobachtung von Herrn Mache, bei welcher die Niederschläge auf einer isoliert aufgestellten Bürste aufgefangen und mit dieser in das Zimmer hereingebracht werden, wo ihre Ladung geprüft wird. Diese Methode hat sich bei der Untersuchung von Herrn Weiß trefflich bewährt und wird augenblicklich von Herrn K. W. F. Kohlrausch auf einer Expedition nach Portoriko dazu benutzt, die elektrischen Eigenschaften der Tropenregen zu studieren.

Von den erhaltenen Resultaten wird zunächst nur die eigentümliche Tatsache hervorgehoben, daß im Anfange eines Niederschlages die Ladung auch dem Vorzeichen nach außerordentlich wechselt. Die Fortführung dieser Untersuchungen empfiehlt die Kommission ganz besonders dringlich, damit einmal klargelegt wird, welchen Einfluß dieser augenscheinlich sehr wichtige Faktor in dem Elektrizitätshaushalte des Systems Atmosphäre-Erde eigentlich besitzt.

5. Radioaktivität der Atmosphäre und des Erdbodens. Hierbei handelt es sich einerseits um die aktiven Bestandteile der Luft, andererseits um diejenigen der Bodenkonstituenten. Was erstere betrifft, so ist wohl kaum zu leugnen, daß die auf negativ geladenen und frei exponierten Drähten induzierte Aktivität kein genaues Maaß für die pro Kubikmeter vorhandene Emanationsmenge abgeben kann, da die Aktivierung des Drahtes ebenso von der Menge der Induktionsträger in der Volumeinheit wie von ihrer Beweglichkeit abhängt. Es werden die Methoden besprochen, bei denen die Emanation in Flüssigkeiten absorbiert und dann aus diesen wieder ausgeschüttelt wird. Der Versuch, die Emanation auf gekühlter Kohle zu adsorbieren, führte nicht zum Ziel, da die Emanation nur zum Teil wieder losgelassen wird. Herr Ebert erwähnt, daß in München die Versuche wieder aufgenommen werden sollen, die Emanation durch Verflüssigung zunächst einzufangen und anzureichern, und dann ihren Betrag im Laboratorium quantitativ zu bestimmen. Natürlich wird diese Methode nur in einzelnen geeignet ausgerüsteten Instituten Anwendung finden können.

Herr Riecke erwähnt eine Untersuchung von Herrn Gerdien, deren Ziel in erster Linie die Bestimmung der Beweglichkeit war, welche die Träger der radioaktiven Induktionen in der Atmosphäre besitzen. Beobachtet wurde in einem Bereiche von Beweglichkeiten, das von 25 cm/sec. bis zu $^1/_{40000}$ cm/sec. pro Volt/cm sich erstreckte: es wurde untersucht, wie sich die Gesamtzahl der Träger auf die einzelnen Beweglichkeitsintervalle verteilt. Aus der spezifischen Zahl

der Träger wurde die von den Radium- und den Thorinduktionen in der Atmosphäre entwickelte Ionisierungsstärke berechnet. Sie ergab sich als ein kleiner Bruchteil von derjenigen, die zur Aufrechterhaltung der Ionisation in der Atmosphäre notwendig ist.

Bezüglich der Prüfung von Bodenproben hat sich der Apparat von Elster und Geitel in der neuen Form trefflichst bewährt. Die Kommission beschließt, an die genannten beiden Herren das Ersuchen zu richten, die Arbeiten des Kartells nach dieser Richtung hin zu unterstützen.

6. Ballonbeobachtungen. Eines der wichtigsten Probleme bildet hier die Elimination der durch den Ballonkörper hervorgerufenen Störungen des freien Feldes. Die theoretischen Arbeiten der Herren Linke und Benndorf werden besprochen. Herr Ebert erwähnt, daß die Frage mittels eines in ein künstliches Feld gebrachten Ballonmodells, wie er es früher schon vorgeschlagen habe, von Herrn K. Lutz untersucht worden ist, worüber demnächst in der Zeitschrift für Physik der Atmosphäre eingehender berichtet werden wird. Trotzdem kann es natürlich nur begrüßt werden, wenn auch von anderer Seite, wie Herr Wiechert hier im Namen von Dr. Linke ankündigt, die Frage nach anderen Methoden noch behandelt wird.

Für die Beobachtungen im Ballon wie übrigens auch auf der See bedarf das Instrumentarium noch einer besonderen Aus- und Durchbildung. Die Kommission spricht aus, wie wichtig es ist, daß Methoden gefunden werden, welche sichere luftelektrische Messungen auch im Ballon und auf dem Meere auszuführen gestatten, da die bisherigen Methoden der Vervollkommnung gerade nach dieser Richtung hin noch bedürfen.

7. Beweglichkeit und Wiedervereinigung. Die Bestimmung dieser Ionenkonstanten ist zwar ebenfalls als sehr wichtig zu bezeichnen, da aber das entwickelte Programm an sich schon sehr reichhaltig ist, so möchte die Kommission nach dieser Richtung hin dem Kartell zunächst noch keine bestimmten Vorschläge unterbreiten, sondern überläßt die Förderung dieser Fragen privater Initiative.

Als das große Ziel, auf welches alle Arbeiten des Kartells in letzter Instanz gerichtet sein müssen, betrachtet die Kommission nach wie vor die Ausdehnung luftelektrischer Messung über die ganze Oberfläche der Erde. Als Vorarbeit für ein so umfassendes Unternehmen hält die Kommission die probeweise Abhaltung von einigen Terminbeobachtungen in dem Bereiche des Kartells für durchaus nötig. Denn nur so kann man sich darüber unterrichten, wie solche Beobachtungen am besten zu organisieren, welches die äußeren Bedingungen sind, unter denen sie Erfolg versprechen. Mit Rücksicht hierauf muß in hohem Maße bedauert werden, daß sich im Königreich Sachsen noch keine luftelektrische Station befindet; dieselbe würde in hervorragendem Maße geeignet sein, als Zwischenstation die nord- und süddeutschen Stationen zu verbinden. Die Kommission spricht sich dahin aus, daß es für das Zusammenarbeiten der Deutschen Luftelektriker von der größten Bedeutung wäre, wenn in Sachsen eine Station errichtet würde. Herr Hallwachs erklärt sich bereit, die Wünsche der Kommission der K. Sächsischen Staatsregierung zu unterbreiten.

Die nächste Tagung der Kommission soll im Anschlusse an das nächstjährige Zusammentreten des Kartellverbandes, also der Reihenfolge der Vororte entsprechend, voraussichtlich in Berlin stattfinden.

Nach kurzer nochmaliger Zusammenfassung der Hauptpunkte der stattgehabten Besprechungen schließt Herr Riecke die Sitzung. —

Am Nachmittage wurde ein Rundgang durch das Physikalische Institut der Technischen Hochschule vorgenommen, wobei die luftelektrischen Apparate und Einrichtungen daselbst besichtigt wurden und sich noch Gelegenheit gab, eine Reihe von Einzelfragen zu erörtern.

Gezeichnet:

Riecke, als Vorsitzender. Ebert, als Protokollführer.

## Öffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 14. Dezember 1907.

Der Präsident der Akademie, Herr K. Th. v. Heigel, eröffnete die Festsitzung mit einer Rede:

Die Anfänge des Weltbundes der Akademien,

welche besonders im Druck erschienen ist.

Hierauf verkündigte der Klassensekretär, Herr C. v. Voit, die Wahlen der mathematisch-physikalischen Klasse. Es wurden gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigt:

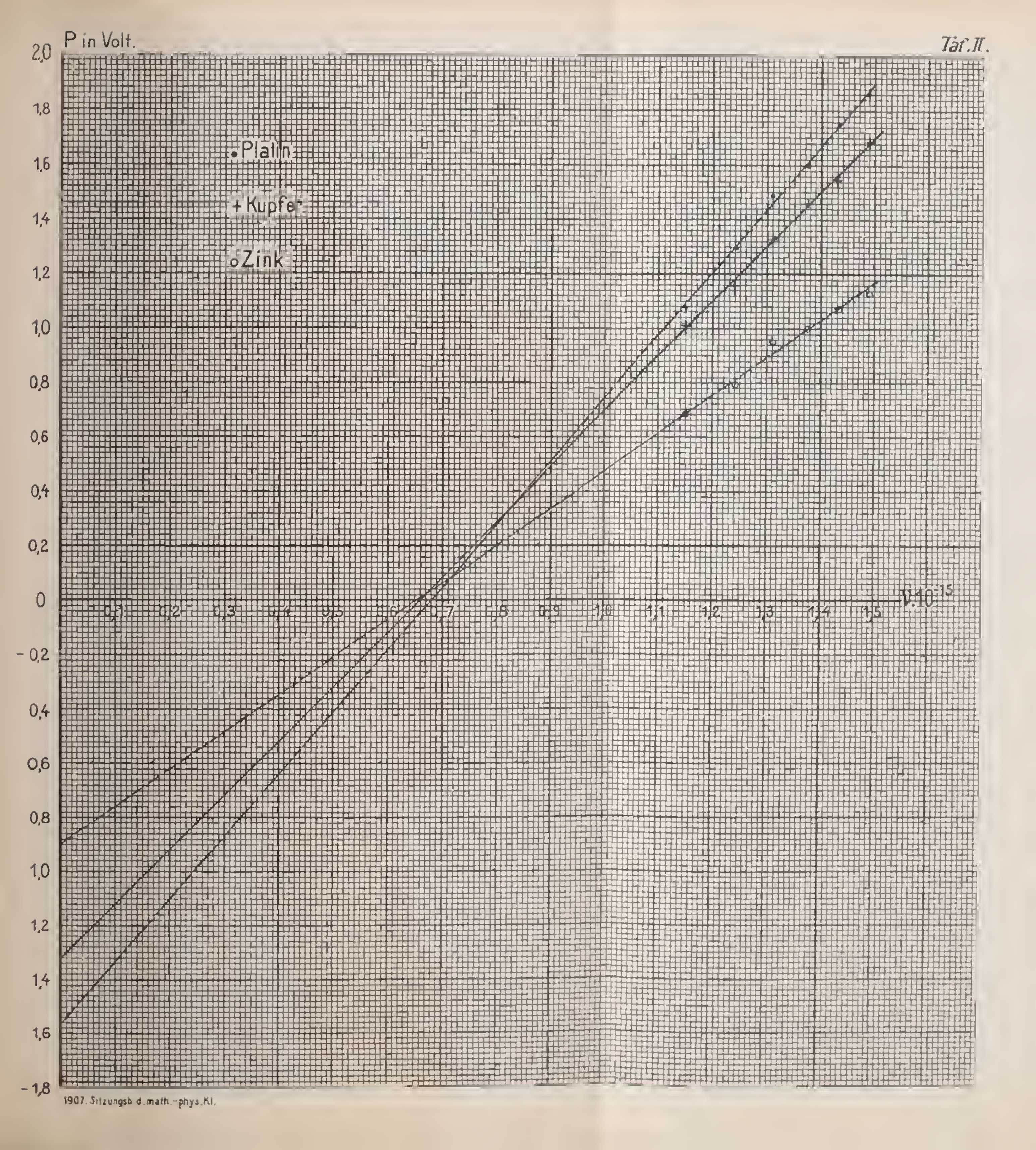
zu korrespondierenden Mitgliedern:

1. Dr. Theodor Curtius, Großh. Bad. Geheimrat, Professor der Chemie an der Universität Heidelberg;
2. Karl Grove Gilbert, Mitglied der U. S. geological Survey in Washington;
3. Joseph John Thomson, Professor der Experimentalphysik am Trinity-College in Cambridge (England);
4. Dr. Wilhelm Wien, K. Geheimer Hofrat, Professor der Physik an der Universität Würzburg.

# Namen-Register.

# Sach-Register.

---


P in Volt.
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
- 0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
- 1,8
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0 1,1 1,2 1,3 1,4 1,5
ν.10^15
• Platin
+ Kupfer
∘ Zink



# Verzeichnis der im Jahre 1907 eingelaufenen Druckschriften.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Das Format ist, wenn nicht anders angegeben, 8⁰.

## Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

*Geschichtsverein in Aachen:*

Zeitschrift. Bd. 28. 1906.

*Historische Gesellschaft des Kantons Aargau in Aarau:*

Argovia. Bd. 31. 1905; Bd. 32. 1907.
Taschenbuch für das Jahr 1906.

*Société d'Émulation in Abbeville:*

Bulletin trimestriel 1906, No. 3 et 4; 1907, No. 1 et 2.

*University of Aberdeen:*

Studies. No. 14–21; No. 24. 1905—06. 4⁰.
Handbook to City and University of Aberdeen. 1906.

*Royal Society of South-Australia in Adelaide:*

Transactions and Proceedings. Vol. XXX. 1906.
Index to the Transactions. Vol. 1—24. 1877—1900. 1907.

*Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:*

Ljetopis. 21 Svezak. 1907.
Rad. Bd. 165–169. 1906–07.
Zbornik. Bd. XI, 2; XII, 1. 1906–07.
Codex diplomaticus. Vol. IV. 1906.
Rječnik Svezak 26. 1907. 4⁰.

*K. Kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:*

Vjestnik. Bd. IX, Heft 1–4. 1907. 4⁰.

*Kroatische Archäologische Gesellschaft in Agram:*

Vjestnik. N. Serie, Bd. IX. 1906/07. 4⁰.

*Faculté de droit et des lettres in Aix:*

Annales. Tome II, No. 2. Paris 1907.

*Observatory in Allegheny:*

Miscellaneous scientific papers. N. S. No. 18—20. 1907.

*New York State Education Department in Albany:*

New York State Library. 87th annual Report 1904, 2 vols. 1906.
New York State Museum. Bulletin 85. 1905.
1st annual Report of the Education Department und Supplemental volume. 2nd annual Report. 1905—06.
New York State Library. Bulletin No. 98, 99. 1905.

*Naturforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:*

Mitteilungen aus dem Osterlande. N. F., Bd. XI. 1907.

*Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:*

Album archéologique. Fasc. 1—4; 6—11, 1886—96: Fasc. 15, 1906. fol.
Bulletin. Année 1906, trimestre 1—4; 1907 trimestre 1.
La Picardie historique et monumentale. Tome III, No. 3. 1906. fol.

*K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:*

Verhandelingen. Afd. Natuurkunde, I. Sectie, Deel IX, No. 4; II. Sectie, Deel XIII, No. 1—3. 1906—07 4⁰.
Verhandelingen. Afd. Letterkunde, N. Reeks. Deel VII et VIII, 3. 1907. 4⁰.
Zittingsverslagen. Afd. Natuurkunde, Deel XV, 1, 2. 1907. gr. 8⁰.
Verslagen en Mededeelingen. Afd. Letterkunde, 4e Reeks. Deel VIII. 1907.
Jaarboek voor 1906. 1907.
Rufius Crispinus poema. 1907.

*Redaction der Nederlandsch Tijdschrift voor Geneeskunde in Amsterdam:*

Opuscula selecta Neerlandicorum de arte medica. Fasc. 1. 1907.

*Historischer Verein in Ansbach:*

54. Jahresbericht. 1907.
Die Handschriften des Histor. Vereins für Mittelfranken I. 1907.

*Stadt Antwerpen:*

Paedologisch Jaarboek. Jahrg. VI, afl. 2. 1907.

*Naturwissenschaftlicher Verein in Aschaffenburg:*

Mitteilungen VI. 1907.

*Redaktion der Zeitschrift „Athena“ in Athen:*

Athena. Tome 18, Heft 2—4, tome 19 Heft 1, 2. 1906-07.

*École Française in Athen:*

Bulletin de Correspondance hellénique. 30. année, No. 9—12; 31. année, No. 1—7. Paris 1907.

*Universität in Athen:*

Schriften aus dem Jahre 1905—06.
*Λογοδοσίαι.* 1903—04 et 1904—05. 1907.

*Historischer Verein für Schwaben und Neuburg in Augsburg:*

Zeitschrift. Jahrg. 33. 1907.

*Naturwissenschaftlicher Verein in Augsburg:*

37. Bericht. 1906.

*„Pollichia" in Bad Dürkheim:*

Mitteilungen. 63. Jahrg., Nr. 22, 1906. 1907.
Grundlagen einer Stabilitätstheorie v. H. Zwick. 1907. 4⁰.
Der Arsengehalt der „Maxquelle" v. E. Ebler. Heidelberg 1907.

*Peabody Institute in Baltimore:*

40. annual Report 1907.

*Johns Hopkins University in Baltimore:*

Circulars. 1906, No. 4, 5, 7—10; 1907, No. 1—8.
American Journal of Mathematics. Vol. 28, No. 2—4, 1906; vol. 29, No. 1—4. 1907. 4⁰.
The American Journal of Philology. Vol. 27, No. 1—4, 1906; vol. 28, No. 1—3, 1907.
American Chemical Journal. Vol. 35, No. 5, 6; vol. 36, No. 1—6; vol. 37, No. 1—6; vol. 38, No. 1—5; General Index zu vol. 11—20. 1906—07.
Johns Hopkins University Studies. Series XXIV, No. 3—12; Series XXV, No. 1—7. 1906—07.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. XVIII, No. 190—197, 199, 200. 1907. 4⁰.
The Johns Hopkins Hospital Reports. Vol. XIII, XIV. 1906. 4⁰.

*Maryland Geological Survey in Baltimore:*

Pliocene and Pleistocene. 1906.

*Historischer Verein in Bamberg:*

65. Jahresbericht. 1907.

*Naturforschende Gesellschaft in Basel:*

Verhandlungen. Bd. XIX, Heft 1, 2. 1907.

*Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:*

Basler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde. Bd. VI, Heft 2; Bd. VII, Heft 1. 1907.

*Société des sciences in Bastia:*

Bulletin. Année 25, trimestre 1 et 2, 1904; trimestre 3 et 4, 1905; trimestre 1, 1906.

*Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:*

Tijdschrift. Deel 49, afl. 1—6; Deel 50, afl. 1, 2. 1906—07.
Verhandelingen. Deel 56, stuk 5 1907. 4⁰.
Notulen. Deel 44, afl. 2—4; Deel 45, afl. 1—3. 1906—07.
De Compagnie's Kamer van het Museum. 1907. 4⁰.
Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia. Anno 1678. 1907. 4⁰.
Rapporten van de Commissie in Nederlandsch-Indie voor oudheidkundig onderzoek 1905—06. 1907. 4⁰.

*Departement van Landbouw in Nederlandsch-Indie zu Batavia:*

Iaarboek 1906.

*R. Observatory in Batavia:*

Observations. Vol. 28. Appendix I—III. 1907. fol.
Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indie. 27. Jahrg. 1905. 1906. 4⁰.

*K. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indie zu Batavia:*

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 66. Weltevreden 1907.

*Museum in Bergen (Norwegen):*

G. O. Sars, An Account of the Crustacea of Norway. Vol. V, parts 15—20. 1906—07. 4⁰.
Aarbog. 1906, Heft 3; 1907, Heft 1. 2.
Aarsberetning for 1906. 1907.

*University of California in Berkeley:*

Schriften aus dem Jahre 1906—07 in 4⁰ u. 8⁰.

*Lick Observatory in Berkeley:*

Publications of the Lick Observatory. Vol. IX, parts 1—3. 1907. 4.

*K. Preuß. Akademie der Wissenschaften in Berlin:*

Corpus inscriptionum latinarum. Vol. 13, partis secundae fasc. 2. 1906. fol.
Acta Borussica. Die Behördenorganisation, Bd. IV, 1. Hälfte 1723—25, 2. Hälfte 1726—29, 1908; Bd. IX, 1750—53. 1907.
Abhandlungen aus dem Jahre 1906. 4⁰.
Sitzungsberichte. 1906, Nr. 39—53; 1907, Nr. 1—38. gr. 8⁰.

*K. Preuß. Geologische Landesanstalt in Berlin:*

Abhandlungen. N. F., Heft 46, 50. 1906. 4⁰.
Abbildungen und Beschreibungen fossiler Pflanzenreste. Lief. 4 u. 5. 1906—07. 4⁰.
Jahrbuch für das Jahr 1903. 1907. 4⁰.

*Physikal.-Technische Reichsanstalt in Berlin:*

Die Tätigkeit der Physikal.-Techn. Reichsanstalt im Jahre 1906. 1907. 4⁰.

*K. Bibliothek in Berlin:*

Jahresbericht für 1905/06 u. 1906/07.

*Zentralbureau der internationalen Erdmessung in Berlin:*

Veröffentlichungen. N. F., Nr. 14. 1907. 4⁰.

*Deutsche Chemische Gesellschaft in Berlin:*

Berichte. 39. Jahrg., Nr. 16, 18, 1906; 40. Jahrg., Nr. 1—18. 1907.

*Deutsche Geologische Gesellschaft in Berlin:*

Zeitschrift. Bd. 58, Heft 2—4; Bd. 59, Heft 1—3. 1906—07.
Monatsberichte 1907 Nr. 1—9.

*Medizinische Gesellschaft in Berlin:*

Verhandlungen. Bd. 37. 1907.

*Deutsche Physikalische Gesellschaft in Berlin:*

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1906. 3 Bde. Braunschweig 1907.
Verhandlungen. Jahrg. 8, 1906, Nr. 24; Jahrg. 9, 1907. Nr. 1—24. Braunschweig 1906—07.

*Physiologische Gesellschaft in Berlin:*

Zentralblatt für Physiologie. Bd. 20 (1906), Nr. 20—26 u. Register; Bd. 21 (1907), Nr. 1—20.
Verhandlungen. Jahrg. 1906—07, Nr. 1—7.
Bibliographia physiologica. 3. Serie, Bd. 2, Nr. 3, 4; Bd. 3, Nr. 1. 1906—07.

*K. Technische Hochschule in Berlin:*

Grantz, Kulturelle Bedeutung der Wasserwirtschaft. Rede. 1907. 4⁰.

*Kaiserlich Deutsches Archäologisches Institut in Berlin:*

Jahrbuch. Bd. 21, Heft 4; Bd. 22, Heft 1–2. 1907. 4⁰.
Bericht über die Fortschritte der römisch-germanischen Forschung im Jahre 1905. Frankfurt a. M., 1906.
Veröffentlichungen. N. F. Nr. 30–33. 1907. 4⁰.

*K. Preuß. Meteorologisches Institut in Berlin:*

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1905, Heft 1, 2 und 1906, Heft 1: Preußen und benachbarte Staaten. 1907. 4⁰.
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1903. 1907. 4⁰.
Ergebnisse der magnet. Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1902. 1907. 4⁰.
Ergebnisse der Niederschlagsbeobachtungen im Jahre 1903 und 1904. 1906–07. 4⁰.
Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung im Jahre 1901. 1906. 4⁰.
Ergebnisse der Gewitterbeobachtungen 1901 und 1902. Berlin 1907. 4⁰.
Bericht über das Jahr 1906. 1907.

*Redaktion des „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ in Berlin:*

Jahrbuch. Bd. 35, Heft 3; Bd. 36, Heft 1 u. 2. 1907.

*Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuß. Staaten in Berlin:*

Verzeichnis der Mitglieder 1907.
Gartenflora. Jahrg. 1907, Heft 1—24.

*Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:*

Forschungen zur Brandenburgischen und Preußischen Geschichte. Bd. XX, 1. und 2. Hälfte. Leipzig 1907.

*Verein Deutscher Ingenieure in Berlin:*

Hubert Jansen, Rechtschreibung der naturwissenschaftlichen und technischen Fremdwörter. 1907.

*Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:*

Zeitschrift. 27. Jahrg., Nr. 1—12. 1907. 4⁰.

*Allgemeine Elektrizitätsgesellschaft in Berlin:*

Jahresbericht Juli 1906 bis Juni 1907. 1907. 4⁰.

*Schweizerische Naturforschende Gesellschaft in Bern:*

Verhandlungen der 89. Jahresversammlung in Sct. Gallen. Aarau 1907.
Compte rendu des travaux 1904–06. Genève 1904–06.

*Allgemeine Geschichtforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:*

Quellen zur Schweizer Geschichte. Bd. XXV. Basel 1906.
Jahrbuch der Schweizerischen Geschichte. Bd. XXXII. Zürich 1907.

*Allgem. Schweiz. Gesellschaft für die gesamten Naturwissenschaften in Bern:*

Neue Denkschriften. Bd. 40. Basel 1906. 4⁰.
Nuesch Jak., Das Schweizerbild, 2. Aufl. Zürich 1902. 4⁰.

*Historischer Verein in Bern:*

Archiv. Bd. 18, Heft 2. 1906.

*Schweizerische Geodätische Kommission in Bern:*

Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz. Bd. X. Zürich 1907. 4⁰.

*Société d'Emulation du Doubs in Besançon:*

Mémoires. VIIe Série, Tom. 9 u. 10, 1905, und Table générale 1841—1905. 1906—07.

*R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna:*

Memorie. Serie VI, tomo 3. 1906. 4⁰.
Rendiconto. N. Serie, vol. 10 (1905—06). 1906.

*R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:*

Atti e Memorie. Serie III, vol. 24, fasc. 4—6; vol. 25, fasc. 1—3. 1906—07.

*Osservatorio astronomico e meteorologico in Bologna:*

Osservazioni meteorologiche dell' annata 1905. 1906. 4⁰.
Michele Rajna, Esame di una livella difettosa. 1906. 4⁰.

*Universität in Bonn:*

Schriften aus dem Jahre 1906/07 in 4⁰ u. 8⁰.

*Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande in Bonn:*

Bonner Jahrbücher. Heft 114, 115; 116, 1, 2. 1906—07. 4⁰.

*Naturhistorischer Verein der preußischen Rheinlande in Bonn:*

Verhandlungen. 62. Jahrg. 1906, 2. Hälfte. 1906.
Sitzungsberichte 1906, 2. Hälfte. 1907.

*Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:*

Procès-verbaux. Année 1905—06. Paris 1906.
Observations météorologiques 1905—06. 1906.
Cinquantenaire de la Société. Paris 1906.

*Société de géographie commerciale in Bordeaux:*

Bulletin. 1907, No. 1—12.

*Société Linnéenne in Bordeaux:*

Actes. Vol. 60 u. 61. 1905—06.

*American Academy of Arts and Sciences in Boston:*

Proceedings. Vol. 42, No. 14—29; vol. 43, No. 1—7. 1906—07.
Memoirs. Vol. XIII, No. 4 u. 5. Cambridge 1906—07. 4⁰.

*American Philological Association in Boston:*

Transactions. Vol. 36. 1905.

*Massachusetts General Hospital in Boston:*

Publications. Vol. 1, No. 3. 1906.

*Stadtarchiv und Stadtbibliothek in Braunschweig:*

Urkundenbuch der Stadt Braunschweig. Bd. IV, Abt. 1. 1907. 4⁰.

*Meteorologisches Observatorium in Bremen:*

Meteorologisches Jahrbuch. XXVII. Jahrg. 1906. 1907. 4⁰.

*Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:*

Abhandlungen. Bd. XIX, Heft 1. 1907.

*Schlesische Gesellschaft für vaterländische Kultur in Breslau:*

84. Jahresbericht im Jahre 1906 und Ergänzungsheft 1907.

*Institute of Arts and Sciences in Brooklyn:*

Science Bulletin. Vol. 1, No. 4 u. 10. 1907. 4⁰.

*Deutscher Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:*

Zeitschrift. 11. Jahrg., Heft 1—4. 1907.

*Naturforschender Verein in Brünn:*

Verhandlungen der meteorologischen Kommission im Jahre 1904. 1906.
Verhandlungen. Bd. 44, 1905. 1906.

*Mährisches Landesmuseum in Brünn:*

Časopis. Bd. VII, 1, 2. 1907.
Zeitschrift. Bd. VII, 1, 2. 1907.

*Académie Royale de médecine in Brüssel:*

Mémoires couronnés. Collection in 8⁰, tom. 19, fasc. 2—7. 1906—07.
Bulletin. IVᵉ Série, tom. 20, No. 9—11, 1906; tom. 21, No. 1—9, 1907.

*Académie Royale des sciences in Brüssel:*

Annuaire 1907. Année 73.
Bulletin. a) Classe des lettres 1906, No. 9—12; 1907, No. 1—10.
b) Classe des sciences 1906, No. 9—12; 1907, No. 1—10.
Mémoires. Classe des sciences. Collection in 8⁰, IIᵉ Série, tom. I, fasc. 4—8; tom. II, fasc. 1, 2. 1906—07.
Mémoires. Classe des lettres. Collection in 4⁰, tom. I, fasc. 2. 1906.
Mémoires. Classe des sciences. Collection in 4⁰. IIᵉ Série, tom. 1, fasc. 3, 4. 1906—07.
Mémoires. Classe des lettres. Collection in 8⁰. IIᵉ Série, tom. 3, fasc. 1.
Biographie nationale. Tom. XIX, fasc. 1. 1906.
Lodewijk van Velthenes, Voortzetting van den Spiegel Historiael (1248—1316). Deel I. 1906. 4⁰.

*Observatoire Royale in Brüssel:*

Les Observations astronomiques et les astronomes 1907.
Annales. N. Série. Physique du globe. Tome III, fasc. 2. 1906. 4⁰.
Annales Astronomiques. Tom. IX, fasc. 2, 3. 1906. 4⁰.
„ Météorologiques. Tom. V—XI, XIII, XIV. 1901—05. 4⁰.
Observations météorologiques. 1900—02. 4⁰.
Annuaire astronomique pour 1907.
„ 1901—06.
Bulletin climatologique. 1899, part 1, 2.

*Société Belge d'astronomie in Brüssel:*

Bulletin. 1907, No. 5.

*Société des Bollandistes in Brüssel:*

Analecta Bollandiana. Tom. 26, fasc. 1—4. 1907.

*Société entomologique de Belgique in Brüssel:*

Annales. Tom. 50. 1906.

*Société Belge de géologie in Brüssel:*

Bulletin. Tom. 20. fasc. 3—5; tom. 21, fasc. 1, 2.
Tables génerales des tomes I à XX. 1907.
Procès verbaux du Janvier—Juillet 1907.

*Polar-Institut in Brüssel:*

Congrès international pour l'étude des regions polaires, tenu à Bruxelles 1906, rapport d'ensemble. 1906.

*K. Ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:*

Die im Jahre 1906 erschienenen Schriften der Akademie in 4⁰ und 8⁰.

*K. Ungarische Geologische Anstalt in Budapest:*

Mitteilungen. Bd. XV, Heft 3 u. 4; Bd. XVI, Heft 1. 1906-07. 4⁰.
Földtani Közlöny. Bd. 36, Heft 6—12; Bd. 37, Heft 1—8. 1906—07. 4⁰ und 3 Blätter der geologischen Karte von Ungarn.
Jahresbericht für 1905. 1907.
A Magyar Kir. földtani intézet évkönyve. Bd. XV, 2—4; Bd. XVI, 1. 1906—07. 4⁰.
Évkönyve. Bd. XV. 2. 1906.
A. v. Kalecsinszky, Die untersuchten Tone der Länder der ungar. Krone. 1906.

*Magistrat der Stadt Budapest:*

Budapest Régiségei. Bd. IX. 1906. 4⁰.

*Museo nacional in Buenos Aires:*

Annales. Serie III. tom. 6, 8. 1906.

*Sección hidromedrica in Buenos Aires:*

Gunnar Lange, The River Pilcomayo mit Karten in fol. 1906.

*Deutscher wissenschaftlicher Verein in Buenos Aires:*

K. Th. Stöpel, Eine Reise in das Innere der Insel Formosa. 1903.

*Society of natural history in Buffalo:*

Bulletin. Vol. VIII, No. 4—6. 1906—07.

*Departement de l'agriculture in Buitenzorg (Java):*

Bulletin. No. 4—9. 1906—07. 4⁰.
Observations météorologiques. Année 1906. 1907. fol.

*Academia Romana in Bukarest:*

Analele. 4 Bände in 4⁰ und 8 weitere Hefte in 4⁰ und 8⁰. 1906.
Cresterile Colectiunilor in anul 1905 u. 1906. 1907, Jan.—April. 1907. 4⁰.

*Rumänisches Meteorologisches Institut in Bukarest:*

Analele. Tom. 18. 1907. 4⁰.

*Service de la Statistique générale des finances in Bukarest:*

Bericht an den Herrn Finanzminister über die Steuereinschätzung vom Jahre 1905. 1906. 4⁰.

*Société Linnéenne de Normandie in Caen:*

Bulletin. 5e Série, vol. 9. 1906.
Mémoires. Vol. 22. 1907. 4⁰.

*Institut Égyptien in Cairo:*

Mémoires. Tome V, fasc. 1. 1906. 4⁰.
Bulletin. IVe Série, No. 6, 7, 1906—07; Ve Série, tom. 1, fasc. 1. 1907.

*Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:*

Memoirs. Vol. XVIII. part 1 and 3. 1907. 4.
Monthly Weather Review. May—December 1906. 1906. fol.
India Weather Review and Annual Summary 1905. fol.
Report on the Administration in 1906—07. 1907. fol.

*Royal Asiatic Society of Bengal in Calcutta:*

The Adventures of Haji Baba of Ispahan translated into Persian. 1905.
Bibliotheca Indica. New Series, No. 1139, 1142, 1145—47, 1150, 1153, 1155—60, 1162, 1169, 1170.
Memoirs. Vol. I, No. 10—19 and Vol. 1, Suppl. pp. I—V, IX—XI, 1906; Vol. II, No. 1—4. 1907. 4⁰.
Journal and Proceedings. Vol. II.

*Office of Superintendent of Government Printing in Calcutta:*

Anthropometric Data from Bombay and Burma. 1906.

*Geological Survey of India in Calcutta:*

Records. Vol. 30, part 2; vol. 34, part 4; vol. 35 part 1, 3, 4; vol. 36 part. 1. 1906—07. 4⁰.
Paläontologica Indica. Serie XV, vol. V; Memoir No. 2. 1907. fol. N. S. Vol. II, No. 3. 1906. fol.

*Board of scientific advice for India in Calcutta:*

Annual Report for the year 1905—06. 1907. 4⁰.

*Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:*

Bulletin. Vol. 43, No. 5; vol. 48, No. 4; vol. 50, No. 6—9; vol. 51, Nr. 1—6. 1906—07.
Memoirs. Vol. 34, No. 1; vol. 35 Nr. 1. 1907. 4⁰.
Annual Report 1905—06. 1906.

*Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:*

61. annual Report for 1905—06. 1906.
Annals. Vol. 47, part 1; vol. 50, part. 1; vol. 52, part 1; vol. 57, part 1; vol. 60, No. 2—5; vol. 62. part 1. 1907. 4⁰.
Circular. No. 119—130. 1906—07. 4⁰.

*Harvard University in Cambridge, Mass.:*

Harvard Oriental Series. Vol. X. 1906. 4⁰.

*Observatory in Cambridge:*

Annual Report for 1906—07. 1907. 4⁰.

*Philosophical Society in Cambridge:*

Proceedings. Vol. 14, part 1—3. 1907.
Transactions. Vol. XX, No. 11—14. 1907. 4⁰.
List of Fellows. August 1907.

*Geological Commission of the Colony of the Cape of Good Hope in Capetown:*

Annual Report for 1906. 1907. 4⁰.

*Geological Survey of the Cape Colony in Capetown:*

Geological Map. Sheet 2, 4, 45. 1906.

*South African Museum in Capetown:*

Annals. Part VII. 1906.

*Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:*

Atti. Serie IV, vol. 19. 1906. 4⁰.
Bollettino mensile. Nuova Serie, fasc. 92—94. 1907.

*Società di storia patria per la Sicilia Orientale in Catania:*

Archivio storico. Anno IV, fasc. 1—3. 1907.

*Société des sciences naturelles in Cherbourg:*

Mémoires. Tom. 35. Paris 1905—06.

*Academy of Sciences in Chicago:*

Bulletin. No. IV, 2; No. VI. 1907.

*John Crerar Library in Chicago:*

12th annual Report for 1906. 1907.

*Field Columbian Museum in Chicago:*

Publications. No. 115, 117—120. 1907.

*Videnskabsselskabet in Christiania:*

Forhandlinger. Aar 1906. 1907.
Skrifter. 1906, I. math.-naturwiss. Klasse; II. histor.-filos. Klasse. 1906. 4⁰.

*Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden in Chur:*

36. Jahresbericht, Jahrg. 1906. 1907.

*Lloyd Library in Cincinnati:*

Bulletin. No. 9. 1907.

*University of Cincinnati:*

Record. Series I, vol. 3, No. 2—9, vol. 4, No. 2. 1906—07.
University Studies. Series II, vol. 2, No. 3, 4, 1906; vol. 3, No. 1, 2. 1907.

*Académie des sciences in Clermont:*

Mémoires. Fasc. 18, 19. 1904—05.

*Archaeological Institute of America in Cleveland:*

American Journal of Archaeology. Vol. X, No. 4 und Suppl.; vol. XI, No. 1—3. Norwood 1906.

*Naturhistorische Gesellschaft in Colmar:*

Mitteilungen. N. F. Bd. VIII. Jahrg. 1905 u. 1906. 1906.

*University of Missouri in Columbia:*

Bulletin of Laws Observatory. No. 8—11. 1907. 4⁰.
Bulletin. Vol. VIII, No. 5. 1907. 8⁰.
Studies. Vol. I, No. 2. 1907. gr. 8⁰.

*Società storica in Como:*

Periodico. Vol. 17, fasc. 66–68. 1907.

*Franz-Josephs-Universität in Czernowitz:*

Die feierliche Inauguration des Rektors für das Jahr 1906/07. 1906.
Verzeichnis der Vorlesungen. S.S. 1907. 8⁰.

*Naturforschende Gesellschaft in Danzig:*

Schriften. N. F., Bd. XII, Heft 1. 1907.

*Westpreußischer Geschichtsverein in Danzig:*

Zeitschrift. Heft 49. 1907. gr. 8⁰.
Mitteilungen. 6. Jahrg., Nr. 1–4. 1907.

*K. Gouvernement von Deutsch-Ostafrika in Dar-es-Salam:*

Berichte über Land- und Forstwirtschaft in Deutsch-Ostafrika. Bd. 3, Heft 2, 3. Heidelberg 1907.

*Historischer Verein für das Großherzogtum Hessen in Darmstadt:*

Archiv für hessische Geschichte. N. F., Bd. IV, 3; Bd. V u. Ergänzungsband III, 2. 1907.
Quartalblätter. 1906, Nr. 3, 4; 1907, Nr. 1. 1906–07.

*Academy of sciences in Davenport:*

Proceedings. Vol. X, 1904–06; vol. XI, p. 1–117; vol. XII, p. 1–94. 1906–07.

*Technische Hoogeschool in Delft:*

F. C. Huygen, Over de Exhaust Werking by Locomotieven. Mit 4 Beilagen. 1907. gr. 8⁰.

*Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:*

Proceedings. Vol. VIII, p. 183–314. 1906–07.

*Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:*

Mitteilungen. Bd. X, Heft 4. 1907.

*Académie des sciences in Dijon:*

Mémoires. IVᵉ Série, tome 10. 1906.

*Union géographique du Nord de la France in Douai:*

Bulletin. Vol. 22, trimestre 3, 4; vol. 23, trim. 3; vol. 27, trim. 1; vol. 32, trim. 3, 4; vol. 33, trim. 4; vol. 34, trim. 1–4; vol. 35, trim. I–4. 1906–07.

*K. Sächsicher Altertumsverein in Dresden:*

Neues Archiv für sächsische Geschichte. Bd. 28. 1907.

*Verein für Erdkunde in Dresden:*

Mitteilungen. Heft 5 u. 6. 1907.
Mitgliederverzeichnis. April 1907.

*Royal Irish Academy in Dublin:*

Proceedings. Vol. XXVI, Section A, part 2 u. 3; Sect. B, part 6–10; Sect. C, part 10–16. 1907.
Transactions. Vol. XXVII, Section A, part 1, 2, 4–7. 1906–07.

*Royal Society in Dublin:*

The economic Proceedings. Vol. I, part 9–11. 1907.
The scientific Proceedings. Vol. XI, part 13, 14, 16–20. 1907.
The scientific Transactions. Series II, vol. IX, part 4–6. 1906. 4⁰.

*American Chemical Society in Easton, Pa.:*

The Journal. Vol. 29, No. 9–5.
Chemical Abstracts. Vol. 1, No. 1.

*Royal Society in Edinburgh:*

Proceedings. Vol. 27 part 1–5; vol. 28, part 1. 1907.
Transactions. Vol. 45, part 2, 3. 1907. 4⁰.

*Geological Society in Edinburgh:*

Transactions. Vol. IX, part 1. 1907.

*Royal Physical Society in Edinburgh:*

Proceedings. Vol. 16, No. 8; vol. 17, No. 2, 3. 1907.

*Royal Observatory in Edinburgh:*

Annals. Vol. 2. Glasgow 1906. 4⁰.

*Gesellschaft für bildende Kunst und vaterländische Altertümer in Emden:*

Jahrbuch. Bd. 16, Heft 1 u. 2. 1907.

*Naturforschende Gesellschaft in Emden:*

90. Jahresbericht für 1904–05. 1906.

*K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:*

Jahrbücher. N. F. Heft 32 u. 33. 1906–07.

*K. Universitätsbibliothek in Erlangen:*

Schriften aus dem Jahre 1906/07 in 4⁰ u. 8⁰.

*Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:*

Atti. Serie V, vol. 3, disp. 4; supplemento alla disp. 4; vol. 4, disp. 1 u. 2. 1906–07.

*Società Asiatica Italiana in Florenz:*

Giornale. Vol. 19. 1906. 1907.

*Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a. M.:*

Festschrift zur Erinnerung an die Eröffnung des neuerbauten Museums der Senckenb. Naturf. Gesellschaft. 1907.
Abhandlungen. Bd. 29, Heft 1 u. 2; Bd. 30, Heft 1–3. 1907. 4⁰.
Bericht. 1907.

*Verein für Geschichte und Altertumskunde in Frankfurt a. M.:*

Mitteilungen über römische Funde in Heddernheim IV. 1907. 4.
Archiv für Frankfurts Geschichte. III. Folge. Bo. IX. 1907. gr. 8.

*Physikalischer Verein in Frankfurt a. M.:*

Jahresbericht für 1905/06. 1907.

*Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i. Br.:*

„Schau-ins-Land.“ 34. Jahrlauf 1907. I. u. II. Teil. fol.

*Kirchengeschichtlicher Verein in Freiburg i. Br.:*

Freiburger Diözesan-Archiv. N. F., Bd. VIII. 1907.

*Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i. Br.:*

Berichte. Bd. XV. 1907.

*Universität in Freiburg i. Br.:*

Schriften aus dem Jahre 1906/07 in 4⁰ u. 8⁰.

*Univeristät Freiburg i. Schweiz:*

Collectanea Friburgensia. N. S. Fasc. VIII. 1907. gr. 8⁰.

*Institut national in Genf:*

Bulletin. Tome 37. 1907.

*Musée d'histoire naturelle in Genf:*

Oeuvres de J. C. Galissard de Marignac. 2 vols. 4⁰.

*Observatoire in Genf:*

Observations météorologiques pendant les années 1904 et 1905. 1906.
Résumé météorologique de l'année 1905. 1906.

*Société d'histoire et d'archéologie in Genf:*

Bulletin. Tom 3, livr. 1. 1907.

*Universität in Genf:*

Schriften aus dem Jahre 1906/07 in 4⁰ u. 8⁰.

*Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:*

Mémoires. Vol. 35, fasc. 3. 1907. 4⁰.

*Museo civico in Genua:*

Annali. Serie 3ª, vol. 2. 1905. 4⁰.

*Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Gießen:*

Bericht. N. F. 1. Medizinische Abteilung, Bd. 2. 1907.
2. Naturwissenschaftl. Abteilung, Bd. 1. 1907.

*Oberhessischer Geschichtsverein in Gießen:*

Mitteilungen. N. F., Bd. 15. 1907.

*Universität in Gießen:*

Ludoviciana. Festzeitung zur 3. Jahrhundertfeier der Universität Gießen. 1907. fol.
Schriften aus dem Jahre 1906/07 in 4⁰ u. 8⁰.

*Naturforschende Gesellschaft in Görlitz:*

Abhandlungen. Bd. XXV, Heft 2. 1907.

*Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:*

Neues Lausitzisches Magazin. Bd. 83. 1907.
Codex diplomaticus Lusatiae superioris. III. Bd., 3. Heft. 1907.

*K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:*

Göttingische Gelehrte Anzeigen. 1906, Nr. 12; 1907, Nr. 1—11. Berlin. gr. 8⁰.
Abhandlungen. N. F. a) Philol.-hist. Klasse. Bd. IX, Nr. 1—5.
b) Math.-phys. Klasse. Bd. V, Nr. 1—5. Berlin. 4⁰.

Nachrichten. a) Philol.-hist. Klasse. 1906, Heft 4; 1907, Heft 1 u. Beiheft; 1907, Heft 2.
b) Math.-phys. Klasse. 1906, Heft 5; 1907, Heft 1—3. Berlin. 4⁰.
c) Geschäftliche Mitteilungen. 1907, Heft 1. Berlin. 4⁰.

*K. Gesellschaft der Wissenschaften in Gothemburg:*

Handlingar. IV. Folge. Bd. 7—9. 1906/07.

*Historischer Verein für Steiermark in Graz:*

Steirische Zeitschrift. IV. Jahrg., Heft 1—4, 1906; V. Jahrg., Heft 1—4, 1907.
Beiträge zur Erforschung steirischer Geschichte. 35. Jahrg. 1906.

*Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein in Greifswald:*

Pommersche Jahrbücher. Bd. 8. 1907.

*Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:*

Mitteilungen. 38. Jahrg. 1906. Berlin 1907.

*Université in Grenoble:*

Centenaire de la faculté de droit. 1906.

*K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie im Haag:*

Bijdragen. VII. Reeks, Deel 3; Deel 6, Lief. 1, 2. 1907.

*Musée Teyler in Haarlem:*

Archives. Serie II, vol. 10, partie 1, 3, 4. 1906—07. 4⁰.

*Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:*

Archives Néerlandaises des sciences exactes. Sér. II, tome 12, livr. 1—5. La Haye 1907.

*K. Leopoldinisch-Karolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:*

Leopoldina. Heft 42, Nr. 11, 12; Heft 43, Nr. 1—11. 1907. 4⁰.
Nova Acta. Bd. 85, 86. 1906. 4⁰.

*Deutsche Morgenländische Gesellschaft in Halle:*

Zeitschrift. Bd. 60, Heft 4; Bd. 61, Heft 1—3. 1906—07.

*Universität Halle:*

Schriften aus dem Jahre 1906/07 in 4⁰ u. 8⁰.

*Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:*

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 78, Heft 4—6; Bd. 79, Heft 1—4. Leipzig 1907.

*Thüringisch-Sächsischer Verein für Erforschung des vaterländischen Altertums in Halle:*

Neue Mitteilungen. Bd. 23, Heft 1. 1907.

*Mathematische Gesellschaft in Hamburg:*

Katalog der auf den Hamburger Bibliotheken vorhandenen Literatur aus der Mathematik und Physik. 2. Nachtrag 1906.
Mitteilungen. Bd. IV, Heft 7. Leipzig 1907.

*Deutsche Seewarte in Hamburg:*

29. Jahresbericht für 1906. 1907.
VII. Nachtrag zum Katalog der Bibliothek der Deutschen Seewarte. 1907.

*Sternwarte in Hamburg:*

Mitteilungen. Nr. 9. 1907. gr. 8.

*Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:*

Verhandlungen. III. Folge, Bd. XIV. 1907.
Abhandlungen. Bd. XIX, Heft 1, 2. 1907. 4⁰.

*Verein für Naturwissenschaftliche Unterhaltung in Hamburg:*

Verhandlungen. XIII. Bd. 1905—07. 1907.

*École française d'Extrême Orient in Hanoi:*

Bulletin. Tom. VI, No. 1. 2. 1906. 4⁰.

*Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:*

Zeitschrift. Jahrg. 1907, Heft 1—4.

*American Philological Association in Hanover:*

Transactions and Proceedings 1906. Vol. 37. Boston 1907.

*Großherzogliche Sternwarte in Heidelberg:*

Veröffentlichungen. Bd. 4. Karlsruhe 1906. 4⁰.

*Astrophysikalisches Institut in Heidelberg:*

Publikationen. Bd. II, Nr. 1—12; Bd. III, Nr. 1—3. 1907. 4⁰.

*Universität Heidelberg:*

Schriften der Universität aus dem Jahre 1906/07 in 4⁰ u. 8⁰.
Die Trennung von Staat und Kirche. Akademische Rede von Emil Troeltsch. 1906. 4⁰.
Der Kampf des alten mit dem neuen Recht. Akademische Rede von Georg Jellinek. 1907. 4⁰.
Die Matrikel der Universität Heidelberg. Teil VI. 1907.

*Naturhistorisch-medizinischer Verein in Heidelberg:*

Verhandlungen. N. F., Bd. VIII, Heft 3 u. 4. 1907.

*Geschäftsführender Ausschuß der Reichslimeskommission in Heidelberg:*

Der obergermanisch-rätische Limes des Römerreiches. Lief. 28. 29. 1907. 4⁰.

*Commission géologique de Finnlande in Helsingfors:*

Bulletin. No. 17, 18, 20—23. 1906—07.

*Institut météorologique central in Helsingfors:*

Observations météorologiques État des glaces et des neiges. 1895—96. 1907. 4⁰.

*Universität Helsingfors:*

Schriften aus dem Jahre 1906/07 in 4⁰ u. 8⁰.

*Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:*
Archiv. N. F., Bd. 34, Heft 1 u. 2. 1907.

*Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:*
Verhandlungen u. Mitteilungen. Bd. 55, Jahrg. 1905; Bd. 56, Jahrg. 1906. 1907.

*Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte in Hildburghausen:*
Schriften. Heft 56. 1907.

*Voigtländischer Altertumsverein in Hohenleuben:*
76. u. 77. Jahresbericht. 1907.

*Ungarischer Karpathen-Verein in Igló:*
Jahrbuch. 34. Jahrg. 1907.

*Historischer Verein in Ingolstadt:*
Sammelblatt. Heft 30. 1906.

*Ferdinandeum in Innsbruck:*
Zeitschrift. 3. Folge, Heft 50, 51. 1906—07.

*Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein in Innsbruck:*
Berichte. 30. Jahrg. 1905/06 u. 1906/07.

*Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:*
The Journal. Vol. 10, No. 9, 1906; Vol. 11, Nr. 1—9. 1907.

*Universität in Jassy:*
Annales scientifiques. Tome 4, fasc. 2—4. 1907.

*Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:*
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 42, Heft 1—3; Bd. 43, Heft 1. 1906—07.
Denkschriften. Lief. 29. Text u. Atlas. 1907. fol.

*Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde in Jena:*
Zeitschrift. N. F., Bd. XVII. 2; XVIII, 1. 1907.

*Gelehrte Estnische Gesellschaft in Jurjew (Dorpat):*
Sitzungsberichte 1906. 1907.
Verhandlungen. Bd. XXII, 1. 1907.

*Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat):*
Sitzungsberichte. Bd. XV, 2—4; Bd. XVI, 1. 1906—07.

*Universität Jurjew (Dorpat):*
Schriften aus dem Jahre 1906/07 in 4⁰ u. 8⁰.

*Badische Historische Kommission in Karlsruhe:*
Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins. N. F., Bd. 22, Heft 2—4. Heidelberg 1907.
Neujahrsblätter 1907. Heidelberg.

*Zentralbureau für Meteorologie und Hydrographie in Karlsruhe:*
Jahresbericht für das Jahr 1906. 1907. 4⁰.

*Großherzoglich Technische Hochschule in Karlsruhe:*

Schriften aus dem Jahre 1906/07 in 4⁰ u. 8⁰.

*Société physico-mathématique in Kasan:*

Bulletin. II. Série, tome 15, No. 3. 1906.

*Universität Kasan:*

Utschenia Sapiski. Bd. 73, No. 11 u. 12, 1906, Bd. 74, No. 1—12, 1907.

*Verein für hessische Geschichte und Landeskunde in Kassel:*

Zeitschrift. N. F., Bd. 30, 1. u. 2. Hälfte. 1907.

*Verein für Naturkunde in Kassel:*

Abhandlungen und Bericht LI. 1907.

*Société mathématique in Kharkow:*

Communications. 2e Série, tome IX, No. 1—6. 1904—6. gr. 8⁰.

*Université Impériale in Kharkow:*

Sapiski. 1906, Heft 3, 4; 1907, Heft 1. 2.

*Gesellschaft für schleswig-holsteinische Geschichte in Kiel:*

Zeitschrift. Bd. 37. Leipzig 1907.
Briefwechsel des Herzogs Friedrich Christian zu Schleswig-Holstein. Herausgeben von Hans Schulz. Leipzig 1908.

*Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:*

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F., Bd. 8 (Abteilung Helgoland, Heft 1). 1906. 4⁰.

*K. Universität in Kiel:*

Schriften aus dem Jahre 1906/07 in 4⁰ u. 8⁰.

*Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein in Kiel:*

Schriften. Bd. XIII, Heft 2. 1906.

*Universität in Kiew:*

Iswestija. Bd. 46, Nr. 9—12, 1906; Bd. 47, Nr. 1—6, 8—9. 1907.

*Geschichtsverein für Kärnten in Klagenfurt:*

Jahresbericht über 1905 und 1906. 1906—07.
Carinthia I. 96. Jahrg., 1906, Nr. 1—6; 97. Jahrg., 1907, Nr. 1—6.

*Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:*

Carinthia II. Jahrg. 1906, Nr. 5, 6; Jahrg. 1907, Nr. 3, 4.

*Siebenbürgisches Museum in Klausenburg:*

Erdélyi Múzeum. Bd. 23, Heft 5; Bd. 24, No. 1—6. 1906—07. 4⁰.

*Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:*

Schriften. 47. Jahrg. 1906. 1907.

*Universität in Königsberg:*

Schriften aus dem Jahre 1906/07 in 4⁰ u. 8⁰.

*K. Gesellschaft der Wissenschaften in Kopenhagen:*

Oversigt. 1907, No. 1—4.
Mémoires. I. Section des Lettres, 6e Série. tome 6, No. 4; 7e Série, tom. 1, No. 1. tome 4, No. 3, 4;
II. Section des Sciences, tome 3, No. 2, tome 4. No. 1, 2, tome 5. No. 1. 1907. 4⁰.
Regesta diplomatica historiae Danicae. Serie II, tom. 2, No. 6. 1907. 4⁰.

*Conseil permanent international pour l'exploration de la mer in Kopenhagen:*

Bulletin trimestriel. Année 1905—06, No. 4; 1906—07, No. 1—2.
Publications de circonstance. No. 35—41. 1906—07. 4⁰.

*Gesellschaft für nordische Altertumskunde in Kopenhagen:*

Aarböger. 1906, II. Raekke, Bd. 21.

*Akademie der Wissenschaften in Krakau:*

Anzeiger. (Bulletin international), 1. Classe de philologie, 1906, No. 4—10; 1907, Nr. 1—7. 2. Classe des sciences mathématiques, 1906, No. 4—10; 1907, No. 1—8.
Atlas geologiczny Galicyi. Zeszyt 18—20 (Tablice), Mapy i tekst. 1906.
Katalog literatury naukowej. Tome 6, Heft 1—4. 1907.
Rozprawy mathem. Tome 45 A i B. 1906.
Corpus juris Polonici. Vol. III. 1906. 4⁰.
Spraw. kom. hist. sztuki. Tom. VIII, 4. 1906. fol.

*College of Science in Kyōto:*

Memoirs. Vol. I, No. 3. 1907.

*Historischer Verein in Landshut:*

Verhandlungen. Bd. 43. 1907.

*Universidad in La Plata:*

Comunicaciones. Diciembre 1906. 1907. fol.

*Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:*

Bulletin. 5e Série. vol. 42. No. 156, 157; vol. 43, No. 158—160. 1906—07.
Observations météorologiques faites au Champ de l'air. Année 1906. 1907.

*Société d'histoire de la Suisse romande in Lausanne:*

Mémoires et Documents. IIe Série, tome 6, Mélanges. 1907.

*University of Kansas in Lawrence:*

Bulletin. Vol. VII, No. 5. 1907. 4⁰.
Mineral Resources of Kansas 1902, 1903. 1903—04. 4⁰.
The University Geological Survey of Kansas. Vol. VIII. 1904. 4⁰.

*Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:*

Tijdschrift. N. Serie, Deel 24, afl. 4; Deel 25, afl. 1—4; Deel 26, afl. 1, 2. 1905—07.
Handelingen en Mededeelingen, jaar 1905—06 und 1906—07. 1906—07.
Levensberichten. 1905—06 und 1906—07. 1906—07.

*Sternwarte in Leiden:*

Verslag 1904—06. 1907.
Sternwarte. Bd. IX, Heft 1. Haag 1906. 4⁰.

*K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:*

Abhandlungen der philol.-hist. Klasse. Bd. 23, Nr. 3, 4; Bd. 25. Nr. 2—5; Bd. 26, Nr. 1. 1907. 4⁰.
Abhandlungen der math.-phys. Klasse. Bd. 30, Nr. 1—3. 1907. 4⁰.
Berichte der philol.-hist. Klasse. Bd. 58, Nr. 3—5; Bd. 59, Nr. 1—3.
" " mathem.-phys. Klasse. Bd. 58, Nr. 6—8; Bd. 59, Nr. 1—3. 1906—07.

*Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft in Leipzig:*

Jahresbericht 1907.

*Verein für Erdkunde in Leipzig:*

Mitteilungen 1906. 1907.

*Cuerpo de ingenieros de minas del Perú in Lima:*

Boletin. No. 41, 44, 46—49, 51, 52, 54. 1906—07.

*Museum Francisco-Carolinum in Linz:*

65. Jahresbericht. 1907.

*Sociedade de geographia in Lissabon:*

Boletim. 24. Série 1906, No. 11, 12; 25. Série 1907, No. 1—4, 6—10. 1907.

*Literary and philosophical Society in Liverpool:*

Proceedings. No. 59 u. 60. 1906—07.

*Université Catholique in Loewen:*

Publications académiques de l'année 1906.

*Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:*

La Cellule. Tome XXIII, fasc. 1; tome XXIV, fasc. 1. 1906—07. 4⁰.

*British Academy in London:*

Proceedings 1903—04 u. 1905—06.

*Royal Institution of Great Britain in London:*

Proceedings. Vol. 18, part 2. 1907.

*India Office in London:*

Gazetteer of the Vizagapatam District. Vol. 1. Madras 1907.
Vol. 32 of the District Gazeteer of the United Provinces of Agra and Oudh. Allahabad 1907.
The State Manual of Travancore. 3 Vols. Trivandrum 1906.
Madras District Gazetteers. 21 Vols. Madras 1906—07.

*The English Historical Review in London:*

Historical Review. Vol. XXII, No. 85—88; Vol. XXIII, No. 89. 1907—08.

*Royal Society in London:*

Report on the Perl Oyster Fisheries of the Gulf of Manaar. Part V. 1906. 4⁰.
Year-Book. 1907.
Proceedings. Series A, vol. 78, No. 526, vol. 79, No. A 527—535; Series B, vol. 79, No. A 528—535. 1907.
Philosophical Transactions. Series A, vol. 200; Series B, vol. 195. 1907. 4⁰.
Reports of the Commission for the investigation of Mediterranean Fever. Part V, VI, VII. 1907.

*R. Astronomical Society in London:*

Monthly Notices. Vol. 67, No. 1—9; vol. 68, No. 1. 1906—07.
Memoirs. Appendix to vol. 57. 1906. 4⁰.

*Chemical Society in London:*

Journal. No. 531—542. 1907.
Proceedings. Vol. 22, No. 318—333. 1907.

*Geological Society in London:*

The quarterly Journal. Vol. 63, part 1—4. 1907.
Geological Literature for the year 1906. 1907.

*Linnean Society in London:*

Proceedings. Nov. 1906 to June 1907.
The Journal. a) Botany, vol. 38, No. 263, 264; b) Zoology, vol. 30, No. 195, 196. 1907.
List of the Linnean Society 1907—08.
Transactions. Zoology, vol. IX, part 11, vol. X, part 6, 7; Botany, vol. VII, part 4, 5. 1906—07. 4⁰.

*R. Microscopical Society in London:*

Journal. 1907, part 1—6.

*Zoological Society in London:*

Proceedings. 1906, vol. I, part 1, 2; vol. II, part 1, 2. 1907, January—June.
Transactions. Vol. XVII, No. 6; vol. XVIII, No. 1. 1907. 4⁰.

*Zeitschrift „Nature" in London:*

Nature. No. 1941—1992. Index zu tom. 75 u. 76. 4⁰.

*Museums-Verein für das Fürstentum Lüneburg in Lüneburg:*

Lüneburger Museumsblätter. Bd. 1, Heft 1—4. 1907.

*Société géologique de Belgique in Lüttich:*

Annales. Tome 34, livr. 1, 2. 1906—08.

*Institut Grand Ducal in Luxemburg:*

Archives trimestrielles de la section des sciences naturelles. Fasc. 3, 4. 1906. 4⁰.

*Section historique de l'Institut Grand-Ducal in Luxemburg:*

Publications. Vol. 53. 1906.

*Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:*

Der Geschichtsfreund. Bd. LXII. Stans 1907.

*Société d'agriculture science et industrie in Lyon:*

Annales. 1905 u. 1906. 1906—07. gr. 8⁰.

*Société Linnéenne in Lyon:*

Annales. Tom. 52 u. 53. 1906—07. gr. 8⁰.

*Université in Lyon:*

Annales. Nouv. Série, I. Sc.-med. Nr. 19; II. Dr.-let. No. 16—18. 1906.

*Wisconsin Academy of Sciences in Madison:*

Transactions. Vol. XV, part 1. 1905.

*Washburn Observatory in Madison:*

Publications. Vol. X, part 3. 1907. 4⁰.

*Wisconsin Geological and Natural History Survey in Madison:*

Bulletin. No. 15. 1906.

*Government Museum in Madras:*

Bulletin. Vol. V, No. 3. 1907.

*Kodaïkanal and Madras Observatories in Madras:*

Annual Report for 1906. 1907. fol.
Bulletin. No. VIII—XI. 1906—07. 4⁰.

*R. Academia de ciencias exactas in Madrid:*

Revista. Tomo 5, No. 1—4 u. 7—12. 1906.
Memorias. Tomo 25. 1907. 4⁰.
Anuario. 1907.

*R. Academia de la historia in Madrid:*

Boletín. Tomo 50, cuad. 1, 2 u. 4—6; tom. 51, cuad 1—6. 1907.

*R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:*

Rendiconti. Serie II, vol. 39, fasc. 17—20; vol. 40, fasc. 1—16. 1906—07.
Memorie. Classe di scienze, vol. XX, fasc. 9; Classe di lettere, vol. XXI, fasc. 6. 1906. 4⁰.

*Museo storico civico in Mailand:*

Raccolta Vinciana. Fasc. 1, 2 (1905—06).

*R. Osservatorio di Brera in Mailand:*

Pubblicazioni. No. XLIII. 1907. 4⁰.

*Società Italiana di scienze naturali in Mailand:*

Atti. Vol. 45, fasc. 3 u. 4; vol. 46, fasc. 1, 2. 1907.

*Società Storica Lombarda in Mailand:*

Archivio Storico Lombardo. Serie IV, anno 34, fasc. 13—15. 1907.
Raccolta Vinciana. Fasc. III. 1907.

*Römisch-germanisches Zentralmuseum in Mainz:*

Mainzer Zeitschrift. Jahrg. II. 1907. 4⁰.

*Literary and philosophical Society in Manchester:*

Memoirs and Proceedings. Vol. 51, part 1—3. 1907.

*Altertumsverein in Mannheim:*

Mannheimer Geschichtsblätter. 1906, Nr. 12; 1907, Nr. 1—12. 4⁰.

*Universität in Marburg:*

Schriften aus dem Jahre 1906/07 in 4⁰ u. 8⁰.

*Abbaye de Maredsous:*

Revue Bénédictine. Année 24, No. 1—4; année 25, No. 1. 1907—08.

*Naturwissenschaftliche Gesellschaft Isis in Meißen:*

Mitteilungen 1906/07.

*Verein für Geschichte der Stadt Meißen in Meißen:*

Mitteilungen. Bd. VII, 2, 3. 1906—07.

*Royal Society of Victoria in Melbourne:*

Proceedings. New Series, vol. XIX, part 2; vol. XX, part 1. 1907.

*Accademia Peloritana in Messina:*

Atti. Vol. XXII, fasc. 1, 2. 1907.
Resoconti. Marzo—Giugno 1907.

*Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:*

Jahrbuch. 18. Jahrg. 1906. 4⁰.

*Instituto geológico in Mexico:*

Boletín. No. 22 u. 24. 1906. 4⁰.

*Observatorio meteorológico-magnético central in México:*

Boletín mensual. Diciembre 1902, Enero—Abril 1903, Julio—Septiembre 1904. 1902—04. 4⁰.

*Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico:*

Memorias y revista. Tomo 22, No. 9—12; tom. 23, No. 5—12; tom. 24, No. 1—12; tom. 25, No. 1. 1906—07.

*Sociedad de geografia in Mexico:*

Boletin. Tomo I, tom. II, No. 1—5. 1904—07.

*Regia Accademia di scienze lettere ed arti in Modena:*

Memorie. Serie III, vol. 6. 1906. 4⁰.

*Musée océanographique in Monaco:*

Bulletin. No. 87—108. 1906—07.
Meteorological Researches in the High Atmospheres, by the Prince of Monaco. 1907.

*Museo nacional in Montevideo:*

Annales. Vol. VI, entrega 1.

*Académie de sciences et lettres in Montpellier:*

Section des sciences. Tom. III, No. 6, 7. Section des lettres. Tom. III, No. 3. 1907.

*Société Impériale des Naturalistes in Moskau:*

Bulletin. No. 4; 1906, No. 1, 3, 4. 1906—07.
Nouveaux Mémoires. Tom. XVII, No. 1. 1907. 4⁰.

*Mathematische Gesellschaft in Moskau:*

Matematitscheskij Sbornik. Bd. XXV, 4; Bd. XXVI, 1, 2. 1906—07.

*Lick Observatory in Mount Hamilton, California:*

Bulletin. No. 104—124.

*K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten in München:*

Das Deutsche Reich in gesundheitlicher und demographischer Beziehung. Berlin. 1907. 4.

*Statistisches Amt der Stadt München:*

Hygiene und soziale Fürsorge in München von K. Singer. 1907.

*Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:*

Korrespondenzblatt. 38. Jahrg., 1907, Nr. 1—12. Braunschweig. 4⁰.

*Hydrotechnisches Bureau in München:*

Jahrbuch. VIII. Jahrg., 1906, Heft 3; IX. Jahrg., 1907, Heft 1, 2. fol.

*Generaldirektion der K. B. Posten und Telegraphen in München:*

Preisverzeichnis der Zeitungen etc. für das Jahr 1908, I. Abt. 1907. fol.

*K. Bayer. Technische Hochschule in München:*

Bericht für das Jahr 1905—06. 1907. 4⁰.
Programm für das Jahr 1906—07. 1906.
Schriften aus dem Jahre 1906—07 in 4⁰ u. 8⁰.
Personalstand im Sommersemester 1907 und im Wintersemester 1907—08.

*Laboratorium für technische Physik an der K. Technischen Hochschule in München:*

Mitteilungen über Forschungsarbeiten. Heft 35 u. 36. Berlin 1906. 4⁰.

*Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:*

Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1907.
Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1907, Nr. 1—31.

*K. Oberbergamt in München:*

Geognostische Jahreshefte. XVIII. Jahrg. (1905). 1907. 4⁰.

*Universität in München:*

Amtliches Verzeichnis der Lehrer etc. im Sommersemester 1907 und im Wintersemester 1907—08.
Schriften aus dem Jahre 1906/07 in 4⁰ u. 8⁰.
Die Leistungsfähigkeit der Forstwirtschaft. Rede. 1907. 4⁰.
Verzeichnis der Vorlesungen im Sommersemester 1907 und im Wintersemester 1907—08. 4⁰.

*Historischer Verein in München:*

Altbayerische Monatsschrift. Jahrg. 6, Nr. 6; Jahrg. 7, Nr. 1, 2. 1907.

*Verein für Luftschiffahrt in München:*

17. Jahresbericht für 1906.

*Ornithologische Gesellschaft in München:*

Verhandlungen. Bd. VI. 1906.

*Meteorologische Zentralstation in München:*

Beobachtungen der meteorologischen Stationen des Königreichs Bayern. Jahrg. XV—XXII (1893—1900). 4⁰.
Die Schneedecke in Bayern im Winter 1898/99 u. 1899/1900. 4⁰.
Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1901—03. Bayern 1907. fol.

*Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens in Münster:*

Zeitschrift. Bd. 64, Abt. 2. 1906.

*Académie de Stanislas in Nancy:*

Mémoires. 6e Série, tome 3, 4. 1906—07.

*Reale Accademia di scienze morali et politiche in Neapel:*

Rendiconto. Serie 3, vol. 12, fasc. 9—12; vol. 13, fasc. 1, 3—7. 1906—07.

*Zoologische Station in Neapel:*

Mitteilungen. Bd. 18, Heft 1—3. Berlin 1906—07.

*Gesellschaft Philomathie in Neisse:*

33. Bericht 1904—06. 1907.

*Historischer Verein in Neumarkt i. O.:*

Jahresbericht. 3. Jahrg. 1906—07.

*Institute of Engineers in New-Castle (upon Tyne):*

Transctions. Vol. 54, part 9; vol. 55, part 7; vol. 56, part 4, 5; vol. 57, part 1—5. 1907.
Annual Report for the year 1906/07. 1907.

*Connectitut Academy of Arts and Sciences in New-Haven:*

Transactions. Vol. XII, vol. XIII, p. 1—297. 1907.

*The American Journal of Science in New-Haven:*

Journal. 4. Series, No. 133—145. 1907.

*American Oriental Society in New-Haven:*

Journal. Vol. 27, second half; vol. 28, firsth half. 1907.

*Academy of Sciences in New-York:*

Annals. Vol. XVII, part 1, 2. 1906—07.

*New-York State Museum in New-York:*

57th annual Report 1903. Vol. I, 1, 2; vol. II—IV. 1905. 4⁰.
58th annual Report 1904. Vol. I—V. 1906. 4⁰.
Bulletin. No. 83, 84, 86—92, 94—98, 100, 102—104, 106—109. 1905—07.

*American Museum of Natural History in New-York:*

Peruvian Mummies by Charles W. Mead. 1907.
Anthropological Papers. Vol. I, part 1—3. 1907.
Pioneers of American Science. 1907.
Journal. Vol. VII, No. 1—8. 1907.
Annual Report for the year 1906.
Bulletin. Vol. XVII, part 5 u. 6; vol. VIII, part 4; vol. XXII. 1906—07.
Memoirs. Vol. IV, 6; vol. XI, 2. 1907. 4⁰.

*American Geographical Society in New-York:*

Bulletin. Vol. 38, No. 12; vol. 39, No. 1—12. 1906—07.

*Nederlandsche botanische Vereeniging in Nijmegen:*

Recueil des travaux botaniques Neerlandais. Vol. III, livr. 3, 4. 1907.

*Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:*

Abhandlungen. XVI. Bd. 1906.
Jahresbericht für 1905 und 1906. 1906—07.

*Verein für Geschichte der Stadt Nürnberg:*

Jahresbericht für das Jahr 1905. 1906.
Mitteilungen. 17. Heft. 1906.

*Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:*

Anzeiger. Jahrg. 1906, Heft 1—4.

*Ortsausschuß des 16. Deutschen Geographentages in Nürnberg:*

Festschrift. 1907.
Katalog der Ausstellung. 1907.

*Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:*

Mitteilungen. 31. Bd., 1906. 1907.

*Geological Survey of Canada in Ottawa:*

Section of Mines. Annual Report for 1904. 1906.
Summary Report of the Geological Survey Departement for 1906.
Preliminary Report on the Rossland Mining District. 1906.
Report on the Chibougaman Mining Region, 1905. 1906.

*Royal Society of Canada in Ottawa:*

Proceedings and Transactions. II. Series, vol. XII, part 1. 1906.

*Accademia scientifica Veneto-Trentino-Istriana in Padova:*

Atti. N. Serie, anno III, fasc. 1, 2; anno IV, fasc. 1, 2. 1906—07.

*R. Accademia di scienze in Padua:*

Atti e Memorie. Nuova Serie, vol. 22. 1906.

*Redaction der Zeitschrift „Rivista di storica antica“ in Padua:*

Rivista. N. Serie, anno XI, fasc. 1—4. 1907.

*Circolo matematico in Palermo:*

Annuario 1907.
Rendiconti. Tomo XXII, fasc. 3; tomo XXIII, fasc. 1—3; tomo XXIV, fasc. 1—3 u. Supplemento, vol. 2, No. 3 e 4. 1906 - 07. gr. 8⁰.

*Reale Accademia di scienze, lettere e belle arti in Palermo:*

Bullettino. Anni 1903—1906. 1907. 4⁰.

*Collegio degli Ingegneri in Palermo:*

Atti. 1906, Luglio—Dicembre. 4⁰.

*Académie de médecine in Paris:*

Bulletin. 1907, No. 1—45.

*Académie des Sciences in Paris:*

Comptes rendus. 1907, No. 1—27. 4⁰.

*École d'anthropologie in Paris:*

L'École d'anthropologie de Paris, 1876—1906. 1907.

*Institut de France in Paris:*

Annuaire pour 1907.

*École politechnique in Paris:*

Journal. II. Série, cahier 11. 1906. 4⁰.

*Moniteur Scientifique in Paris:*

Moniteur. Livr. 781—792 (Janvier—Décembre 1907). 4⁰.

*Musée Guimet in Paris:*

Annales. Bibliothèque d'études, tome 22 u. 23. 1906—07.
Revue de l'histoire des réligions. Tome 53, No. 2, 3; tome 54, No. 1—3. 1906.

*Muséum d'histoire naturelle in Paris:*

Bulletin. Année 1906, No. 4—7; année 1907, No. 1—5.
Nouvelles Archives. Série IV, tome VIII, fasc. 1, 2; tome IX, fasc. 1. 1906—07. 4⁰.

*Société d'anthropologie in Paris:*

Bulletins. 1906, No. 1—6; 1907, No. 1.

*Société des études historiques in Paris:*

Revue. 73e année, Janvier—Avril 1907.

*Société de géographie in Paris:*

La Géographie. Année XIII, No. 5, 6; XIV, 1—6; XV, 1—6; XVI, 1, 2. 1906—08.

*Société mathématique de France in Paris:*

Bulletin. Tome 34, fasc. 4; tome 35, fasc. 1—4. 1906—07.

*Société zoologique de France in Paris:*

Bulletin. Tome XXX u. XXXI. 1905—06.
Mémoires. Année XVIII u. XIX. 1905—06.

*Western Australia Geological Survey in Perth:*

Bulletin. Anno 1907, No. 23—26.

*Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:*

Schedae ad Herbarium Florae Rossicae. No. IV, V. 1902—05.
A. Liapounoff, Sur les figures d'équilibre. 1906. 4⁰.
Travaux du Musée botanique. Fasc. 1—3. 1902—07.
Bulletin. 1907, No. 1—18, 4⁰, und 5e Série, tome 21, No. 5, tome 22—24, tome 25, No. 1, 2. 1904—07. 4⁰.
Annuaire du Musée zoologique. Tome X, No. 3, 4; tome XI; tome XII, No. 1, 2. 1907.

*Section géologique du cabinet de Sa Majesté in St. Petersburg:*

Travaux. Tom. VI, livr. 2. 1907.

*Comité géologique in St. Petersburg:*

Explorations géologiques dans les régions aurifères de la Sibérie. 10 Hefte und Karten. 1906—07.
Bulletins. Vol. 24, No. 1—10; vol. 25, No. 1—9. 1905—06.
Mémoires. Nouv. Série, livr. 16, 21, 23—27, 29, 31, 33. 1906—07. 4⁰.

*Kaiserl. Botanischer Garten in St. Petersburg:*

Scripta Botanica. Fasc. 24, 25. 1907.
Acta horti Petropolitani. Tome 25, livr. 2; tome 27, livr. 1. 1907.

*Kaiserl. Russische Archäologische Gesellschaft in St. Petersburg:*

Sapiski. Bd. VIII, Heft 1.
„ Numismatische Abteilung, Bd. I, Heft 1. 1906. 4⁰.
„ Klassische Abteilung, Bd. IV. 1907.

*Kaiserl. Mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:*

Verhandlungen. II. Serie, Bd. 44, Lief. 1, 2. 1906.

*Physik.-chem. Gesellschaft an der Kaiserl. Universität St. Petersburg:*

Schurnal. Bd. 38, Heft 2—9; Bd. 39, Heft 1—9. 1906—07.

*Société Imp. des Naturalistes in St. Petersburg:*

Travaux. Vol. 35, livr. 3, No. 1—4, livr. 4; Vol. 36, livr. 1, No. 6—8, livr. 2, No. 2—6; Vol. 37, livr. 4; Vol. 38, livr. 2—4. 1906—07.

*Observatoire physique central Nicolas in St. Petersburg:*

5 Mémoires de la Commission pour la mesure d'un arc de méridieu au Spitzberg. 1904—05. 4⁰.
Annales. Année 1904, part. I et II. 1906. 4⁰.
Étude de l'atmosphère. Fasc. 2. 1906. 4⁰.

*Histor.-philolog. Fakultät der Kais. Universität St. Petersburg:*

Sapiski. Bd. 65, Heft 4; Bd. 78—80, 83. 1902—07.

*Kaiserl. Universität in St. Petersburg:*

Utschenia Sapiski. Bd. 74, No. 8, 9. 1907.
Ottschet 1906. 1907.
Katanov, N. F. Versuch einer Studie über die Sprache der Urjanchaier. Kasan 1903.
Kuncevič, G. Z. Geschichte des Reiches von Kasan. St. Petersburg 1905.
La-Bart, Graf F. de. Chateaubriand und die Dichtkunst des Weltschmerzes in Frankreich. Kiew 1905.
Latyšev, V. Über einige äolische und dorische Kalendarien. St. Petersburg 1883.
Malinin, V. Der Mönch des Eleazar-Klosters Philotheus und seine Briefe. Kiew 1901.
Médnikov, N. A. Palästina von seiner Eroberung durch die Araber bis zu den Kreuzzügen nach arabischen Quellen. 1. Untersuchung der Quellen. St. Petersburg 1902.
Nikitskij, A. Untersuchungen auf dem Gebiete griechischer Inschriften. Jurjew 1901.
Novgorodcev, P. Kant und Hegel in ihren Lehren von Recht und Regierung. Moskau 1901.
Pirogov, N. J. Briefe aus Sebastopol 1854—55. St. Petersburg 1899.
Rudakov, A. Materialien zur Geschichte der chinesischen Kultur in der Provinz Kirin (1641—1902). 1. Die Übersetzung des Czi-liń tun-čži. Wladiwostok 1903.
Sérošerskij, V. L. Die Jakuten. Versuch einer ethnographischen Untersuchung. St. Petersburg 1896.
Sozonovič, J. Zur Frage nach dem Einfluß des Westens auf die slavische und russische Poesie. Warschau 1898.
Strělcov, A. Die Ärzte bei den alten Römern. Moskau 1888.

*Academy of natural Sciences in Philadelphia:*

Journal. IId Series, vol. XIII, part 3. 1907. 4⁰.
Proceedings. Vol. 58, part 2, 3; vol. 59, part 1. 1906—07. gr. 8⁰.

*Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:*

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. XXX, No. 120; vol. XXXI, No. 121—123. 1906—07.

*American Philosophical Society in Philadelphia:*

Proceedings. Vol. 45, No. 183, 184; vol. 46, No. 185 u. 186. 1906—07.
The Volume of the Franklin Bicentennial Celebration. 1906.

*Società Toscana di scienze naturali in Pisa:*

Atti. Processi verbali, vol. XVI, No. 2—5. 1906—07. 4⁰.
Atti. Memorie, vol. XXII. 1906. gr. 8⁰.

*Società Italiana di fisica in Pisa:*

Il nuovo Cimento. Serie V, tomo 12, Ottobre—Dicembre 1906, tomo 13, Genajo—Maggo 1907, tomo 14, Giugno—Ottobre 1907.

*Altertumsverein in Plauen:*

Mitteilungen. 18. Jahresschrift für 1907—08. 1907.

*Historische Gesellschaft in Posen:*

Zeitschrift. 21. Jahg., 1. u. 2. Halbband. 1906.
Historische Monatsblätter. Jahrg. VII, 1906, Nr. 1—12.

*Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:*

Publikationen. Bd. XV, stuk 1; Bd. XVII. 1907. 4⁰.
Photographische Himmelskarte. Katalog, Bd. IV. 1907. 4⁰.

*Böhmische Kaiser Franz Joseph-Akademie in Prag:*

Sbírka pramenů. Skupina I, číslo 7; Skupina II, číslo 8; Skupina III, číslo 5, 6. 1905—06.
Památky archaeologické. Bd. XXII, Heft 5, 6. 1907. 4⁰.
Historický Archiv. Číslo 25—29. 1905—07.
Věstník. Bd. XIV, XV. 1904—05.
Bulletin international. Classe des sciences mathématiques. IXᵉ année, Heft 2; Xᵉ année, Heft 1, 2. 1904—05.
Almanach. Ročnik XVI, XVII. 1906—07.
Archiv pro Lexikographie. Číslo IV, VI, 1, 2. 1906.
Bibliografie České Historie. Tom. III, svazek 2, 3. 1905—06.
Rozpravy. Třída I, číslo 34—36, Třída II; Ročník XIV, XV, Třída III, číslo 21, 22. 1905—06.
Zíkmund Winter, Dějiny řemesel. 1906.
Katalog českých fossilních. 1905.
J. Baborovský, Elektrochemie. 1904.
Bibliotéka Klassiků. Číslo 11—14. 1905—07.
Filip Počta, Palaeozoologie. Bd. 1, 2. 1904—05.
A. Reychler, Chemie fysikalnà. 1902.
Antonín Pavliček, Dodatek. 1905.
Filosofická Bibliotheka. Rada II, číslo 1. 1906.
Max Křepinský, O poměru předlohy. 1905.
Karel Chodounský, Nastuzení. 1906.

*Landesarchiv in Prag:*

Mitteilungen. I. Bd. 1904.
Archiv Český. Dīl 23. 1906. 4⁰.
Codex diplomaticus et epistolaris regni Bohemiae. Tomi I, fasc. 2. 1907. 4⁰.

*Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:*

Rechenschaftsbericht für das Jahr 1906. 1907.
Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. 18. u. 19. Bd. 1906—07.

*K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:*

Monumenta Vaticana res gestas Bohemicas illustrantia. 1907. 4⁰.

*Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:*

58. Bericht über das Jahr 1906. 1907.

*K. Böhmisches Museum in Prag:*

Bericht für das Jahr 1906. 1907.
Časopis. Bd. 81, Heft 1—4. 1907.
Památky archaeologiscké. Díl 22, Heft 3 - 6. 1906—07. 4⁰.

*K. K. Sternwarte in Prag:*

Magnetische und meteorolog. Beobachtungen. 67. Jahrg. 1906. 1907. fol.

*Verein böhmischer Mathematiker in Prag:*

Časopis. Tome 36, No. 1—4. 1906.

*Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:*

Mitteilungen. 45. Jahrg., Nr. 1—4. 1907.

*Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen „Lotos" in Prag:*

Sitzungsberichte. Jahrg. 1906, N. F., Bd. 26. 1906.
Naturwissenschaftliche Zeitschrift. Neue Folge, Bd. 1, Nr. 1—3. 1907. 4⁰.

*Meteorological Department of Transvaal in Pretoria:*

Annual Reports for the year 1905—06. 1907. fol.

*Agricultural Research Institute in Pusa:*

Bulletin. No. 4. 1907. 4⁰.
Memoirs. Botanical Series, vol. I, No. 1, part II, No. 5. Chemical Series, vol. II, No. 2. 1907. 4⁰.

*Historischer Verein in Regensburg:*

Verhandlungen. Bd. 58. 1907.

*Naturforscher-Verein in Riga:*

Korrespondenzblatt. Bd. 49 u. 50. 1906—07.
Statut des Naturforscher-Vereins. 1906.

*Bibliothèque nationale in Rio de Janeiro:*

Annaes. Vol. 27, 1905. 1906. 4⁰.
A Bibliotheca Nacional em 1904. 1906.
Catalogo da collecção Salvador de Mendonça. 1906.
Documentos relativos a Mem de Sá. 1906.
General F. M. de Souza Aguiar, Relatocio. 1906.
Madeira e Mamoré. 1885.

*Observatorio in Rio de Janeiro:*

Annuario. Anno 23. 1907.
Boletim mensal. Jan.—Dezembro 1906. 4⁰.

*Reale Accademia dei Lincei in Rom:*

Annuario. 1907.
Memorie. Classe di scienze fisiche. Serie V, vol. 6, fasc. 9—12. 1906. 4⁰.
„ Notizie degli scavi di antichità. Serie V, vol. 3, fasc. 7—12 und Indici; vol. 4, fasc. 1—6. 1906—07. 4⁰.

Atti. Serie V, Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. 15, semestre 2, fasc. 11, 12; vol. 16, semestre 1, fasc. 1—12, semestre 2, fasc. 1—11.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie IV, vol. 15, fasc. 5—10; vol. 16, fasc. 1—5. 1906—07.
Atti. Rendiconto dell' adunanza solenne del 2 Giugno 1907, vol. II. 1907. 4⁰.

*R. Comitato geologico d'Italia in Rom:*

Bollettino. Anno 1906, No. 3, 4; 1907, No. 1, 2.

*Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:*

Atti. Anno 59 e 60. 1906—07. 4⁰.

*Kaiserl. Deutsches Archäologisches Institut (röm. Abt.) in Rom:*

Mitteilungen. Bd. 21, Heft 1—4; Bd. 22, fasc. 1, 2. 1906—07.

*R. Ministero della Istruzione pubblica in Rom:*

Le opere di Galileo Galilei. Vol. III, parte 2; vol. XIX. Firenze. 1907. 4⁰.
Per la Edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei. Trent' anni di studi Galileari per Ant. Favaro. Firenze 1907. 4⁰.

*Società italiana delle scienze in Rom:*

Memorie. Serie III, tome 14. 1907. 4⁰.

*R. Ufficio centrale meteorologico Italiano in Rom:*

Annali. Serie II, vol. 23, parte 1, 1901. 1906. 4⁰.

*R. Società Romana di storia patria in Rom:*

Archivio. Vol. 29, fasc. 3, 4; vol. 30, fasc. 1, 2. 1906—07.

*Stadtmagistrat in Rosenheim:*

Aus Alt-Rosenheim. Von Lud. Eid. 1906.

*Universität Rostock:*

Schriften aus dem Jahre 1906/07 in 4⁰ u. 8⁰.

*Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte in Rotterdam:*

Nieuwe Verhandelingen. Reeks II, Deel VI, stuk 2. 1906. 4⁰.

*Académie des sciences in Rouen:*

Précis analytique des travaux. Année 1904—05 u. 1905—06. 1906—07.

*R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:*

Atti. Serie III, vol. 12, fasc. 3, 4; vol. 13, fasc. 1, 2. 1906—07.

*École française d'Extrême-Orient in Saigon:*

E. Lunet de Lajonquière, Inventaire descriptif des monuments du Cambodge. Tome II. Paris 1907. gr. 8⁰.
Publications. Vol. VII. Paris 1906. gr. 8⁰.
Bulletin. Tome 6, No. 3, 4. Hanoi 1906. 4⁰.

*Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:*

Mitteilungen. 47. Vereinsjahr 1907.

*Altmärkischer Verein für vaterländische Geschichte in Salzwedel:*

34. Jahresbericht. 1907.

*Historischer Verein in St. Gallen:*

Die Burgen d. Kantone St. Gallen u. Appenzell. Teil 1 v. G. Felder. 1907. 4⁰.
Drei St. Gallische Reisläufer v. Traugott Schieß. 1906. 4⁰.
Mitteilungen. Bd. XXX, 1. Hälfte. 1906.
Urkundenbuch der Abtei St. Gallen. Teil V, Lief. 2, 3. 1905–06. 4⁰.

*Academy of science in St. Louis:*

Transactions. Vol. XV, No. 6; vol. XVI, No. 1—7. 1906—07.

*Missouri Botanical Garden in St. Louis:*

XVII[th] annual Report. 1906.

*Instituto y Observatorio de marina de San Fernando:*

Almanaque nautico para el año 1908. 1906. 4⁰.
Annales. Sección 1ª, Memoria del Eclipse de 1905. 1907. fol.
„ Sección 2, Observaciones meteorolog. Anno 1906. 1907. fol.

*Bosnisch-Herzegovinische Landesregierung in Sarajevo:*

Ergebnisse der meteorol. Beobachtungen im Jahre 1902–03. Wien 1906. 4⁰.

*Landesmuseum in Sarajevo:*

Wissenschaftliche Mitteilungen. Bd. IX, X. 1904—07. 4⁰.

*Universität in Sassari (Sardinien):*

Studi Sassaresi. Anno IV, sez. II, fasc. II u. Supplemento No. 6, 7; anno V, sez. II, Supplemento No. 1, 2. 1906—07.

*Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:*

Jahrbücher u. Jahresberichte. 72. Jahrg. u. Register zu Jahrg. 51—60. 1907.
Mecklenburgisches Urkundenbuch. Bd. XXII. 1907. 4⁰.

*Nord-China Branch of the R. Asiatic Society in Shanghai:*

Journal. Vol. 38. 1907.

*R. Accademia dei fisiocritici in Siena:*

Atti. Serie IV, vol. 18, disp. 6—10, vol. 19, disp. 1—6; Serie V, vol. 4, disp. 3. 1906—07.

*K. K. Archäologisches Museum in Spalato:*

Bullettino di Archeologia. 1906, No. 8–12 u. Supplemento al Bullettino, No. 1—4 a 1907. 1906–07.

*Historischer Verein der Pfalz in Speyer:*

Mitteilungen. Heft 29 u. 30. 1907.

*K. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademie in Stockholm:*

Månadsblad. 32.—34. Jahrg. 1903—05. 1907.
Fornwännen 1906. Årgangen I. 1907.

*K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:*

Årsbok. År 1906 u. 1907. Uppsala 1906—07.
Astronomiska Jakttagelser. Bd. 8, No. 3–6. Uppsala 1906–07. 4⁰.
Meteorologiska Jakttagelser i Sverige. Vol 48. Uppsala 1907. 4⁰.
Handlingar. N. F., Bd. 41, No. 4, 6—7; Bd. 42, No. 1—9. Uppsala 1906—07. 4⁰.
Arkiv för Zoologi. Bd. III, Heft 3, 4. Uppsala u. Stockholm 1907.
Arkiv för Kemi. Bd. II, Heft 4–6. Uppsala u. Stockholm 1907.
Arkiv för Botanik. Bd. VI, Heft 3, 4. Uppsala u. Stockholm 1907.

Arkiv för Matematik. Bd. III, 2—4. 1907.
Nobelinstitut Meddelanden. Bd. I, 7. 1907.
Linné. Skrifter. Bd. 1—3. 1905—06.
Linné, såsom naturforskare och läkare. Uppsala 1907.
Linné, Systema naturae facsim. edit. Holmiae 1907. fol.
Les prix Nobel en 1902 u. 1905, Supplément. En 1904—07.

*Géologiska Förening in Stockholm:*

Förhandlingar. Bd. 28, Heft 7; Bd. 29, No. 1—6. 1906—07.

*Institut Royal géologique in Stockholm:*

Sveriges geologiska Undersökning. Série Aa, Nr. 123, 134, 137, 140. Karten mit Text; Série C, p. 201—208.

*Nordiska Museet in Stockholm:*

Fataburen. 1906, Heft 1—4.
Bidrag till vår odlings häfder, No. 9. 1906.

*Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:*

Vierteljahreshefte für Landesgeschichte. N. F., XVI. Jahrg. 1907, Heft 1—4. 1907.

*K. Württemberg. Statistisches Landesamt in Stuttgart:*

Württembergische Jahrbücher für Statistik u. Landeskunde. Jahrg. 1906, 2 Hefte. 1906—07. 4°.
Bibliographie der Württemberg. Geschichte. Bd. III. 1907.
Württemberg. Urkundenbuch. Bd. IX. 1907. 4°.

*Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:*

Annual Report for the year 1906. 1907. fol.

*Geological Survey of New-South-Wales in Sidney:*

Records. Vol. VIII, 3. 1907. 4°.

*Linnean Society of New-South-Wales in Sydney:*

Proceedings. Vol. 31, part 3, 4; vol. 32, part. 1—3. 1906—7.

*Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:*

Anuario. Año de 1907, año XXVII. 1906.
Observaciones meteorológicas año de 1904. 1907. 4°.

*National Physical Laboratory in Teddington:*

Report for the year 1906. 1907. 4°.

*Earthquake Investigation Committee in Tokyo:*

Publications. No. 22B Art. 1—4; No. 23, 24. 1906—07.
Bulletin. Vol. I, No. 1—4. 1907. 4°.

*Agricultural Experiment Station Japan in Tokyo:*

The Bulletin. Vol. I, No. 2. 1907. 4°.

*Kaiserl. Universität Tokyo (Japan):*

The Journal of the College of Science. Vol. XXI, article 2—7, 9—11; vol. XXII; vol. XXIII, article 1. 1906—07. 4°.
Mitteilungen aus der medizin. Fakultät. Bd. VII, No. 1, 2. 1906—07. 4°.
The Bulletin of the College of Agriculture. Vol. VII, No. 3, 4. 1907. 4°.

*Altertumsverein in Torgau:*

Veröffentlichungen. Heft XX. 1907.

*Université in Toulouse:*

Bibliothèque méridionale. I. Série, vol. 10, 11; II. Série, vol. 11. 1906—07.
Bulletin de la station de pisciculture. No. 3 4. 1906.
Annales du Midi. Année 18, No. 70—74. 1906—07.
Annales de la faculté des sciences. IIe Série, tome VIII, fasc. 2—4; tome IX, fasc. 1. 1906—07. 4⁰.

*Biblioteca e Museo comunale in Trient:*

Archivio Trentino. Anno XXI, fasc. 4; anno XXII, fasc. 1—3. 1906—07.

*Videnskabers Selskab in Trondhjem:*

Skrifter. 1905 u. 1906. 1906—07.

*Kaiser Franz Joseph-Museum für Kunst und Gewerbe in Troppau:*

Zeitschrift für Geschichte und Kulturgeschichte österreichisch Schlesiens. Jahrg. 1 1905/06, Heft 1—4; Jahrg. 2, 1906/07, Heft 1—3. 4⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1906. 1907.

*Universität Tübingen:*

Max Rümelin, Bernhard Windscheid. 1907. 4⁰.
Chr. Seybold, Verzeichnis der arabischen Handschriften I. 1907. 4⁰.

*R. Accademia delle scienze in Turin:*

Osservazioni meteorologische. Anno 1906. 1907.
Atti. Vol. 42, disp. 1—15. 1907.
Memorie. Serie II, tomo 56, 57. 1906—07.

*R. Accademia d'agricoltura in Turin:*

Annali. Vol. 49. 1906. 1907.

*K. Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala:*

Nova acta. Ser. IV, vol. 50, fasc. 2. 1907. 4⁰.

*Meteorolog. Observatorium der Universität Upsala:*

Bulletin mensuel. Vol. 38, 1906. 1906—07. fol.

*K. Universität in Upsala:*

Katalog der Inkunabeln der K. Universitätsbibliothek. Von J. Colliju. 1907.

*Redahtion der Zeitschrift „Eranos" in Upsala:*

Eranos. Vol. VI, fasc. 1—4. 1905—06..

*Historisch Genootsehap in Utrecht:*

Bijdragen en Mededeelingen. Bd. XXVII u. XVIII. Amsterdam 1906—07.
Werken. Serie III, No. 18, 21—24. Amsterdam 1906—07.

*Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht:*

Aanteekeningen. 4. Juni 1907.
Verslag. 5. Juni 1907.

*Institut Royal Météorologique des Pays-Bas in Utrecht:*

Annuaire, 57e année 1905. Abt. A. Météorologie; Abt. B. Magnétisme. 1907. 4⁰.
Mededeelingen en Verhandelingen. V. 1907.
Onweders in 1905. Deel 26. 1907.

*Physiologisch Laboratorium der Hoogenschool in Utrecht:*

Onderzoekingen. 5. Reeks. VII., VIII. 1906—07.

*Accademia di Scienze in Verona:*

Atti. Serie IV. vol. 5. fasc. 2; vol. 6. fasc. 1. 1905–06.
Osservazioni meteorológiche, 1904 u. 1905. 1905–06.

*Museo civico di Verona:*

Madonna Verona. Annata 1, fasc. 1. 1907.

*Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Warschau:*

Prace. Tomo 18. 1907.

*Bureau of American Ethnology in Washington:*

Bulletin. No. 30. 1907.
24th and 25th annual Report. 1907. 4⁰.

*Volta Bureau in Washington:*

Special Reports. The Blind and the Deaf 1900. 1906. 4⁰.

*Commissioner of Education in Washington:*

Report for the year 1903/04, vol. 2 and 1904/05, vol. 1, 2. 1906—07.

*U. S. Department of Agriculture in Washington:*

Yearbook 1906. 1907.
Weather Map. 1907, January 1—31. February 1—28.

*Smithsonian Institution in Washington:*

Frederic W. True, Remarks on the Type of the fossil Cetacean Agarophius. 1907. 4.
Smithsonian Contributions to knowledge. Part of vol. XXXV. 1907. 4⁰.
Annual Report for the year ending June 30, 1905 and 1906. 1906–07.
Miscellaneous Collections. Vol. 47, No. 1559; vol. 48, No. 1656, 1695; vol. 49, No. 1652, 1717, 1720, 1721; vol. 50, No. 1703, 1725. 1906–07.

*Carnegie Institution of Washington:*

William Lawrence Tower, Au Investigation of Evolution in Crysomelid Beetles of the Genus Leptinotarsa. 1906.
Bulletin. No. 15—19. 1907. gr. 8⁰.
Papers of the Station for Experimental Evolution. No. 8. 1907. gr. 8⁰.
Mutations, Variations and Relation-Ships of Oenotheras by D. T. Macdougal, A. M. Vail, and G. H. Shull. 1907.

*U. S. National-Museum in Washington:*

Contributions from the U. S. National Herbarium. Vol. 10, part 3 mit Karte, part 4, 5. 1906–07.
Proceedings. Vol. 31, 32. 1907.
Bulletin. Vol. 50; vol. 53, part 2, No. 56–60. 1907.
Annual Report of the Board of Regents.
Report of the National Museum for 1904–05 and 1905–06. 1906.

*U. S. Naval Observatory in Washington:*

Synopsis of the Report for the 1905—06. 1906.

*Philosophical Society in Washington:*

Bulletin. Vol. XV, p. 1—56, 1907.

*Jewish Historical Society in Washington:*

Publications. No. 15. 1906.

*U. S. Coast and Geodetic Survey Office in Washington:*

Report of the Superintendent 1905—06. 1906. 4⁰.

*United States Geological Survey in Washington:*

Bulletins. No. 279, 283—286, 287, 289, 290, 293—308, 310—315, 317—318, 320, 323, 324. 1906—07.
Monographs. Vol. 50. 1906. 4⁰.
27. Annual Report 1905—06. 1906.
Professional Paper. No. 46, 51, 52—55, 57. 1906—07. 4⁰.
Mineral Resources, 1905. 1906.
Water-Supply Paper. No. 159. 162, 164, 172, 174, 175, 177, 179—197, 199—206, 208. 1906—07.

*Harzverein für Geschichte in Wernigerode:*

Zeitschrift. 40. Jahrg., 1907, Heft 1 u. 2.

*Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:*

Sitzungsberichte. Philos.-hist. Klasse, Bd. 152, 154 und 8 Separatabhandlungen, Bd. 155, Abhandlung 3 u. 5. 1907.
Mathem.-naturwissenschaftl. Klasse.
Abt. I, Bd. 115, Heft 6—10; Bd. 116, Heft 1—6.
„ IIa, „ 115, „ 6—10; „ 116, „ 1—6.
„ IIb, „ 115, „ 7—10; „ 116, „ 1—6.
„ III, „ 115, „ 6—10; „ 116, „ 1—5. 1906—07.
Denkschriften. Mathem.-naturwissenschaftl. Klasse, Bd. 71, 1. Halbband; Bd. 80. 1907. 4⁰.
Anzeiger der mathem.-naturwissenschaftl. Klasse. 1907, Nr. I—XXVII.
Archiv für österreichische Geschichte. Bd. 94, 2. Hälfte; Bd. 95, 2. Hälfte; Bd. 96, 1. u. 2. Hälfte. 1906—07.

*K. K. Geologische Reichsanstalt in Wien:*

Verhandlungen. 1906, Nr. 11—18; 1907. No. 1—9. 4⁰.
Abhandlungen. Bd. XVIII, Heft 2. 1907. fol.
Jahrbuch. Jahrg. 1906, Bd. 56, Heft 3, 4; Jahrg. 1907, Bd. 57, Heft 1—3. 4⁰.

*K. K. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik in Wien:*

Bericht der im Jahre 1904 in Österreich beobachteten Erdbeben. Nr. I. 1906.
Jahrbücher. Jahrg. 1905, N. F., Bd. 42 (= der ganzen Reihe Bd. 50). 1907. 4⁰.
Anhang zum Jahrbuch 1905. 1906. 4⁰.

*K. K. Gradmessungs-Bureau in Wien:*

Astronomische Arbeiten. Bd. XIV. 1907. 4⁰.

*K. K. Gesellschaft der Ärzte in Wien:*

Wiener klinische Wochenschrift. 1907, Nr. 1—52. 4⁰.

*Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:*

Verhandlungen. Bd. 56, Heft 8—10; Bd. 57, Heft 1—9. 1906—07.
Abhandlungen. Bd. IV, Heft I—3. Jena 1907. 4⁰.

*K. K. Militär-geographisches Institut in Wien:*

Die Astronomisch-geodätischen Arbeiten. Bd. XXI. 1906. 4⁰.
Ergebnisse der Triangulierungen. Bd. 4. 1906. 4⁰.

*K. K. Naturhistorisches Hofmuseum in Wien:*

Annalen. Bd. XX, Nr. 4; Bd. XXI, Nr. 1 u. 2. 1905—06. gr. 8⁰.

*Institut für Österreichische Geschichtsforschung in Wien:*

Die Feier des 80. Geburtstages von Theodor von Sickel. 1906.

*K. K. Universität in Wien:*

Schriften aus dem Jahre 1907.

*Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:*

Schriften. Bd. 47, Jahrg. 1906/07. 1907.

*Verein für Nassauische Altertumskunde etc. in Wiesbaden:*

Annalen. 36. Bd., 1906. 1907. 4⁰.

*Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:*

Jahrbücher. Jahrg. 60. 1907.

*Geschichtsverein in Wolfenbüttel:*

Jahrbuch. 5. Jahrg. 1906.
Braunschweigisches Magazin. Bd. XII, Jahrg. 1906. 4⁰.

*Physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg:*

Verhandlungen. N. F., Bd. 39, Nr. 1, 2. 1907.
Sitzungsberichte. 1906, Heft 1—7; 1907, Heft 1, 2.

*Gartenbauverein in Würzburg:*

Festgabe des Fränkischen Gartenbauvereins zur 50. Erinnerungsfeicr seiner Gründung. 1907. 4⁰.

*Historischer Verein von Unterfranken in Würzburg:*

Archiv. Bd. 48. 1906.
Jahresbericht für 1905. 1906.

*Schweizerische Meteorologische Zentralanstalt in Zürich:*

Annalen. 42. Jahrg., 1905. 4⁰.

*Antiquarische Gesellschaft in Zürich:*

Mitteilungen. Bd. 26, Heft 5. 1907. 4⁰.

*Naturforschende Gesellschaft in Zürich:*

109. Stück auf das Jahr 1907. 4⁰.
Vierteljahrsschrift. 51. Jahrg., Heft 2—4; 52. Jahrg., Heft 1, 2. 1907.
Neue Denkschriften. Bd. 41. 1907. 4⁰.

*Schweizerische Geologische Kommission in Zürich:*

Beiträge z. Geologie d. Schweiz. Geotechn. Serie, Lief. IV. Bern 1907. 4⁰.
Beiträge z. Geol. Karte d. Schweiz. Lief. XXVI, 1 u. XXIX, 1. Bern 1907. 4⁰.

*Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:*

Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde. N. F., Bd. VIII, Nr. 3, 4; Bd. IX, Nr. 1—3. 1906—07. 4⁰.
15. Jahresbericht 1906. 1907.

*Sternwarte in Zürich:*

Astronomische Mitteilungen. Nr. 98. 1907.

*Universität in Zürich:*

Schriften aus dem Jahre 1906/07 in 4⁰ u. 8⁰.

## Von folgenden Privatpersonen:

*Henryk Arctowski in Brüssel:*

Variations de la vitesse du vent. 1906.

*Verlagsbuchhandlung Joh. Ambr. Barth in Leipzig:*

Beiblätter zu den Annalen der Physik. 1906, Nr. 24; 1907, Nr. 1—20.
Journal für praktische Chemie. Bd. 74, Nr. 20—24; Bd. 75, Nr. 1—12; Bd. 76, Nr. 1—12. 1906—07.

*Firma Basse & Selve in Altena (Westfalen):*

Das Nickel-Eisen. 1907. 4⁰.

*Friedrich Bassermann-Jordan in Deidesheim:*

Geschichte des Weinbaues mit besonderer Berücksichtigung der bayerischen Rheinpfalz. 3 Bde. Frankfurt a. M. 1907. 4⁰.

*Francis Basforth in Cambridge:*

Ballistic Experiments from 1864 to 1880.

*Buchhandlung Böhlaus Nachfolger in Weimar:*

Zeitschrift der Savigny-Stiftung. Bd. 28 in 2 Abteilungen. 1907.

*Renward Brandstetter in Luzern:*

Ein Prodromus zu einem vergleichenden Wörterbuch der malaio-polynesischen Sprachen. 1906.

*Antonio Cabreira in Coimbra:*

Sur les corps polygonaux. 1907.
Sabre o Calculo das Reservas Mathematicas. Lissabon 1907.
Demonstração mathematica do seguro Portugal Previdente. Lissabon 1907.

*Arthur Chuquet in Paris:*

Journal de voyage du Général Desaix. Suisse et Italie. 1907.

*Carl Chun in Leipzig:*

D. wissenschaftl. Ergebnisse d. deutschen Tiefsee-Expedition. Jena 1906. 4⁰.

*Pierre Coquelle in Meulan:*

Le Christ de Guiry du XIIᵉ siècle. Versailles 1907.

*Leonhard Dittmeyer in Würzburg:*

Aristotelis de animal. historia, textum recognovit L. Dittmeyer. Leipz. 1907.

*František Dvorský in Prag:*

Počatky kalicha a Artikule Pražske již L. 1417. 1907.

*E. Ebber in Heidelberg:*

Der Arsen-Gehalt der Maxquelle in Bad Dürkheim. 1907.

*Sophronios Eustratiades in Wien:*

Michael Glykas. Tom. 1. Athen 1906.

*Verlagsbuchhandlung Gustav Fischer in Jena:*

Denkschriften. VI, Teil 2. 1906. 4⁰.
Naturwissenschaftl. Wochenschrift. 1907, Nr. 1—35, 37—40, 42, 44—52. 4⁰.

*Hermann Fischer in Tübingen:*

Schwäbisches Wörterbuch. Lief. XVII—XX. 1907. 4°.

*Paul Fournier in Grenoble:*

Étude sur fausses Décrétales. Louvain 1907.

*Paul George in Jena:*

Das heutige Mexiko und seine Kulturfortschritte. 1906.

*Otto Gilbert in Halle a. S.:*

Die meteorologischen Theorien des griechischen Altertums. Leipzig 1907.

*Vve J. B. André Godin in Guise (Aisne):*

Documents p. une biographie complète de J. B. André-Godin. Tom. 2. 1902—06.

*Friedrich Goppelsroeder in Basel:*

Neue Capillar- und Capillaranalytische Untersuchungen. 1907.

*Georg Grupp in Maihingen:*

Kulturgeschichte des Mittelalters. I. Bd. Paderborn 1907.

*F. R. Helmert in Potsdam:*

Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig 1907.
Bestimmung der Höhenlage der Insel Wangeroog. Berlin 1907. 4°.

*Georg Helmreich in Ansbach:*

Galeni de usu partium Libri XVII. Vol. 1. Leipzig 1907.

*G. Henriksen in Christiania:*

Sundry Geological Problems. 1906.

*Gustav Herbich in München:*

Corpus inscriptionum Etruscarum. Vol. II. Leipzig 1907. fol.

*Herdersche Buchhandlung in Freiburg i. Br.:*

Jahresbericht für 1906 und 1907.

*Alfred Hillebrandt in Breslau:*

Indische Forschungen. Heft 2. 1907.

*Friedrich Hirth in New-York:*

Chinese Metallic Mirrors. 1906. gr. 8°.
Syllabary of Chinese Sounds. Washington 1907. 4°.

*Vatroslav Jagić in Wien:*

Psalterium Bononiense. 1907. 4°.

*Charles Janet in Beauvais:*

Anatomie de la Tête du Lasius Niger. Limoges 1905.
Remplacement des Muscles vibrateurs du vol etc. Paris 1906. 4°.

*F. Jousseaume in Paris:*

De l'attraction et autres joyeusetés de la science 1907.

*Hermann Knapp in München:*

Die Zenten des Hochstifts Würzburg. Bd. 1, Abt. 1, 2. Berlin 1907.

*Oscar Knoblauch, R. Linde und H. Klebe in München:*

Die therm. Eigenschaften des gesättigten Wasserdampfes. Berlin 1905. 4⁰.

*R. v. Kövesligethy in Budapest:*

Verhandlungen der vom 16.—20. Oktober 1906 in Rom abgehaltenen ersten Tagung der permanenten Kommission der internationalen seismologischen Assoziation. 1907.

*Heinrich Kopecký in Pardubitz:*

Beobachtungen über d. Witterung in Wien in d. Jahren 1896—1906. 1907. fol.

*Reinhold Koser in Charlottenburg:*

Jahresbericht über die Herausgabe der Monumenta Germaniae historica. 30. Mai 1907. Berlin 1907

*Karl Krumbacher in München:*

Byzantinische Zeitschrift. Bd. XVI, Heft 1—4. Leipzig 1907.

*Ernst v. Kuhn in München:*

Übersicht der Schriften Theodor Nöldekes. Gießen 1907. 4⁰.

*J. V. Kull in München:*

Die Poesie vornehmlich auf Denkmünzen Bayerns. Wien 1907.

Bildnisse von fürstlichen und anderen deutschen Frauen des XVI. und XVII. Jahrhunderts auf Medaillen. Wien 1907.

*Otto Lenel in Straßburg i. E.:*

Das Edictum perpetuum. Leipzig 1907.

*Henry Charles Lea in Philadelphia:*

History of the Inquisition of Spain. Tom. 4. New-York 1907.

*Gabriel Monod in Versailles:*

Revue historique. 1907, Janv.-Déc. und Sixième table générale 1901—05.

*Heinrich Nissen in Bonn:*

Orientation. Studien zur Geschichte der Religion. 2 Hefte. Berlin 1907.

*Adolf Noreen in Uppsala:*

Vårt Språk. Bd. I. Lund 1906.

*G. B. Olivero in Carignano:*

Astronomia. Conferenza. Torino 1907. 4⁰.

*Hans Passarge in Berlin:*

Ursprung des Lebens aus mechanischen Prinzipien. 1908.

*Hans Prutz in München:*

Die geistlichen Ritterorden. Berlin 1907.

*Moritz von Rohr in Jena:*

Die binokularen Instrumente. Berlin 1907.

*H. Rosenbusch in Heidelberg:*

Mikroskopische Thyriographie. Bd. II, 1. Hälfte. Stuttgart 1907.

*Ludwig Schemann in Straßburg i. E.:*

Die Gobineau-Sammlung der Kaiserl. Universitäts- und Landesbibliothek zu Straßburg. 1907.

*Lucian Scherman in München:*

Orientalische Bibliographie. 19. Jahrg., Heft 1—3. Berlin 1906—07.

*G. V. Schiaparelli in Mailand:*

Venusbeobachtungen der Babylonier. Berlin 1906. 4⁰.
Come si possa giustificare l'uso della media aritmetica nel calculo dei risultati d'osservazione 1907.

*Richard Schröder in Heidelberg:*

Lehrbuch der deutschen Rechtsgeschichte. 5. Aufl. Leipzig 1907.

*T. J. J. See in Montgomery City (Missouri):*

On the Temperature, secular Cooling and Contraction of the Earth. Philadelphia 1907.

*G. Schweinfurth in Berlin:*

Veröffentliche Briefe, Aufsätze und Werke. 1860—1907. 1907.

*Seitz und Schauer in München:*

Jahrbuch der Therapie. 3. Jahrg., 1906, 3. Vierteljahresheft. 1906. 4⁰.
Leipziger Medizinische Mouatsschrift. 1907, Nr. 1—12. gr. 8⁰.

*Siemens-Sehuckert-Werke in Berlin:*

Nachrichten. Jahrg. 1906—07. fol.

*Strambio in Mailand:*

La Pellagra. 1890.

*B. G. Teubner in Leipzig:*

Thesaurus linguae Latinae. Vol. III, fasc. 1, 2; vol. IV, fasc. 2, 3. 1907. 4⁰.
Archiv für lateinische Lexikographie. Bd. XV, Heft 1, 2. 1906—07.
Euzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. III, 1, Heft 1, 2; Bd. IV, 2. II; Bd. V, 1. Heft 4; Bd. V, 2, Heft 2; Bd. VI, 1, Heft 2; Bd. VI. 2, II, Heft 1, 1907; und französische Ausgabe, tome I, vol. 1, fasc. 2; tome I, vol. 2, fasc. 1. Paris 1907.
Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe, Bd. 11, Heft 3, 4; Bd. 12, Heft 1—4. 1907.

*A. Thieullen in Paris:*

Le Criterium présentation et controverses, dernier chapitre. 1907. fol.

*Edgar Thurston in Madras:*

Ethnographic Notes in Southern India. 1906.

*M. Treub in Buitenzorg:*

Sur l'acide cyanhydrique des plantes. No. I, II. Leide 1907.

*Iwan Tywonowycz in Wien:*

Die Erde als Quelle der Wärme. 1907.

*Ludwig Wilser in Heidelberg:*

Stammbaum der indogermanischen Völker und Sprachen. Jena 1907.
Menschenkunde und Altertumswissenschaft zur Etruskerfrage (Sep.-Abr.). Leipzig 1907.

*Wilhelm Windelband in Heidelberg:*

Lehrbuch der Geschichte der Philosophie. 4. Aufl. Tübingen 1907.

*Veit Brecher Wittrock in Stockholm:*

Acta Horti Bergiani. Tom. IV. 1907. 4⁰.

*Spiridon K. Zabitzianos in Kerkyra (Corfu).*

*Περὶ ὑγιείνης τῶν στρατευμάτων.* 1906.

# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Klasse

der

## K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

---

1907. Heft I.

---

**München**
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1907.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).



# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

---

1907. Heft II.

---

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1907.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).



# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Klasse

der

## K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1907. Heft III.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1908.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).





# Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen werden in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

*Sitzung vom 2. November 1907.* Seite



*Sitzung vom 7. Dezember 1907.*



*Öffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des Prinzregenten am 14. November 1907.*



Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.



# Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen werden in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

*Sitzung vom 8. Juni 1907.*



*Sitzung vom 6. Juli 1907.*



*Öffentliche Sitzung zur Feier des 148. Stiftungstages am 16. März 1907.*



Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.



# Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen werden in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

### *Sitzung vom 12. Januar 1907.*



### *Sitzung vom 9. Februar 1907.*



### *Sitzung vom 2. März 1907.*



### *Sitzung vom 4. Mai 1907.*

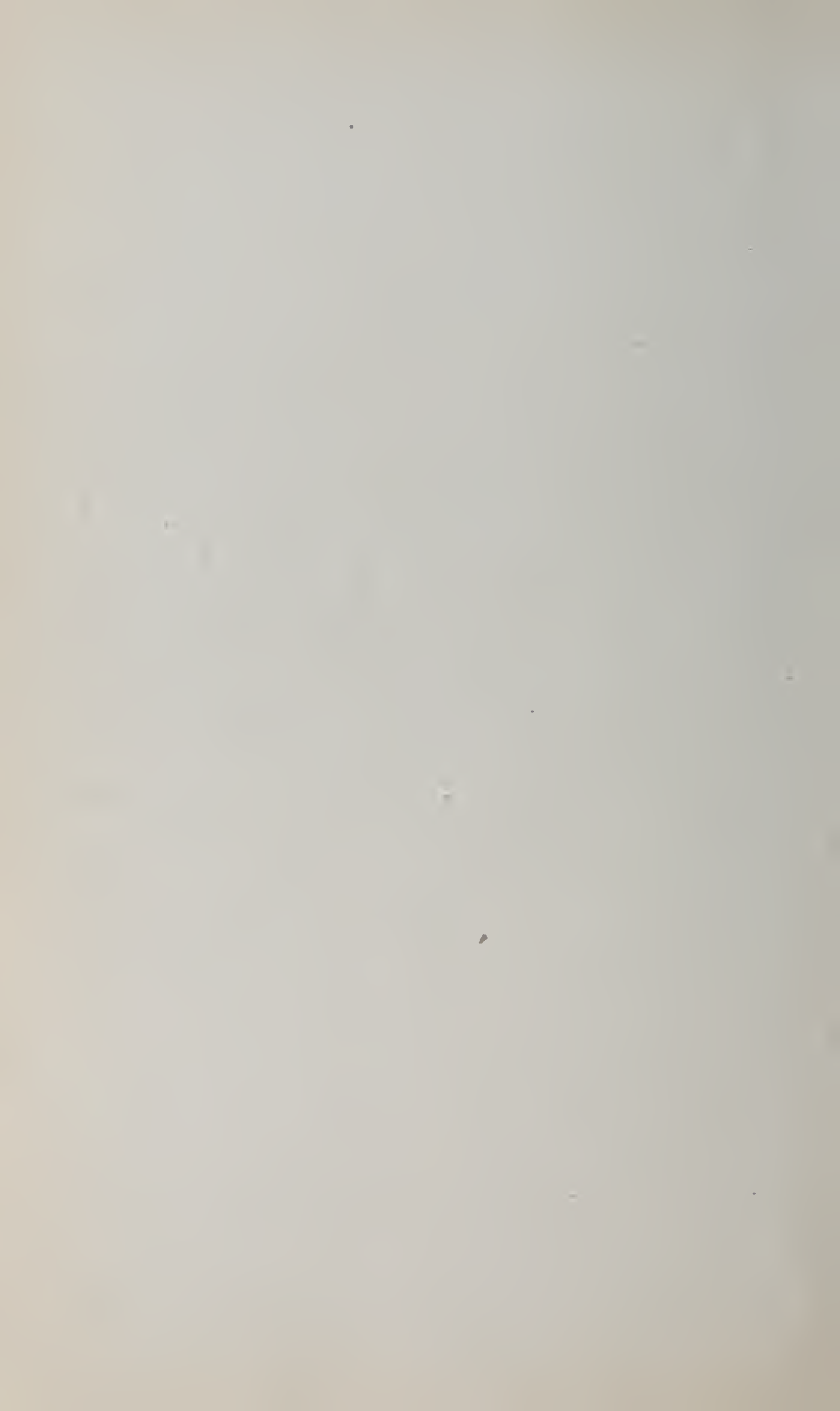



Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.












AMNH LIBRARY
100229650